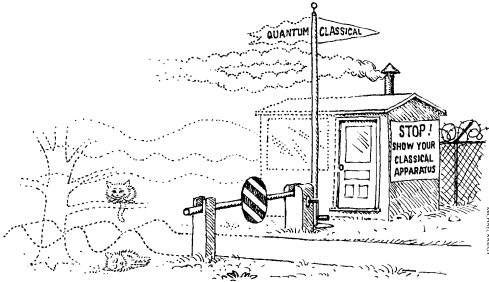


Dekohärenz



06. Dezember 2002
Wolfgang Bührer

Übersicht

- Unterschied zwischen Superposition und Gemisch
- Probleme mit klassischen Zuständen in der Quantenmechanik
- Dekohärenz
 - I) durch Streuung
 - II) durch Ankopplung von Oszillatoren

2

Superposition - Gemisch

- Superposition: Feste **Phasenbeziehung** zwischen Zuständen

- Beispiel Spin: σ_z -Messung an

a)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x\}$$

Ergebnis: $|\uparrow\rangle_z$

Dichtematrix: $\varrho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- b) 50-50 klassisches Gemisch aus $|\uparrow\rangle_x, |\downarrow\rangle_x$

Ergebnis: Dichtematrix:

$$P_{|\uparrow\rangle} = \frac{1}{2} \text{ für } |\uparrow\rangle_z$$
$$P_{|\downarrow\rangle} = \frac{1}{2} \text{ für } |\downarrow\rangle_z$$
$$\varrho = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3

Probleme in der Quantenmechanik

- Warum offensichtlich keine Superposition von „Cat-States“ in der makroskopischen Welt wie z.B.:

$$|\psi\rangle = |-\vec{x}\rangle + |\vec{x}\rangle$$

$$|\psi\rangle = |\text{Katze lebt}\rangle + |\text{Katze tot}\rangle$$



- Wie ist der Messprozess erklärbar? Sind zwei Dynamiken zur Beschreibung notwendig?

4

„Lösung:“ Dekohärenz

- Zerstören der Phasenbeziehung zwischen einzelnen Zuständen in einer ausgezeichneten Basis
 \Leftrightarrow Verschwinden der Außerdiagonalelemente der Dichtematrix
- Verlust an Informationen an ein angekoppeltes System
- Irreversibilität (Konsequenz aus der Größe des Systems Umwelt)

Mehrere Modelle für die Beschreibung der Dekohärenz:

- I) Kontinuierliche Streuung
- II) Ankopplung von Oszillatormoden

5

Dekohärenz - Streuung

- Makroskopische Objekte streuen ständig Licht: Information über Aussehen etc.
- Allg. Streuung:

$$|x\rangle |\chi\rangle \longrightarrow S |x\rangle |\chi\rangle = |x\rangle |\chi_x\rangle$$

- Reduzierte Dichtematrix des Objekts:

$$\varrho(x, x') \langle \chi_{x'} | \chi_x \rangle = \varrho(x, x') \langle \chi | S_{x'}^\dagger S_x | \chi \rangle$$

- Annahmen:

- 1) Ww ist translationsinvariant
- 2) Rückstoß vernachlässigbar
- 3) es strahlen viele Teilchen ein
- 4) eingehende Teilchen: Gemisch aus Impulseigenzuständen

- Zeitentwicklung der Dichtematrix:

$$\frac{d}{dt} \varrho(x, x') = -\varrho(x, x') F(x - x')$$

$$\varrho(x, x', t) = \exp(-F(x - x')t) \varrho(x, x', t_0)$$

6

- Photon löst $|x-x'|$ hervorragend auf. $\lambda_{phot} \ll |x-x'|$

$$F(\infty) = 2\pi \int dp v(p) n(p) \sigma(p) = \text{konst} > 0$$

→ exponentieller Abfall dieser Elemente

- Photon löst $|x-x'|$ nicht auf

$$\lambda_{phot} \gg |x-x'|$$

$$F(|x-x'|) = \int dp v(p) n(p) p^2 (x-x')^2 \underbrace{\frac{4\pi^2}{3} \int ds (1-s) |f(s)|^2}_{=: \sigma_{eff}}$$

für festgehaltenes p und Photonenfluss

Nv/V gilt:

$$\varrho(x, x', t) = e^{-\Lambda t (x-x')^2}$$

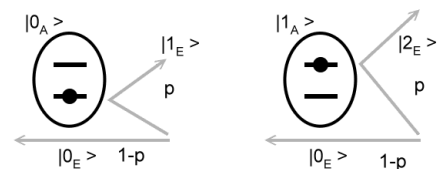
$$\Lambda = \frac{p^2 N v \sigma_{eff}}{V}$$

- ebenfalls exponentieller Abfall
- Abfall abhängig vom Abstand der Zustände

- $|x-x'| = 0$
 → keine Änderung des Matrixelements

7

Beispiel: Streuung an Atom



- Beschreibung:

$$|0_A, 0_E\rangle \longrightarrow \sqrt{1-p} |0_A, 0_E\rangle + \sqrt{p} |0_A, 1_E\rangle$$

$$|1_A, 0_E\rangle \longrightarrow \sqrt{1-p} |1_A, 0_E\rangle + \sqrt{p} |1_A, 2_E\rangle$$

- Wirkung auf Dichteoperator des Atoms:

$$\begin{aligned} \varrho' &= (1-p) |0_A\rangle \langle 0_A| \varrho |0_A\rangle \langle 0_A| \\ &\quad + p |1_A\rangle \langle 1_A| \varrho |1_A\rangle \langle 1_A| \\ &= \begin{pmatrix} \varrho_{00} & (1-p)\varrho_{01} \\ (1-p)\varrho_{10} & \varrho_{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- n-fache Anwendung liefert in den Außerdiagonalelementen:

$$(1-p)^n \longrightarrow (1 - \Delta t \Gamma) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} e^{-\Gamma t}$$

8

Größenordnungen der Dekohärenz

Λ in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$	Freies Elektron	10 μm Staubpartikel	Bowling-Kugel
300 K „Luft“ 1013mbar	10^{31}	10^{37}	10^{45}
300 K „Luft“ im Labor-Vakuum	10^{18}	10^{23}	10^{31}
Sonnenlicht auf der Erde	10^1	10^{20}	10^{28}
300 K Photonen	10^0	10^{19}	10^{27}
Hintergrund-Radioaktivität	10^{-4}	10^{15}	10^{23}
Kosmische Hintergrundstrahlung	10^{-10}	10^6	10^{17}
Solare Neutrinos	10^{-15}	10^1	10^{13}

Zahlen von 1993 nach Tegmark

9

Der Messprozess

- Verschränkung des Messapparates mit dem System:

$$|n\rangle_S |\Phi_0\rangle_A \xrightarrow{H_{int}} |n\rangle_S |\Phi_n\rangle_A$$

- Hamilton-Operator:

$$H_{int} = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes \tilde{A}_n$$

- Zeitentwicklung des Gesamtsystems:

$$\left(\sum_n c_n |n\rangle\right) |\Phi_0\rangle \xrightarrow{t} \left(\sum_n c_n e^{-iH_{int}t} |n\rangle\right) |\Phi_0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \frac{e^{-i\tilde{A}_n t} |\Phi_0\rangle}{|\Phi_n(t)\rangle}$$

- Dichteoperator

$$\varrho_S = \sum_{n,m} c_m^* c_n \langle \Phi_m(t) | \Phi_n(t) \rangle |m\rangle \langle n|$$

- Für bestimmte Zeiten gelte: $\langle \Phi_m | \Phi_n \rangle = \delta_{nm}$

$$\text{somit: } \varrho_S = \sum_n |c_n|^2 |n\rangle \langle n|$$

→ ein echtes klassisches Gemisch!

- Probleme:

zeitlich nicht stabil
keine Reduktion auf **einen** Zustand
Zeigerbasis nicht fixiert

10

Beispiel: 2-Niveau-Systeme

- System & Meßapparat:

$$\underbrace{\{a|\uparrow\rangle_z^S + b|\downarrow\rangle_z^S\}}_{:=|\phi_i\rangle} \otimes |\uparrow\rangle_x^A \xrightarrow{H_{AS}} a|\uparrow\rangle_z^S |\uparrow\rangle_z^A + b|\downarrow\rangle_z^S |\downarrow\rangle_z^A$$

- Hamilton-Operator

$$H_{AS} = g\sigma_z \otimes \sigma_y$$

- Entwicklung des Startzustandes:

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= e^{-iH_{AS}t} |\phi_i\rangle \\ &= a|\uparrow\rangle_z^S \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} + gt\right) |\uparrow\rangle_z^A + \cos\left(\frac{\pi}{4} + gt\right) |\downarrow\rangle_z^A \right\} \\ &\quad + b|\downarrow\rangle_z^S \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} - gt\right) |\uparrow\rangle_z^A + \cos\left(\frac{\pi}{4} - gt\right) |\downarrow\rangle_z^A \right\} \end{aligned}$$

- Für $\tau = \frac{\pi}{4g}$ gewünschter Zustand

$$|\phi_f\rangle = a|\uparrow\rangle_z^S |\uparrow\rangle_z^A + b|\downarrow\rangle_z^S |\downarrow\rangle_z^A$$

- Aber** Zeigerbasis nicht fixiert

11

Die Zeigerbasis

- Zeitabhängiger Zustand

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= a|\uparrow\rangle_z^S \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} + gt\right) |\uparrow\rangle_z^A + \cos\left(\frac{\pi}{4} + gt\right) |\downarrow\rangle_z^A \right\} \\ &\quad + b|\downarrow\rangle_z^S \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} - gt\right) |\uparrow\rangle_z^A + \cos\left(\frac{\pi}{4} - gt\right) |\downarrow\rangle_z^A \right\} \end{aligned}$$

- Basistransformation in System A:

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_z^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_x^A + |\downarrow\rangle_x^A \} \\ |\downarrow\rangle_z^A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_x^A - |\downarrow\rangle_x^A \} \end{aligned}$$

- Endzustand:

$$\begin{aligned} |\phi_f\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{\{a|\uparrow\rangle_z^S + b|\downarrow\rangle_z^S\}}_{:=|s_1\rangle} |\uparrow\rangle_x^A + \underbrace{\{a|\uparrow\rangle_z^S - b|\downarrow\rangle_z^S\}}_{:=|s_2\rangle} |\downarrow\rangle_x^A \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |s_1\rangle |\uparrow\rangle_x^A + |s_2\rangle |\downarrow\rangle_x^A \} \\ a &= b = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_x^S |\uparrow\rangle_x^A + |\downarrow\rangle_x^S |\downarrow\rangle_x^A \} \end{aligned}$$

→ Zeigerbasis nicht fixiert!

12

Auszeichnung der Zeigerbasis

- Lösung: Ankopplung an ein weiteres System:
Annahme: Zeitskala der Ww mit der Umwelt klein gegen Ww System-Messapparat.

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle &= |\phi_f\rangle |\uparrow\rangle_x^E \\ H^{AE} &= g_1 \mathbb{1} \otimes \sigma_z \otimes \sigma_y \end{aligned}$$

- Analoge Rechnung und Wahl von $\tau_2 = \frac{\pi}{4g_1}$

$$|\psi_f\rangle = a |\uparrow\rangle_z^S |\uparrow\rangle_z^A |\uparrow\rangle_z^E + b |\downarrow\rangle_z^S |\downarrow\rangle_z^A |\downarrow\rangle_z^E$$

- Rechnen ergibt:

$$|\psi_f\rangle \neq |\uparrow\rangle_x^S |\uparrow\rangle_x^A |\uparrow\rangle_x^E + |\downarrow\rangle_x^S |\downarrow\rangle_x^A |\downarrow\rangle_x^E$$

→ Basis des Zeigersystems ist ausgezeichnet!

- Problem: **Zeitliche Stabilität** nicht gegeben.

13

Zeitliche Stabilisierung

- Ankopplung von k Systemen:

$$\begin{aligned} |\Phi_0\rangle &= |\phi_f\rangle \otimes_{k=1}^n |\uparrow\rangle_x^{E_k} \\ H^{AE} &= \sum_k H_k^{AE} \\ H_k^{AE} &= g_k \mathbb{1}_S \otimes \sigma_z^A \otimes \sigma_y^{E_k} \otimes \mathbb{1}_j \end{aligned}$$

- Zeitentwicklung von Φ_0

$$\begin{aligned} |\Phi(t)\rangle &= a |\uparrow\rangle_z^S |\uparrow\rangle_z^A \prod_{k=1}^N \underbrace{\{\sin(\frac{\pi}{4} + g_k t) |\uparrow\rangle_z^{E_k} + \cos(\frac{\pi}{4} + g_k t) |\downarrow\rangle_z^{E_k}\}}_{:=|E_1\rangle} \\ &+ b |\downarrow\rangle_z^S |\downarrow\rangle_z^A \prod_{k=1}^N \underbrace{\{\sin(\frac{\pi}{4} - g_k t) |\uparrow\rangle_z^{E_k} + \cos(\frac{\pi}{4} - g_k t) |\downarrow\rangle_z^{E_k}\}}_{:=|E_2\rangle} \end{aligned}$$

- Auf S und A reduzierte Dichtematrix

$$\begin{aligned} \rho^{SA}(t) &= \text{Sp}_{1,1} |\Phi(t)\rangle \langle \Phi_t| \\ &= |a|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| + |b|^2 |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \\ &+ z(t) a b^* |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \otimes |\uparrow\rangle \langle \downarrow| \\ &+ z^*(t) a^* b |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \otimes |\downarrow\rangle \langle \uparrow| \end{aligned}$$

14

- Faktor $z(t)$ in den Außerdiagonalelementen:

$$\begin{aligned} z(t) &= \langle E_1 | E_2 \rangle = \prod_{k=1}^N \cos(2g_k t) \\ \langle z(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t) dt = 0 \end{aligned}$$

- Unter Berücksichtigung beliebiger Anfangszustände in den E^k erhält man:

$$\langle |z(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |z(t)|^2 dt = 0$$

- Wir erhalten Dekohärenz in einer ausgezeichneten Basis

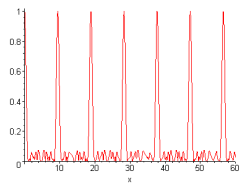
→ wir erhalten ein klassisches Gemisch

- Aber **kein** Kollaps in einen bestimmten Zustand.

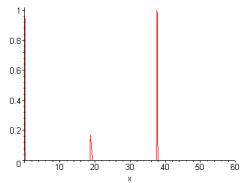
15

Collapse and Revival

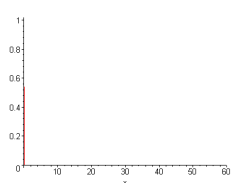
- Ankoppeln von 5 Systemen:



- Ankoppeln von 15 Systemen:



- Ankoppeln von 50 Systemen:



16

Zusammenfassung

- Makroskopische Objekte koppeln an die Umwelt, daher werden Superpositionen schnell zerstört.
- Dekohärenz durch Streuung (Lokalisierung):
Geschwindigkeit der Dekohärenz abhängig vom Abstand der Zustände
- Ankopplung an „kleine“ Umwelt führt zu Collapse and Revival
- Nach wie vor ist das Problem des „Kollapses“ der Wellenfunktion ungelöst