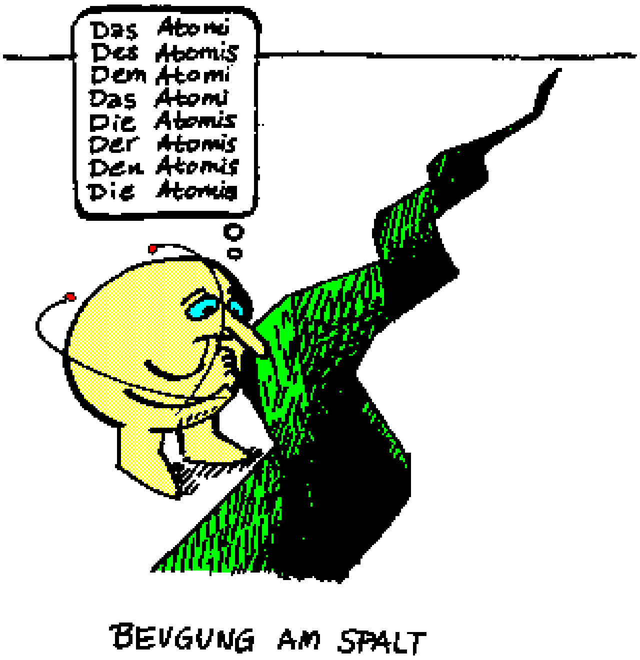
Elemente der Quantenoptik

Corinna Maaß

5.11.2002



Übersicht

- Zweite Quantisierung
- Fock-Zustände
- Eigenschaften des Vakuum
- Der Strahlteiler
- kohärente Zustände

Zweite Quantisierung

1. Erzeugung einer Wellengleichung für das Eichpotential $\mathbf{A}$ aus den Maxwell-Gleichungen

2. Umformung zu einer Superposition unabhängiger Oszillatoren

3. Quantisierung des harmonischen Oszillators

4. Darstellung der Quantenelektrodynamik in Bezug auf den quantenmechanischen Oszillator

1. Umformung der Maxwell-Gleichungen nach dem Eichpotential $\mathbf{A}$

- Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$$

- Darstellung durch Eichpotentiale $\mathbf{A}$ und ϕ

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -(\dot{\mathbf{A}} + \nabla\phi)$$

- Annahmen:
  - $\mathbf{j} = 0$
  - Coulomb-Eichung:

$$\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- Resultat für $\mathbf{A}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}(\ddot{\mathbf{A}} + \nabla\dot{\phi}) = 0$$

- Vereinfachung:

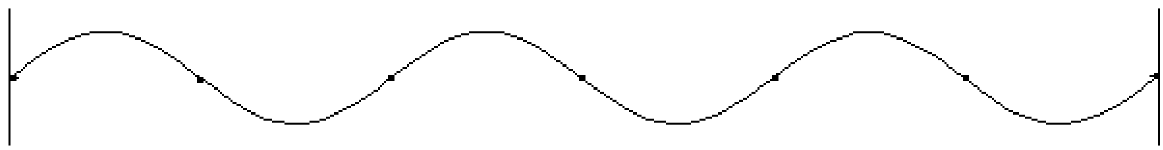
$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot A}_{=\mathbf{0}}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\rightarrow \quad -\nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\mathbf{A}} = 0$$

$\rightarrow$ **Wellengleichung für $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$**

2. Fourierzerlegung und Diskretisierung

Zerlegung des Ortsanteiles von $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in eine Fourierreihe.
Diskrete $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ folgen aus periodischen Randbedingungen.



$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{t}) = \sum_k \left[\mathbf{A}_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{A}_k^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

$$k_x, k_y, k_z \in \mathbb{Z}$$

Einsetzen in die Wellengleichung ergibt

$$k^2 \mathbf{A}_k(t) + \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{A}}_k(t) = 0$$

$$\rightarrow \ \mathbf{A}_k(t) = \mathbf{A}_k e^{-i\omega_k t}; \ \ \omega_k = c|k|.$$

→Summe unabhängiger Oszillatoren

Mittlerer Energiegehalt des Oszillators

- Darstellung für $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \sum_k \left[\mathbf{A}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{A}_k^* e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$

- $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ abhängig von $\mathbf{A}$

$$\mathbf{E}_k = i\omega_k \left[\mathbf{A}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{A}_k^* e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$

$$\mathbf{B}_k = i\mathbf{k} \times \left[\mathbf{A}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{A}_k^* e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$

- Mittlerer Energiegehalt

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_k &= \frac{1}{2} \int\limits_{Vol.} \left(\varepsilon_0 \bar{E}_k^2 + \bar{B}_k^2\right) dV \\ &= 2\varepsilon_0 V \omega_k^2 \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^* \end{aligned}$$

3. Quantisierung

- Einführung kanonischer Koordinaten

$$A_{k\sigma}\epsilon_\sigma = (4\varepsilon_0 V\omega_k^2)^{-1/2}(\omega_k q_{k\sigma} + ip_{k\sigma})\epsilon_\sigma$$
$$A^*_{k\sigma}\epsilon^*_\sigma = (4\varepsilon_0 V\omega_k^2)^{-1/2}(\omega_k q_{k\sigma} - ip_{k\sigma})\epsilon^*_\sigma$$

  mit Polarisationseinheitsvektoren ϵ_σ, $\sigma = 1, 2$

$$\bar{\mathcal{E}}_{k\sigma} = \frac{1}{2}(p_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 q_{k\sigma}^2)$$
$$\bar{\mathcal{E}}_{gesamt} = \sum_{k,\sigma} \frac{1}{2}(p_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 q_{k\sigma}^2)$$

  $\rightarrow$ Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

- Kommutatorrelationen für a ($\mathbf{A}$) und $a^\dagger$ ($\mathbf{A}^*$)

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$
$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

4. Operatoren zu klassischen Größen

- $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$, und $\mathbf{B}$

$$\widehat{A}_k = \left[\widehat{a}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \widehat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$
$$\widehat{E}_k = i\omega_k \left[\widehat{a}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \widehat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$
$$\widehat{B}_k = i\mathbf{k} \times \left[\widehat{a}_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \widehat{a}_k^\dagger e^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$

- Hamiltonoperator (symmetrisiert)

$$H = \sum_i \frac{\hbar\omega}{2}[a_i^\dagger a_i + a_i a_i^\dagger] = \sum_i \hbar\omega[a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2}]$$

- Feldimpuls
klassisch: Integration übr den Poynting-Vektor

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \int \mathbf{E} \times \mathbf{B}\, d^3 r$$

quantenmechanisch:

$$\mathbf{P} = \sum_i \hbar\mathbf{k}_i a_i^\dagger a_i$$

- Anzahloperator

$$\widehat{n} = a_i^\dagger a_i$$

$$[\widehat{n}, H] = 0$$

Alle wichtigen Größen können auf die Operatoren $a, a^\dagger$ und $\widehat{n}$ zurückgeführt werden.

Eigenzustände:

$a,\ a^\dagger$: kohärente Zustände
$\widehat{n}$: Fock-Zustände

Übersicht

- Zweite Quantisierung
- Fock-Zustände
- Eigenschaften des Vakuum
- Der Strahlteiler
- kohärente Zustände

Fock-Zustände

- Eigenzustände von $\hat{n}$, H und P:

$$a_i^\dagger a_i \left|n_i\right\rangle = \hat{n}_i \left|n_i\right\rangle = n_i \left|n_i\right\rangle, \; n_i = 0, 1, 2 \ldots$$

- Wirkung von Erzeuger und Vernichter

$$\begin{aligned} a_i^\dagger \left|n_i\right\rangle &= \sqrt{n_i + 1}\left|n_i + 1\right\rangle \\ a_i \left|n_i\right\rangle &= \sqrt{n_i}\left|n_i - 1\right\rangle \end{aligned}$$

- Erzeugung des n-ten Fock-Zustandes

$$\left|n_i\right\rangle = \frac{(a_i^\dagger)^n}{\sqrt{n_i!}}\left|0_i\right\rangle$$

- Eigenwertgleichungen zu H und P

$$H\left|n_1 \ldots n_i \ldots\right\rangle = \sum_i \left(n_i + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_i \left|n_1 \ldots n_i \ldots\right\rangle$$

$$\mathbf{P}\left|n_1 \ldots n_i \ldots\right\rangle = \sum_i n_i \hbar \mathbf{k}_i \left|n_1 \ldots n_i \ldots\right\rangle$$

Photoneninterpretation

Jeder durch k_i gekennzeichnete Mode des elektrischen Feldes ist mit n_i Quanten der Energie $\hbar\omega_i$ und Impuls $\hbar\mathrm{k}_i$, den Photonen, gefüllt. Der allgemeine Anregungszustand besteht in einer Superposition aller Moden.
Der Grundzustand $|0_1 \ldots 0_i \ldots\rangle$ ist das Vakuum.

Übersicht

- Zweite Quantisierung
- Fock-Zustände
- Eigenschaften des Vakuum
- Der Strahlteiler
- kohärente Zustände

Vakuum

Nichtklassische Eigenschaften des Vakuum

- Mittelwerte von Vektorfeldern wie $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ oder $\mathbf{A}$
  allgemeine Form:

  $$\widehat{F}(\mathbf{r},t) = \sum_{k,\sigma} f(\omega_k)\epsilon_\sigma \widehat{a}_{k\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + \text{ c.c.}$$

  mit $\widehat{a}_{k\sigma}\,|0\rangle = \langle 0|\,\widehat{a}^\dagger_{k\sigma} = 0$

  $$\rightarrow \langle 0|\widehat{F}(\mathbf{r},t)|0\rangle = 0$$

  (dies gilt auch für beliebige Fock-Zustände)

- Vakuumfluktuationen

$$\langle 0|\hat{a}^\dagger_{k\sigma}\hat{a}_{k'\sigma'}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger_{k\sigma}\hat{a}^\dagger_{k'\sigma'}|0\rangle$$
$$= \langle 0|\hat{a}_{k\sigma}\hat{a}_{k'\sigma'}|0\rangle = 0$$

$$\langle 0|\hat{a}_{k\sigma}\hat{a}^\dagger_{k'\sigma'}|0\rangle = \langle 0|\hat{a}^\dagger_{k\sigma}\hat{a}_{k'\sigma'} + \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}|0\rangle$$
$$= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}$$

$$\rightarrow \langle 0|\hat{F}^2|0\rangle = \sum_{k\sigma k'\sigma'} f(\omega_k) f(\omega_{k'})^* \langle 0|\hat{a}_{k\sigma}\hat{a}^\dagger_{k'\sigma'}|0\rangle$$
$$\cdot (\epsilon_{k\sigma}\cdot\epsilon^*_{k'\sigma'}) e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}-(\omega_k-\omega_{k'})t}$$

Vakuumfluktuationen des Feldes:

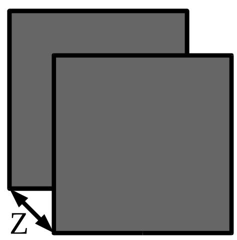
$$\langle 0|\widehat{F^2}(\mathbf{r},t)|0\rangle = \sum_{\mathbf{k},\sigma} |f(\omega_k)|^2 \xrightarrow{\mathbf{k}\to\infty} \infty$$

- Energiegehalt des Vakuum

$$\langle 0|\sum_k \hat{H}_k|0\rangle = \langle 0|\sum_k(\hbar\omega_k(\hat{n}_k+\frac{1}{2})|0\rangle$$
$$= \sum_k \hbar\omega_k \frac{1}{2} \xrightarrow{\mathbf{k}\rightarrow\infty} \infty$$

- Relevanz der Vakuumfluktuationen am Beispiel Casimir-Kraft

$$U = \sum_{k>1/z} \frac{1}{2}\hbar\omega_k$$

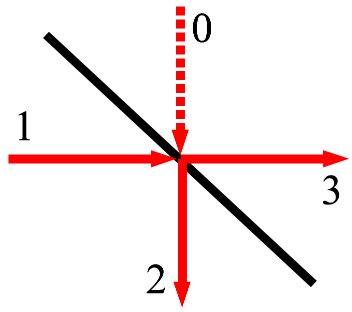


$\rightarrow$ Anziehung

Übersicht

- Zweite Quantisierung
- Fock-Zustände
- Eigenschaften des Vakuum
- Der Strahlteiler
- kohärente Zustände

Strahlteiler



- klassisch:

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \tau & -\varrho \\ \varrho & \tau \end{pmatrix}$$

- analog quantenmechanisch:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Kommutatorrelationen:

$$[\hat{a}_\nu, \hat{a}_\mu^\dagger] = \delta_{\nu\mu}$$
$$[\hat{a}_\nu, \hat{a}_\mu] = [\hat{a}_\nu^\dagger, \hat{a}_\mu^\dagger] = 0$$

$$\rightarrow \; |b_{11}|^2 + |b_{22}|^2 = |b_{12}|^2 + |b_{21}|^2 = 1$$
$$b_{11}b_{21}^* + b_{12}b_{22}^* = 0$$

$$\rightarrow \; B \text{ unitär: } B^\dagger = B^{-1}$$

Beweis der Unitarität

$$\hat{a}_2 = b_{11}\hat{a}_0 + b_{12}\hat{a}_1$$
$$\hat{a}_3 = b_{21}\hat{a}_0 + b_{22}\hat{a}_1$$

Kommutatoren:

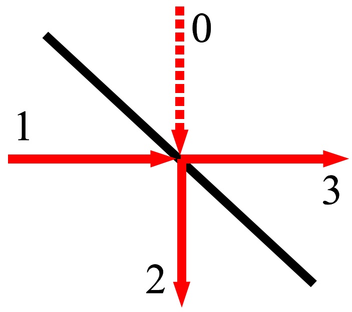
$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |b_{11}|^2[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] + |b_{12}|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$$
$$[\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = |b_{21}|^2[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] + |b_{22}|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 1$$
$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = b_{11}b_{21}^*[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] + b_{12}b_{22}^*[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = 0$$

$$\rightarrow\ |b_{11}|^2 + |b_{22}|^2 = |b_{12}|^2 + |b_{21}|^2 = 1$$
$$b_{11}b_{21}^* + b_{12}b_{22}^* = 0$$

für reelles B:

$$B = \begin{pmatrix} \tau & -\varrho \\ \varrho & \tau \end{pmatrix}$$

- Vakuumeffekte



Bei 0 fällt kein Licht ein: Muß man den Port 0 berücksichtigen?

klassisch: $v_2 = \varrho v_1, \;\; v_3 = \tau v_1$
$|v_2|^2 + |v_3|^2 = (|\tau|^2 + |\varrho|^2)|v_1|^2 = |v_1|^2$

quantenmechanisch folgt daraus:

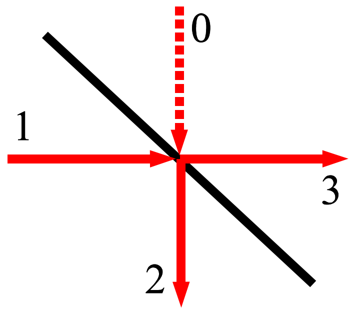
$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |\varrho|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |\varrho|^2$$
$$[\hat{a}_3, \hat{a}_3^\dagger] = |\tau|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = |\tau|^2$$
$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = \varrho\tau^*[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] = \varrho\tau^*$$

Widerspruch!

anders: $\hat{a}_2 = \varrho\hat{a}_1 + \tau\hat{a}_0$
$\hat{a}_3 = \tau\hat{a}_1 + \varrho\hat{a}_0$

$$[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger] = |\varrho|^2[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] + |\tau|^2[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1$$
$$[\hat{a}_2, \hat{a}_3^\dagger] = \varrho\tau^*[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger] - \tau\varrho^*[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 0$$

Port 0 ist notwendig



- Photonenzahlen

  Operator $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$
  Mittelwert
  $\langle \hat{n}_i \rangle = \langle n_0 n_1 | \hat{n}_i | n_0 n_1 \rangle$

  $\hat{n}_2 = |\tau|^2 \hat{n}_0 + |\varrho|^2 \hat{n}_1 + \tau^* \varrho \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \varrho^* \tau \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0$
  $\hat{n}_3 = |\varrho|^2 \hat{n}_0 + |\tau|^2 \hat{n}_1 + \varrho^* \tau \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 + \tau^* \varrho \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0$
  für Vakuum in Strahl 0:

  $$\langle \hat{n}_2 \rangle = |\varrho|^2 \langle \hat{n}_1 \rangle \qquad \langle \hat{n}_3 \rangle = |\tau|^2 \langle \hat{n}_1 \rangle$$

  $\longrightarrow$ Photonenzahlerhaltung

- Korrelationen

  $$\mathcal{P}_{23} = \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_3 \hat{a}_2 \rangle = \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle$$

  $$\langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle = |\varrho|^2 |\tau|^2 [\langle \hat{n}_1^2 \rangle - \langle \hat{n}_1 \rangle]$$

  Bei einem Einphotonenzustand

  $$(\langle \hat{n}_1^2 \rangle = \langle \hat{n}_1 \rangle)$$

  kann nicht sowohl im reflektierten als auch im transmittierten Strahl ein Photon gemessen werden.

- Interferenz zweier Einphotonenzustände

$$|\psi\rangle = |1_0\ 1_1\rangle$$

$$\mathcal{P}_{23} = \langle \hat{n}_2 \hat{n}_3 \rangle = (|\tau|^2 - |\varrho|^2)^2$$

$\longrightarrow$ im symmetrischen Strahlteiler

$$(|\tau|^2 = |\varrho|^2 = \frac{1}{2})$$

können die Photonen nur zusammen in Strahl 2 oder 3 emittiert werden.

Übersicht

- Zweite Quantisierung
- Fock-Zustände
- Eigenschaften des Vakuum
- Der Strahlteiler
- kohärente Zustände

kohärente Zustände

Eigenzustände von $\widehat{a}$:

$$\widehat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \qquad\qquad \langle\alpha|\,\widehat{a}^\dagger = \langle\alpha|\,\alpha^*$$

- Eigenschaften
  - wohldefinierte Amplitude und Phase
  - vollkommen kohärent
  - in Orts-(Impuls-)Darstellung Gaußsches Wellenpaket

- quasiklassische Zustände:
  Mittelwert des Operators ergibt die dazugehörige klassische Größe
  - Energie

$$\langle\widehat{H}\rangle = \langle\alpha|\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + \frac{1}{2}|\alpha\rangle = |\alpha|^2 + \frac{1}{2}$$

– Impuls

$$\langle \widehat{\mathbf{P}} \rangle = \sum_i \hbar \mathbf{k}_i |\alpha_i|^2$$

– E-Feld

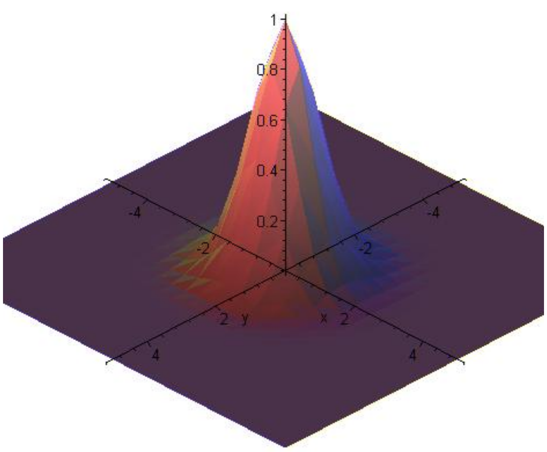
$$\langle \widehat{E}_k \rangle = i\omega_k \left[\alpha_k e^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \text{c.c.} \right]$$

- Verschiebungsoperator

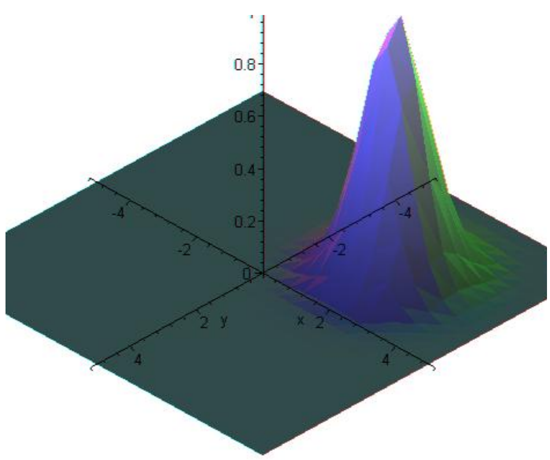
$$\widehat{T}(\alpha) = e^{\alpha^* \widehat{a} - \alpha \widehat{a}^\dagger}$$
$$\widehat{T}^\dagger(\alpha')\, \widehat{a}\, \widehat{T}(\alpha') = \widehat{a} + \alpha'$$

führt kohärente Zustände auf das Vakuum zurück

$$|0\rangle = T^\dagger(\alpha)\, |\alpha\rangle \qquad |\alpha\rangle = T(\alpha)\, |0\rangle$$



Vakuum



kohärenter Zustand

Zusammenfassung

- Zweite Quantisierung
  - Erzeugung einer Wellengleichung für $\mathbf{A}$ aus den Maxwell-Gleichungen, Lösung durch Summe unabhängiger Oszillatormoden
  - Quantisierung der Oszillatoren liefert Operatoren für alle Größen der Elektrodynamik
  - Beschränkung auf $\widehat{a}$, $\widehat{a}^\dagger$ und $\widehat{n}$

- Fock-Zustände
  - Eigenzustände von $\widehat{n}$
  - nichtklassische Phtotoneninterpretation

- Eigenschaften des Vakuum
  - Mittelwerte und Fluktuationen von Vektorfeldern
  - Divergierende Nullpunktsenergie
- Der Strahlteiler
  - Beschreibung durch unitäre Matrix
  - zwei Eingangsports notwendig
  - Photonenzahlerhaltung
  - zwei eingehende Einphotonenzustände interferieren

- kohärente Zustände
  - feste Amplitude und Phase, minimale Unschärfe
  - experimentell erzeugbar
  - quasiklassische Zustände
  - Verschiebung des Vakuum