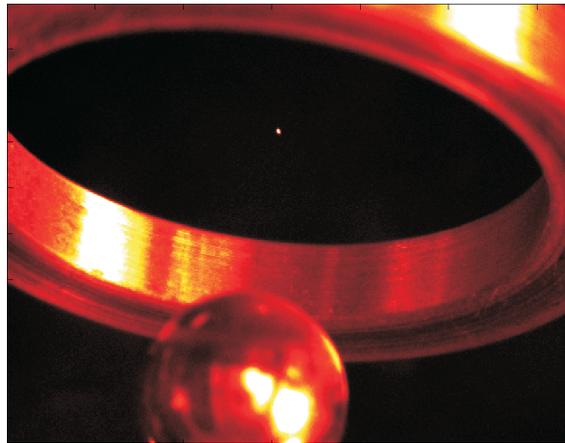


Nanoteilchen in einer Paulfalle - ein System für Chaosexperimente

Staatsexamensarbeit



Universität Konstanz
Fachbereich Physik
Lehrstuhl Prof. Dr. P. Leiderer

vorgelegt von

Michael Albiez

Konstanz, Januar 2002

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	3
2	Die Paulfalle	7
2.1	Exakte Lösung der Mathieu-Gleichung	10
2.1.1	Stabilitätsdiagramm	11
2.1.2	Einfluß der Luftreibung	14
2.2	Näherungslösung und effektives Potential	15
2.3	Bestimmung der spezifischen Ladung Q/M	18
3	Erzeugung der geladenen Tröpfchen	21
3.1	Rayleigh-Limit und Coulomb-Explosionen	22
3.2	Verschiedene Modi der Tröpfchenerzeugung	23
3.3	Überführung der Tropfen ins Vakuum	24
4	Deterministisches Chaos in der klassischen Mechanik	27
4.1	Der δ -kicked rotor im harmonischen Potential	28
4.1.1	Das stochastische Netz	29
4.1.2	Abschätzung der benötigten Laserleistung	32
5	Experimenteller Aufbau und Durchführung	33
5.1	Paulfalle	35
5.2	Elektrospray	38
5.3	Abbildung der Teilchen	39
5.4	Lasersystem	41
5.5	Steuerung des Experiments	43
6	Experimentelle Ergebnisse	45
6.1	Aufladung und Fangen von Teilchen	45
6.2	Wechselwirkung der Teilchen mit der stehenden Lichtwelle	46
6.3	Coulomb-Kristalle	51
7	Zusammenfassung und Ausblick	55
	Literaturverzeichnis	57

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Die Speicherung einzelner Teilchen hat in der Atom- und Elementarteilchenphysik die Beantwortung vieler grundlegender Fragen ermöglicht. Eine Methode um geladene Teilchen zu fangen wurde bereits 1953 von Wolfgang Paul und Helmut Steinwedel vorgeschlagen (Pau53). Die erste Paulfalle wurde 1955 für einzelne Ionen realisiert (Pau55). Hierbei wurden die Ionen in einem effektiv harmonischen Potential, das von einer an vier parabolisch geformten linearen Elektroden angelegten Wechselfeldspannung erzeugt wird, gefangen¹. Für seine Arbeit und insbesondere für die Anwendung der Paulfalle in der hochpräzisen Atomspektroskopie und zur Realisierung von Frequenzstandards wurde Wolfgang Paul zusammen mit Hans Dehmelt und Norman Ramsey im Jahr 1989 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Seither wurden Paulfallen in zahlreichen Experimenten verwendet und sind vor allem durch den Einsatz in Quadrupolmassenspektrometern sehr bekannt geworden (Mar90). Sie erlauben es, Experimente mit einzelnen geladenen Teilchen unter idealen Umständen durchzuführen.

Wuerker *et al.* berichteten in (Wue59) erstmals von der dreidimensionalen Speicherung geladener makroskopischer Metallpartikel mit einem Durchmesser von ungefähr 10 Mikrometern und zeigten somit, dass Paulfallen für Teilchen mit verschiedensten Größen eingesetzt werden können. Seither wurden Paulfallen benutzt, um Brechungsindex (Bla70), Ionisationspotential (Arn85), Größe (Dav80), Masse (Ill00), IR-Absorption (Arn84), und Fluoreszenzspektren (Arn86) von einzelnen makroskopischen Teilchen zu messen.

Gerade in den letzten Jahren stehen im Kontext der zur Zeit heiß diskutierten Quantencomputer lineare Paulfallen im Zentrum des Interesses. Hierbei werden bis zu 10 Ionen in der Falle gefangen. Aufgrund der Coulombwechselwirkung ordnen sich die Ionen in einem linearen sogenannten Coulombkristall mit Abständen von einigen Mikrometern an. Mit Hilfe der Laserkühlung (Seitenbandkühlung) werden die Ionen in den Grundzustand gekühlt und sind mit Lasern einzeln adressierbar. Die für den Quantencomputer wichtige Kopplung erfolgt über die Anregung von kollektiven Schwingungen. In einem solchen Aufbau konnten kürzlich die ersten q-Bit-Manipulationen durchgeführt werden (Mon95).

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Paulfalle zur Untersuchung von klassischem deterministischem Chaos aufgebaut. Mit Hilfe eines Elektrosprays werden Kolloide ionisiert und in der Falle gefangen, was aufgrund der Verfügbarkeit verschiedenster Größen von kolloidalen Teilchen ein skalierbares System garantiert.

Zur Untersuchung von Chaos wurde ein sogenannter δ -kicked rotor realisiert, der

¹Neben den rein elektrischen Fallen wurden auch elektromagnetische, sogenannte Penningfallen, realisiert. Dabei werden anstatt des elektrischen Wechselfeldes statische elektrische Felder und Magnetfelder verwendet, um die Teilchen in allen drei Raumrichtungen zu stabilisieren.

eines der einfachsten Modellsysteme sowohl für klassisches Chaos als auch für Quantenchaos darstellt. Hierzu wird ein in der Paulfalle gefangenes Kolloidteilchen² einer Folge von kurzen Pulsen einer stehenden Lichtwelle ausgesetzt. Während den Pulsen wird analog zur optischen Pinzette im Kolloid ein Dipolmoment induziert, das mit dem elektrischen Feld in der Stehwelle in Abhängigkeit von der Anfangsposition des Teilchens wechselwirkt. Die auf das Teilchen übertragene kinetische Energie wird nach den Pulsen gemessen.

Das System des δ -kicked rotor ist vor allem deshalb interessant, weil es sich im klassischen und im quantenmechanischen Fall völlig unterschiedlich verhält. Ein quantenmechanischer δ -kicked rotor wurde erstmals von Moore *et al.* mit lasergekühlten Natriumatomen realisiert (Moo95). Die Ergebnisse aus dieser Arbeit sind in Abbildung 1.1 gezeigt. Im klassischen Fall wurde die durchgezogene Linie für die auf die Atome übertragene kinetische Energie als Funktion der Anzahl der Stehwellenpulse berechnet. Die eingezeichneten Punkte sind die experimentellen Werte. Es ist ersichtlich, dass im Gegensatz zum linearen Anstieg der kinetischen Energie für klassische Systeme hier eine Sättigung eintritt, was oft als dynamische Lokalisierung bezeichnet wird.

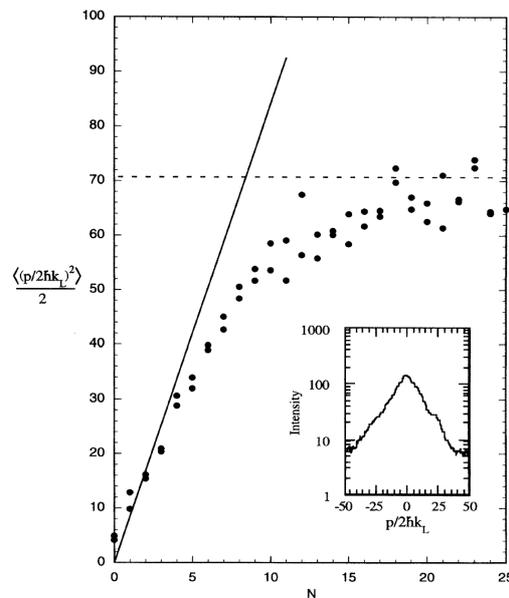


Abbildung 1.1: Die in einem quantenmechanischen δ -kicked rotor übertragene kinetische Energie als Funktion der Anzahl der Stehwellenpulse (aus (Moo95)). Die Punkte sind experimentelle Ergebnisse. Die gestrichelte Linie gibt den theoretisch berechneten Sättigungswert an. Die durchgezogene Linie zeigt den berechneten klassischen, linear mit der Zeit ansteigenden Energieübertrag. Im kleinen Bild ist die lokalisierte Impulsverteilung nach den Pulsen zu sehen.

Mit einer Paulfalle, in der sowohl makroskopische Teilchen als auch kleine Cluster von Atomen gefangen werden können, sollte es möglich sein, bei Verkleinerung der gefangenen Teilchen den Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik experimentell zu beobachten. Dies ist ein Fernziel des während dieser Arbeit aufgebauten Experiments.

²Für die Chaos-Experimente werden Goldkolloide mit einem Durchmesser von 100 nm verwendet.

Es stellt sich die Frage, ob die elektrodynamische Stabilisierung von Teilchen und deterministisches Chaos als Themen in der Schule behandelt werden können. Nach der TIMMS-Studie³, die in den letzten Jahren in 24 Ländern durchgeführt wurde, wurden Verbesserungsvorschläge für den Physikunterricht entwickelt (Bau98). Hierbei wird insbesondere auf die Durchführung von selbstgeplanten Schülerexperimenten Wert gelegt. Die Realisierung einer Paulfalle für makroskopische Teilchen wäre als Praktikumsversuch sicherlich geeignet, da die Funktionsweise der Paulfalle sehr anschaulich mit Hilfe des mechanischen Analogons eines rotierenden Sattels verdeutlicht werden kann und somit die mathematische Beschreibung nicht im Vordergrund stehen muss (Rue94). Der Aufbau einer sehr einfachen Falle kann unter Anleitung mit Mitteln, die in jeder Schule vorhanden sind, in wenigen Schulstunden realisiert werden. Anhand der Paulfalle können die Coulombkraft und das Coulombpotential, sowie das Konzept des elektrischen Feldes veranschaulicht werden. Außerdem liefert die Tatsache, dass auch einzelne Ionen in Paulfangen gefangen und beobachtet werden können, eine Motivation für die Atomphysik und die Quantenmechanik und liefert Einblicke in die aktuelle Forschung.

Seit die nichtlineare Dynamik auch populärwissenschaftlich eine immense Bedeutung erlangt hat und ein breites Interesse der Öffentlichkeit vorhanden ist, wird über die Aufnahme des Gebiets des deterministischen Chaos in den Physikunterricht viel diskutiert (Sch94). Bisher wurde den Schülern in der Schule ein Bild der Physik vermittelt, das durch absolute Berechenbarkeit bestimmt ist, obwohl ihnen im täglichen Leben zahlreiche Beispiele für chaotische Systeme begegnen (zum Beispiel ein auf der Spitze stehender Bleistift). In den derzeitigen Lehrplänen findet sich noch keine entsprechende Einheit, aber es gibt Lehrplänenwürfe, die das Thema berücksichtigen. Ein solcher Entwurf wurde 1996 vom Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung in Rheinland-Pfalz veröffentlicht (Min96). Er beinhaltet zum Thema Chaos und Fraktale im Grundkurs Physik den in Tabelle 1.1 gezeigten Wahlpflichtbaustein mit neun Unterrichtsstunden.

Chaos und Fraktale		9
<ul style="list-style-type: none"> - Beispiele von Chaosphänomenen und fraktalen Strukturen - Merkmale und Systembedingungen (Bifurkation, Nichtlinearität, Sensitivität, Strukturen im Chaos) chaotischer Systeme - strukturelle Ähnlichkeiten in verschiedenen Bereichen. 	<ul style="list-style-type: none"> · einen kontrastiven Einblick in Phänomene und in den transdisziplinären Charakter der Thematik anstreben. · Auf eine dem Grundfach unangemessene Formalisierung verzichten. Die Generierung chaotischer Systeme anhand der logistischen Gleichung demonstrieren. Fächerübergreifende Bezüge der Thematik nutzen. 	

Tabelle 1.1: Im Lehrplänenwurf (Min96) für das Land Rheinland-Pfalz vorgesehener Wahlpflichtbaustein zum Thema "Chaos und Fraktale" im Grundkurs Physik. Er soll neun Schulstunden umfassen.

³Third International Mathematics and Science Study.

Kapitel 1 Einleitung und Motivation

Im Leistungskurs Physik sind zehn Unterrichtsstunden vorgesehen :

Nichtlineare dynamische Systeme		10
<ul style="list-style-type: none">- Beispiele nichtlinearer dynamischer Systeme; Chaosphänomene- Merkmale und Systembedingungen, Beschreibung chaotischer Phänomene- Strukturen im Chaos; Sensitivität	<ul style="list-style-type: none">· Einen Überblick mit einem vertiefteren Einblick anhand exemplarischer Beispiele anstreben.· Beim innerphysikalischen Zugang über Schwingungen die Differentialgleichungen mit Rechnern bearbeiten. Ein fächerübergreifender Zugang über allgemeine chaotische Systeme führt vorzugsweise zu einer diskreten Darstellung mittels Differentialgleichungen	

Tabelle 1.2: Im Leistungskurs Physik soll die in (Min96) dargestellte Unterrichtseinheit zum Thema "Nichtlineare dynamische Systeme" zehn Stunden umfassen.

2 Die Paulfalle

Um Teilchen elastisch an einem Punkt im Raum zu fangen benötigt man eine rücktreibende Kraft, die im einfachsten Fall proportional zum Abstand von diesem Punkt ist. Dies erreicht man durch ein parabolisches Potential, in dem sich die Teilchen bewegen:

$$\Phi(x, y, z) \propto a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 \quad (2.1)$$

Um ein geladenes Teilchen in einem elektrostatischen Feld zu speichern müsste es sich in der Fallenmitte in einem Potentialminimum befinden. Es müssten also folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\nabla\Phi(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad \Delta\Phi(x, y, z) > 0 \quad (2.2)$$

Die Laplace-Gleichung fordert im Widerspruch dazu $\Delta\Phi = 0$. Es kann folglich in einem zeitlich konstanten elektrischen Feld keine Falle realisiert werden. Die Idee zur elektrischen Speicherung ist nun, das Teilchen in ein die Laplacegleichung erfüllendes zeitabhängiges Potential zu bringen, so dass es dynamisch in der Fallenmitte stabilisiert wird. Im zeitlichen Mittel sieht das Teilchen ein sogenanntes Pseudopotential der Form Gleichung 2.1 (siehe Kapitel 2.2) und kann somit gefangen werden.

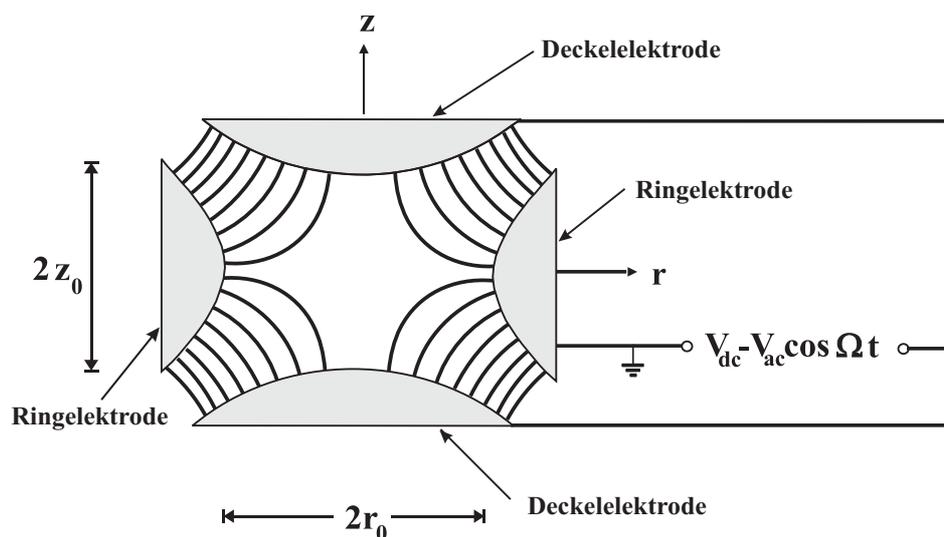


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau einer Paulfalle mit eingezeichneten elektrischen Feldlinien. Die Elektroden haben parabolische Form und werden so angeordnet, dass $r_0^2 = 2z_0^2$ gilt.

Kapitel 2 Die Paulfalle

Die Paulfalle besteht aus einer parabolisch geformten Ringelektrode mit Innenradius r_0 und zwei ebenfalls parabolischen Deckelektroden, die im Abstand $2z_0$ angebracht sind. Die Form der Ringelektrode wird durch $r^2 = r_0^2 + 2z^2$ und die der Deckelektroden durch $z^2 = z_0^2 + r^2/2$ beschrieben. Die Falle ist also axialsymmetrisch im Bezug auf die z -Achse (siehe Abbildung 2.1). Die Ringelektrode wird geerdet und zwischen Ring- und Deckelektroden wird eine Spannung

$$V = V_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cdot \cos \Omega t \quad (2.3)$$

angelegt, wobei die Deckelektroden auf gleichem Potential liegen. Die Frequenz Ω der angelegten Wechselspannung wird im Folgenden als Antriebsfrequenz bezeichnet. Wählt man $r_0^2 = 2z_0^2$, so liefert diese Elektrodenanordnung im Innern der Falle folgendes Potential:

$$\Phi(z, r, t) = \frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cdot \cos \Omega t}{4z_0^2} [2z^2 + (r_0^2 - r^2)] \quad \text{mit} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.4)$$

Dieses Potential erfüllt nun $\Delta \Phi(z, r, t) = 0$ und hat auf den Elektroden konstante Werte: schreibt man $\Phi(z, r, t) = \Phi_0 / r_0^2 [2z^2 + (r_0^2 - r^2)]$, so erhält man auf der Ringelektrode $\Phi_{\text{ring}} = \Phi_0$ und auf den Deckelektroden $\Phi_{\text{endcap}} = \Phi_0 \cdot 2r_0^2$. Das Potential in der Falle sieht zu verschiedenen Zeiten wie folgt aus:

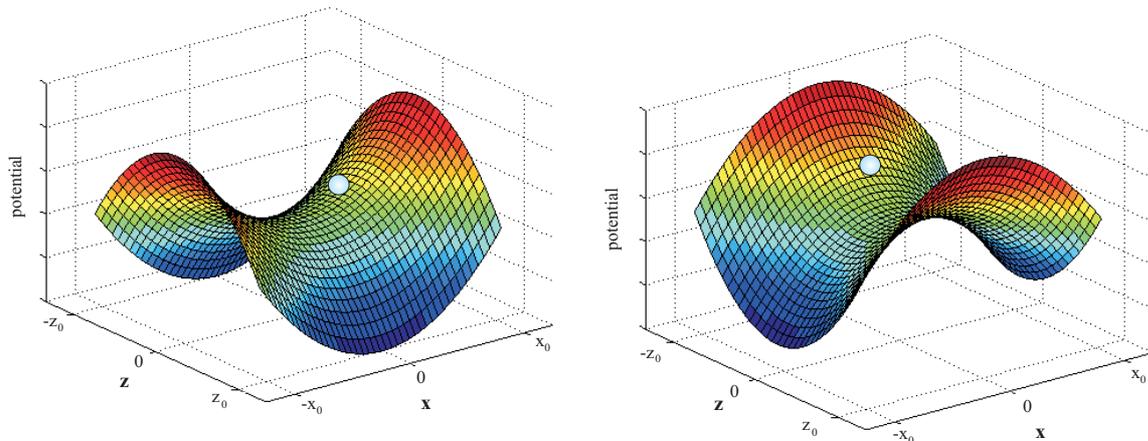


Abbildung 2.2: Potential in der Paulfalle für verschiedene Zeiten. Links für $t = t_0$ und rechts für $t = t_0 + \frac{T}{2}$. Durch die zeitlich periodische Änderung des Potentials kann eine dynamische Stabilisierung der geladenen Teilchen in der Paulfalle erreicht werden.

Die dynamische Stabilisierung in der Falle kann durch eine mechanische Analogie verstanden werden. Eine Kugel, die sich auf dem Sattel in Abbildung 2.2 befindet wird zunächst nach unten rollen. Wenn der Sattel mit einer geeigneten von der Masse der Kugel und den Potentialparametern abhängenden Frequenz hin und her geschaltet wird, wird die Bewegung der Kugel stabil. Die geladenen Teilchen in der Paulfalle werden also für geeignete Antriebsfrequenzen gefangen, weil sie im zeitlichen Mittel ein geeignetes Pseudopotential sehen (siehe Kapitel 2.2).

Aus Gleichung 2.4 erhält man das elektrische Feld

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = \frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cdot \cos \Omega t}{2z_0^2} (-2z\hat{\mathbf{z}} + x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}) \quad (2.5)$$

und damit folgende Differentialgleichungen für die Bewegung des Teilchens:

$$\ddot{z} + \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cdot \cos \Omega t}{z_0^2} z = 0 \quad (2.6)$$

$$\ddot{x} - \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cdot \cos \Omega t}{r_0^2} x = 0 \quad (2.7)$$

$$\ddot{y} - \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{dc}} - V_{\text{ac}} \cdot \cos \Omega t}{r_0^2} y = 0 \quad (2.8)$$

wobei Q die Ladung und M die Masse des Teilchens bezeichnen.

Hieraus wird ersichtlich, dass im statischen Fall $V_{\text{ac}} = 0$ das Teilchen nicht gefangen werden kann: für $\frac{Q}{M} \frac{V_{\text{dc}}}{z_0^2} > 0$ ist in z -Richtung eine harmonische Schwingung Lösung der Differentialgleichung, in x - und y -Richtung jedoch exponentiell steigende Auslenkungen. Das Potential wirkt also zu jeder Zeit fokussierend in einer Richtung und defokussierend in der anderen.

Mit den Transformationen auf die dimensionslosen Größen

$$\tau = \frac{\Omega t}{2} \quad (2.9)$$

$$a_z = -2a_r = 4 \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{dc}}}{z_0^2 \Omega^2} = 8 \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{dc}}}{r_0^2 \Omega^2} \quad (2.10)$$

$$q_z = -2q_r = 2 \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{ac}}}{z_0^2 \Omega^2} = 4 \frac{Q}{M} \frac{V_{\text{ac}}}{r_0^2 \Omega^2} \quad (2.11)$$

erhält man für $u \in \{z, r\}$ die **Mathieusche Differentialgleichung**¹:

$$\partial_\tau^2 u + \{a_u - 2q_u \cos(2\tau)\} u = 0 \quad (2.12)$$

Hierbei beschreiben a_r und q_r die Bewegung in der $x - y$ -Ebene und a_z und q_z in z -Richtung.

Es handelt sich um eine lineare Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten. Wichtig dabei ist, dass die Differentialgleichung nicht für alle Werte von a_u und q_u beschränkte Lösungen hat. Deshalb können nur für gewisse Kombinationen dieser beiden Parameter, die nur von Antriebsfrequenz und den Fallenspannungen, sowie der spezifischen Ladung Q/M der Teilchen abhängen, stabil über längere Zeit gefangen werden. Im folgenden Abschnitt werden diese Stabilitätsbereiche genauer untersucht.

¹Es wird anstelle von $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ die Kurznotation ∂_τ^2 verwendet.

2.1 Exakte Lösung der Mathieu-Gleichung

Die exakte Lösung der Mathieschen Differentialgleichung ist als Überlagerung zweier linear unabhängiger Lösungen darstellbar (Lac74):

$$u(\tau) = A e^{i\mu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n,u} e^{2in\tau} + B e^{-i\mu\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n,u} e^{-2in\tau} \quad (2.13)$$

Die Anfangsbedingungen gehen in die Integrationskonstanten A und B ein und die nur von a_u und q_u abhängigen Entwicklungskonstanten $C_{2n,u}$ ergeben sich aus einem Potenzreihenansatz und der zugehörigen Rekursion (Daw76). Dabei gilt

$$C_{2n,u} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad |n| \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Über Stabilität oder Instabilität der resultierenden Bahnen entscheidet ausschließlich der **charakteristische Exponent** μ_u , der ebenfalls nur von a_u und q_u , nicht aber von den Anfangsbedingungen abhängt. Dabei bedeutet stabil, dass die Lösung $u(\tau)$ für alle Zeiten τ kleiner als eine vorgegebene Schranke, die kleiner ist als der Fallendurchmesser, bleibt. Für Werte μ_u mit einem nicht verschwindenden Imaginärteil und $A \neq 0$, $B \neq 0$ zeigt Gleichung 2.13, dass

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} u(\tau) = \pm\infty \quad (2.15)$$

gilt. Im Gegensatz dazu sind Lösungen mit reellem $\mu_u := b_u$ stabil und somit physikalisch interessant. Mit μ_u hängt natürlich auch b_u nur von a_u und q_u ab und ergibt sich mittels Koeffizientenvergleich aus den Entwicklungskoeffizienten. Für $q_u < 1$ gilt

$$b_u \approx \left[a_u - \frac{(a_u - 1)q_u^2}{2(a_u - 1)^2 - q_u^2} - \frac{(5a_u + 7)q_u^4}{32(a_u - 1)^3(a_u - 4)} - \frac{(9a_u^2 + 58a_u + 29)q_u^6}{64(a_u - 1)^5(a_u - 4)(a_u - 9)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.16)$$

Für $a_u, q_u \ll 1$ genügt die sogenannte Dehmelt-Näherung, benannt nach Hans Dehmelt, der 1989 zusammen mit Wolfgang Paul und Norman Ramsey den Nobelpreis in Physik erhielt:

$$b_u \approx \left(a_u + \frac{q_u^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.17)$$

Im stabilen Fall ergibt sich aus der allgemeinen Lösung 2.13

$$u(\tau) = A \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n,u} \cos[(2n + b_u)\tau] + B \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n,u} \sin[(2n + b_u)\tau] \quad (2.18)$$

und daraus

$$u(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{2n,u} \cos[(2n + b_u)\tau + \phi_n] \quad (2.19)$$

mit Phasenverschiebungen ϕ_n . Der Übergang von der normierten Zeit τ zur realen Zeit t (siehe Gleichung 2.9) führt zu

$$u(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{2n,u} \cos \left[\frac{(2n + b_u)}{2} \Omega t + \phi_n \right] \quad (2.20)$$

Hieraus kann das das Frequenzspektrum der Bewegungen des Teilchens in der Falle abgelesen werden:

$$\omega_{u,n} = \left(n + \frac{1}{2} b_u \right) \Omega, \quad 0 \leq n < \infty \quad (2.21)$$

$$\omega_{u,n} = - \left(n + \frac{1}{2} b_u \right) \Omega, \quad -\infty < n < 0 \quad (2.22)$$

Die allgemeine Lösung besteht im Frequenzraum also nur aus Summenfrequenzen der **Säkularfrequenz** $\omega_{u,0} = b_u \cdot \frac{\Omega}{2}$ und ganzzahligen Vielfachen der **Antriebsfrequenz** Ω . Insbesondere tritt auch die Säkularfrequenz als kleinste mögliche Frequenz selbst auf, was im Abschnitt 2.2 noch genauer betrachtet wird. Die Antriebsfrequenz kommt hingegen im Frequenzspektrum der Lösungen nicht vor. Im Falle $a_u, q_u \ll 1$ ist nach Gleichung 2.17 auch $b_u \ll 1$. Damit ist die Säkularfrequenz wesentlich kleiner als die Antriebsfrequenz Ω . Deshalb sieht man über eine Zeit länger als die Fallenperiode gemittelt nur diese Säkularbewegung.

2.1.1 Stabilitätsdiagramm

Im weiteren sei μ_u reell, die Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung sind also periodisch. Es muß zwischen zwei Arten von Lösungen unterschieden werden. Die mit einer Periode $2\pi/m$ (mit ganzzahligem m) werden als Lösungen von ganzer Ordnung und solche mit nichtganzzahligem m als Lösungen von gebrochener Ordnung bezeichnet. Erstere entsprechen nach Gleichung 2.19 solchen Lösungen mit ganzzahligem μ_u . Da μ_u von a_u und q_u abhängt kann für jedes m mit $\mu_u = m$ für gegebenes q_u ein sogenannter charakteristischer Wert von a_u berechnet werden. Damit wird also für festes m der charakteristische Wert von a_u eine Funktion von q_u . Es wird in der Theorie der Mathieuschen Differentialgleichungen (siehe (Lac74), Kapitel 2 und 3 oder (Mei54)) gezeigt, dass genau diese charakteristischen Kurven in einem $a - q$ -Diagramm die Stabilitätsbereiche begrenzen.

Gesucht sind also Lösungen mit Periode $2\pi/m$. Es muss für jedes m zwischen zwei Fällen unterschieden werden, je nachdem ob die Lösung eine gerade oder ungerade Funktion sein soll. Entsprechend erhält man für jedes m zwei unterschiedliche charakteristische Werte für a_u .

Es sei mit $c_m(q_u, u)$ die gerade Lösung mit Periode $2\pi/m$ bezeichnet und mit $a_{m,u}$ die zugehörigen charakteristischen Werte für a_u als Funktion von q_u , die dafür sorgen, dass $c_m(q_u, u)$ Lösung der Differentialgleichung ist. Ebenso $s_m(q_u, u)$ für die ungerade Lösung und $b_{m,u}$ für die entsprechenden charakteristischen Werte von a_u . Zunächst wird die Differentialgleichung 2.12 für den Fall $q_u = 0$ betrachtet:

$$\partial_\tau^2 u + a_u u = 0 \quad (2.23)$$

Kapitel 2 Die Paulfalle

Damit diese eine Lösung mit Periode $2\pi/m$ hat, muß $a_u = m^2$ gesetzt werden. Die zwei Lösungen sind dann $\cos(m\tau)$ und $\sin(m\tau)$. Für $q_u \neq 0$ entwickelt man $a_{m,u}$ (falls die gerade Funktion gesucht wird) bzw $b_{m,u}$ (für die ungerade Funktion) in Potenzen von q_u :

$$a_{m,u} = m^2 + \alpha_1 q_u + \alpha_2 q_u^2 + \alpha_3 q_u^3 + \dots \quad (2.24)$$

Dabei muss der konstante Term m^2 gesetzt werden, um den Spezialfall $q = 0$ von oben zu erfüllen. Außerdem macht man für die gesuchte $2\pi/m$ -periodische Funktion den Ansatz

$$s_{m,u}(q_u, u) = \cos m\tau + q_u c_1(\tau) + q_u^2 c_2(\tau) + q_u^3 c_3(\tau) + \dots \quad (2.25)$$

Nun werden $a_{m,u}$ und $s_{m,u}(q_u, u)$ in die Mathieusche Differentialgleichung eingesetzt. Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Funktionen q_u^j kann die Summe der Koeffizienten zu festem j Null gesetzt werden. Damit ergeben sich iterativ insbesondere die gesuchten Werte für die α_j .

Die ersten charakteristischen Werte für a_u unter Beachtung von $a_r = -a_z/2$ und $q_r = -a_z/2$ sind (Lac74):

$$\begin{aligned} a_{0,u} &= -\frac{1}{2}q_u^2 + \frac{7}{128}q_u^4 - \frac{29}{2304}q_u^6 + \mathcal{O}(q_u^8) \\ b_{1,u} &= 1 - q_u - \frac{1}{8}q_u^2 + \frac{1}{64}q_u^3 - \frac{1}{1536}q_u^4 - \frac{11}{36864}q_u^5 + \frac{49}{589824}q_u^6 + \mathcal{O}(q_u^7) \\ a_{1,u} &= 1 + q_u - \frac{1}{8}q_u^2 - \frac{1}{64}q_u^3 - \frac{1}{1536}q_u^4 + \frac{11}{36864}q_u^5 + \frac{49}{589824}q_u^6 + \mathcal{O}(q_u^7) \\ b_{2,u} &= 4 - \frac{1}{12}q_u^2 + \frac{5}{13824}q_u^4 - \frac{289}{79626240}q_u^6 + \mathcal{O}(q_u^8) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Es kann gezeigt werden, dass genau für $a_{m,u} \leq a_u \leq b_{m,u}$ die Lösungen der Differentialgleichung stabil sind (Str67). Damit ergibt sich das in Abbildung 2.3 gezeigte erste Stabilitätsdiagramm (gegeben durch $a_{0,r}$, $b_{1,r}$, $a_{0,z}$ und $b_{1,z}$).

Um ein geladenes Teilchen in der Paulfalle fangen zu können müssen sowohl die Radialbewegung als auch die Axialbewegung stabil sein. Im Experiment ist es also nötig, geeignete Kombinationen der Fallenparameter und der spezifischen Ladung Q/M des Teilchens zu wählen, um die Falle in diesem ersten Stabilitätsbereich (in der Literatur meist als Stabilitätsbereich A bezeichnet) zu betreiben. Bei unserer Falle wird $V_{dc} = 0$ und damit auch $a = 0$ gewählt. Aus Abbildung 2.3 geht hervor, dass in diesem Fall $q_r < 0.908$ gelten muß. Löst man dies mit der Definition von q_r nach der spezifischen Ladung Q/M auf, so ergibt sich:

$$\frac{Q}{M} < \frac{0.908}{2} \frac{z_0^2}{V_{ac}} \Omega^2 \quad (2.27)$$

Für makroskopische Teilchen ist Q/M um Größenordnungen kleiner als für einzelne Ionen, die zum Beispiel in linearen Ionenfallen als eine mögliche Realisierung des Quantencomputers gefangen werden. Deshalb können hier niedrige Antriebsfrequenzen von ca. 200-2000 Hz gewählt werden, wohingegen bei Ionenfallen Radiofrequenzen verwendet werden müssen (Wer85).

Für Werte $q_u > 1$ genügen die charakteristischen Werte aus Gleichung 2.26 nicht, da hier noch wesentlich höhere Ordnungen von q berücksichtigt werden müssten. In

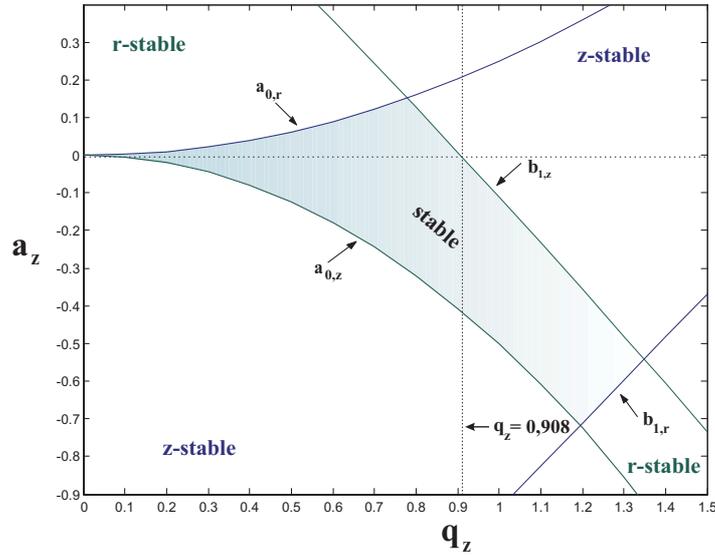


Abbildung 2.3: Erster Mathieu-Stabilitätsbereich (in der Literatur oft als Bereich A bezeichnet) für das dreidimensionale Quadrupolfeld. Im markierten Bereich sind die Bewegungen des Teilchens sowohl in axialer als auch in radialer Richtung stabil.

diesem Fall wird das Stabilitätsdiagramm numerisch mit der Forderung beschränkter Amplituden berechnet. Es ergeben sich weitere in Abbildung 2.4 eingezeichnete stabile Bereiche im a - q -Diagramm.

Die Stabilitätsbereiche mit größerem q und a entsprechen größeren Säkularfrequenzen relativ zur Antriebsfrequenz (siehe Kapitel 2.2). In unserem Experiment sind möglichst kleine Säkularfrequenzen erwünscht, so dass die höheren Stabilitätsbereiche nicht in Frage kommen.

Bemerkenswert ist, dass die Stabilitätsbereiche, die zu charakteristischen Kurven von a_u mit $m > 0$ gehören, die $a_u = 0$ -Achse nicht schneiden. In unserer Falle ist also nur ein Betrieb im Stabilitätsbereich A möglich.

Für die Charakteristischen Werte von a_u gelten allgemein folgende wichtige Aussagen (Fis98):

- $\lim_{q_u \rightarrow \infty} a_{u,m} = b_{u,m+1}$

Für große q_u konvergieren die charakteristischen Werte von a_u für die m -te gerade Funktion also gegen die der $(m+1)$ -ten ungeraden Funktion. Die Stabilitätsbereiche dazwischen werden somit für große q_u verschwindend klein. Deshalb werden nahezu alle Paulfallen in den Stabilitätsbereichen mit kleinem q_u betrieben.

- $\lim_{q_u \rightarrow 0} a_{u,m} = \lim_{q_u \rightarrow 0} b_{u,m} = m^2$

Dies entnimmt man sofort der Herleitung für die charakteristischen Werte, da die Konstante gerade m^2 gesetzt wurde, um den Spezialfall $q_u=0$ zu erfüllen (siehe oben).

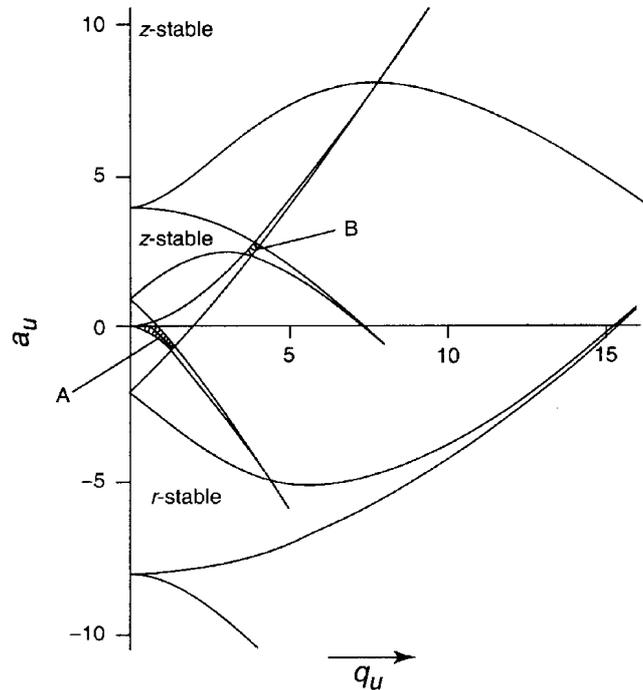


Abbildung 2.4: Stabilitätsdiagramm für Mathiefunktionen. In den markierten Bereichen A und B sind die Bewegungen in der Quadrupolfalle stabil (aus (Mar90)).

2.1.2 Einfluß der Luftreibung

Unter der Annahme einer geschwindigkeitsabhängigen, viskosen Reibung ergibt sich anstatt der Mathieschen Differentialgleichung folgende Differentialgleichung:

$$M\partial_t^2 u(t) + 6\pi\eta R\partial_t u(t) + \frac{4}{\Omega^2} (a_u - 2q_u \cos(\Omega t)) u(t) = 0 \quad (2.28)$$

wobei η die Viskosität des dämpfenden Mediums (z.B. Luft), R den Teilchenradius und M die Masse des Teilchens bezeichnen. Führt man wieder die normierte Zeit $\tau = \frac{\Omega t}{2}$ ein, so ergibt sich

$$\partial_\tau^2 u(\tau) + 2\kappa\partial_\tau u(\tau) + (a_u - 2q_u \cos(\Omega t)) u(\tau) = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{6\pi\eta R}{M\Omega} \propto R^{-2} \quad (2.29)$$

Bemerkenswert ist, dass für Teilchen mit gleicher spezifischer Ladung wegen $\kappa \propto R^{-2}$ der Einfluß der Luftreibung bei kleineren Teilchenradien größer wird. Zur Lösung der Differentialgleichung 2.29 macht man den Ansatz

$$u(\tau) = v(\tau) \cdot e^{-\kappa\tau} \quad (2.30)$$

der in obige Gleichung eingesetzt auf die Differentialgleichung

$$\partial_\tau^2 v(\tau) + (\bar{a}_u - 2q_u \cos(\Omega t)) v(\tau) = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{a}_u = a_u - \kappa^2 \quad (2.31)$$

führt. Die Funktion $v(\tau)$ erfüllt also die Mathiesche Differentialgleichung. Damit ist nach Gleichung 2.13 die allgemeine Lösung mit Reibung gegeben durch

$$u(\tau) = A \cdot e^{(i\bar{\mu}_u - \kappa)\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n,u} e^{2in\tau} + B \cdot e^{(-i\bar{\mu}_u - \kappa)\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n,u} e^{-2in\tau} \quad (2.32)$$

Die Terme $e^{-\kappa\tau}$ sind verantwortlich für die reibungsbedingte Abnahme der Bewegungsamplituden. Bei Anwesenheit von Reibung sind die Stabilitätsbereiche vergrößert. Lösungen mit einem Betrag des Imaginärteils von $\bar{\mu}_u$ kleiner als dem Reibungskoeffizienten κ bleiben stabil.

Das Frequenzspektrum der Bewegungen ändert sich ebenfalls. Bezeichnet man mit \bar{b}_u den Realteil von $\bar{\mu}_u$, erhält man

$$\bar{\omega}_{u,n} = \left(n + \frac{1}{2}\bar{b}_u \right) \Omega, \quad 0 \leq n < \infty \quad (2.33)$$

$$\bar{\omega}_{u,n} = - \left(n + \frac{1}{2}\bar{b}_u \right) \Omega, \quad -\infty < n < 0 \quad (2.34)$$

Für kleine a_u und q_u beträgt mit $\bar{b}_u \approx \sqrt{\bar{a}_u + \frac{q_u^2}{2}}$ die Säkularfrequenz

$$\bar{\omega}_{u,0} = \sqrt{\bar{a}_u + \frac{q_u^2}{2}} \frac{\Omega}{2} = \sqrt{\omega_{u,0}^2 - \frac{\kappa^2 \Omega^2}{4}} \quad (2.35)$$

wobei mit $\omega_{u,0}$ die Säkularfrequenz bei Abwesenheit von Reibung bezeichnet ist.

In (Wint91) wird die Vergrößerung des Stabilitätsbereichs numerisch untersucht. Schon für $\kappa = 6$ ist die Teilchenbewegung für $q_z < 10$ stabil (ohne Reibung war nach Abbildung 2.3 $q_z < 0.908$ nötig). In unserer Falle wurden vor allem Polystyrenkolloide mit einem Durchmesser von $6.3\mu\text{m}$ und Goldkolloide mit einem Durchmesser von 100 nm gefangen. Bei typischen Fallenparametern (siehe Kapitel 5.1) ergeben sich bei Normaldruck Reibungskonstanten von $\kappa \approx 6$ beziehungsweise $\kappa \approx 300$. Die Stabilitätsbereiche sind also deutlich vergrößert, so dass bei Anwesenheit von Luftreibung die Teilchen wesentlich leichter gefangen werden können.

Die Energieabnahme während einer Periode der Säkularbewegung relativ zur in der Säkularbewegung gespeicherten Energie kann aus Gleichung 2.32 abgelesen werden:

$$\frac{E(t_0 + T_{u,0})}{E(t_0)} = 1 - e^{-\frac{2\pi\Omega}{\omega_{u,0}}} \quad (2.36)$$

Bei unseren Parametern ist der Exponent in Gleichung 2.36 bei Normaldruck mindestens 30, so dass die Bewegung stark gedämpft ist.

2.2 Näherungslösung und effektives Potential

Nach (Lac74) gehen für kleine q_u und a_u die Werte der Entwicklungskoeffizienten $C_{2n,u}$ in Gleichung 2.20 für steigendes $|n|$ sehr schnell gegen Null. Deshalb dominieren im Stabilitätsbereich A die Terme von kleinster Ordnung, das heißt die drei Terme mit $n \in \{-1, 0, 1\}$. Der Koeffizient $C_{0,u}$ ist dabei wesentlich größer als $C_{2,u}$ und es gilt $b_u \ll 2$ für kleine a_u und q_u .

Damit kann nun die Bewegung in einen mit der Antriebsfrequenz der Falle oszillierenden Anteil mit kleiner Amplitude und einen wesentlich langsamer oszillierenden Term mit großer Amplitude separiert werden. Der schnell oszillierende Term wird im Folgenden mit **Mikrobewegung** und der langsam oszillierende mit **Säkularbewegung** bezeichnet. Es kann also folgender Ansatz gemacht werden:

$$u(\tau) = \bar{u}(\tau) + \delta(\tau) \quad (2.37)$$

wobei u wieder für r oder z steht, $\bar{u}(\tau)$ die Säkularbewegung und $\delta(\tau)$ die Mikrobewegung beschreibt. Setzt man diesen Ansatz in die Mathiesche Differentialgleichung

$$\partial_\tau^2 u(\tau) + (a_u - 2q_u \cos(2\tau))u(\tau) = 0 \quad (2.38)$$

ein, so ergibt sich:

$$\partial_\tau^2 (\bar{u}(\tau) + \delta(\tau)) + (a_u - 2q_u \cos(2\tau)) \cdot (\bar{u}(\tau) + \delta(\tau)) = 0 \quad (2.39)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich unter den gemachten Annahmen zu

$$\partial_\tau^2 \delta(\tau) + (a_u - 2q_u \cos(2\tau)) \bar{u}(\tau) = 0 \quad (2.40)$$

Vernachlässigt man den kleinen durch a_u verursachten konstanten Term und beachtet man die relative Konstanz von $\bar{u}(\tau)$, so ergibt sich als Lösung dieser Differentialgleichung:

$$\delta(\tau) = -\frac{q_u \bar{u}}{2} \cos(2\tau) \quad (2.41)$$

Die Mikrobewegung ist also um π gegenüber der antreibenden Wechselspannung phasenverschoben. Außerdem ist ihre Amplitude maximal für eine maximale Auslenkung der Säkularbewegung.

Setzt man Gleichung 2.41 in die Mathiegleichung 2.38 ein, folgt

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 u(\tau) &= \partial_\tau^2 \bar{u}(\tau) + \partial_\tau^2 \delta(\tau) = -(a_u - 2q_u \cos(2\tau)) \cdot (\bar{u}(\tau) + \delta(\tau)) \\ &= \left[-a_u + 2q_u \cos(2\tau) + \frac{q_u a_u}{2} \cos(2\tau) - q_u^2 \cos^2(2\tau) \right] \cdot \bar{u}(\tau) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Mittelung über eine Periode der Mikrobewegung ergibt

$$\partial_\tau^2 \bar{u}(\tau) \approx \langle \partial_\tau^2 \bar{u}(\tau) \rangle_{\text{Mikro}} = - \left(a_u + \frac{q_u^2}{2} \right) \bar{u}(\tau) \quad (2.43)$$

Dies ist nun die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit den Lösungen

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}_0 \cos(\bar{\omega}_u \tau), \quad \text{mit} \quad \bar{\omega}_u = \sqrt{a_u + \frac{q_u^2}{2}} \quad (2.44)$$

Geht man von der normierten Zeit τ zur realen Zeit t über, so ergibt sich

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 \cos(\omega_u t) \quad \text{mit} \quad \omega_u = \sqrt{a_u + \frac{q_u^2}{2}} \cdot \frac{\Omega}{2} \quad (2.45)$$

Ist $a_u = 0$, so ist die Säkularfrequenz in axialer Richtung wegen $q_z = -2q_r$ gerade doppelt so groß wie in radialer Richtung. Aufgrund dieses 2:1-Verhältnisses der Frequenzen

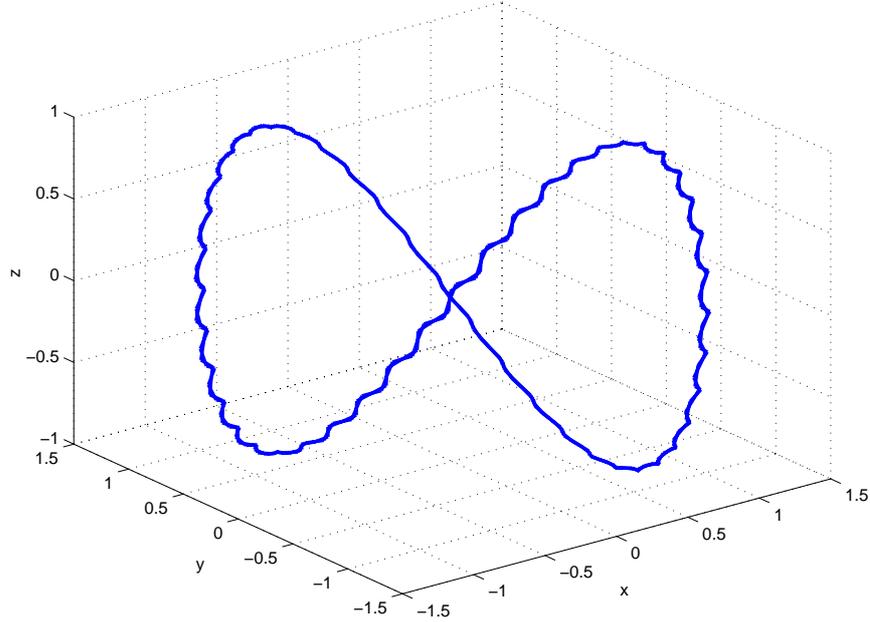


Abbildung 2.5: 2:1 Lissajous-Bewegung eines einzelnen gefangenen Teilchens. Die Säkularbewegung in z -Richtung hat die doppelte Frequenz der Säkularbewegung in x - und y -Richtung. Ihr ist die schnelle Mikrobewegung überlagert.

bewegt sich das gefangene Teilchen auf einer sogenannten 2:1 Lissajous-Figur, der die Mikrobewegung als kleine zusätzliche Bewegung überlagert ist (siehe Abbildung 2.5).

Aus Gleichung 2.45 läßt sich nun auch das effektive Potential oder Pseudopotential Φ_{ps} , das die Teilchen im Zeitmittel sehen, für den Fall $a_u = 0$ ablesen:

$$\Phi_{ps} = \frac{1}{2} \frac{M}{Q} (\omega_z^2 z^2 + \omega_r^2 r^2) = \frac{Q}{M} \frac{V_{ac}^2}{4\Omega^2 r_0^4} (r^2 + 4z^2) \quad (2.46)$$

Dieses Potential erfüllt nun die Bedingungen, um Teilchen stabil zu fangen (Siehe Gleichung 2.1), da in der Fallenmitte ein absolutes Potentialminimum vorliegt.

In (Wue59) wird gezeigt, dass für den Fall $a_r = 0$ und $q_r \leq 0.4$, was in unserer Falle gegeben ist, die näherungsweise berechnete Säkularfrequenz weniger als 1% Abweichung von gemessenen Säkularfrequenzen hat. Für $q_r = 0.6$ stimmen die berechneten und gemessenen Werte immer noch bis auf ungefähr 7% überein.

In Stabilitätsbereichen mit größeren q_u und a_u ist die Näherungslösung nicht mehr gültig, da dann die Entwicklungskoeffizienten für steigende n langsamer gegen Null konvergieren. Es treten dann auch Frequenzanteile höherer Ordnung auf.

Einfluß der Gravitation

Ein Einfluß, der bisher noch außer Acht gelassen wurde, ist die in unserem Aufbau in axialer Richtung wirkende Gravitation. Betrachtet man allgemein eine konstante

in z -Richtung wirkende Kraft F , so lautet die Mathiesche Differentialgleichung in z -Richtung:

$$\partial_\tau^2 z(\tau) + (a_z - 2q_z \cos(2\tau))z(\tau) = A \quad \text{mit} \quad A = \frac{4}{\Omega^2} \frac{F}{M} \quad (2.47)$$

Nun verwendet man wieder den für kleine a_z und q_z gültigen Näherungsansatz

$$z(\tau) = \bar{z}(\tau) + \delta(\tau) \quad \text{mit} \quad \delta(\tau) \ll \bar{z}(\tau) \quad \text{und} \quad \partial_\tau \bar{z}(\tau) \ll \partial_\tau \delta(\tau) \quad (2.48)$$

Damit erhält man durch Einsetzen in Gleichung 2.47

$$\partial_\tau^2 \delta(\tau) + (a_z - 2q_z \cos(2\tau))\bar{z}(\tau) = A \quad (2.49)$$

Wie bei der Herleitung zu Gleichung 2.43 folgt die Differentialgleichung

$$\partial_\tau^2 \bar{z}(\tau) + (a_z + \frac{q_z^2}{2})\bar{z}(\tau) = A \quad (2.50)$$

mit der Lösung

$$\bar{z}(\tau) = \bar{z}_0 \cdot \cos(\bar{\omega}_z \tau) + \frac{A}{\bar{\omega}_z^2} \quad \text{mit} \quad \bar{\omega}_z = \sqrt{a_z + \frac{q_z^2}{2}} \quad (2.51)$$

Die Frequenz der Säkularbewegung in z -Richtung wird also durch die Gravitation nicht beeinflusst (vergleiche Gleichung 2.44). Uniforme äußere Kräfte bewirken also lediglich eine Verschiebung des Mittelpunktes der Teilchenbewegung. Die Verschiebung $A/\bar{\omega}_z^2$ hängt von Größe und Frequenz der Fallenspannung ab und kann für entsprechend kleines $\bar{\omega}_z$ zum Verlust des Teilchens führen.

Mit Hilfe eines zusätzlichen elektrischen Feldes in axialer Richtung kann der Einfluß der Gravitation kompensiert werden. Dazu wird zwischen die Deckelektroden eine zusätzliche Gleichspannung von einigen Volt angelegt, was in der Mitte der Falle ein homogenes elektrisches Feld in z -Richtung bewirkt.

2.3 Bestimmung der spezifischen Ladung Q/M

Neben den Fallenparametern ist die spezifische Ladung Q/M des gefangenen Teilchens für dessen Bewegung in der Falle ausschlaggebend und entscheidet über Stabilität oder Instabilität. Es gibt im Wesentlichen drei verschiedene Möglichkeiten, Q/M zu bestimmen:

- Im Vakuum muß für $V_{ac} = 0$ im ersten Stabilitätsbereich $q_z < 0.908$ gelten (siehe Abschnitt 2.1.1). Damit ergibt sich mit der Definition von q_z :

$$\frac{Q}{M} < \frac{0.908}{2} \frac{z_0^2 \Omega^2}{V_{ac}} \quad (2.52)$$

Um die spezifische Ladung zu messen wird die Amplitude V_{ac} der angelegten Wechselspannung solange reduziert, bis sich nur noch ein Teilchen in der Falle befindet. Bestimmt man nun die kritischen Werte für V_{ac} und Ω , so erhält man die spezifische Ladung. Leider verliert man bei dieser Messung meistens das gefangene Teilchen weswegen diese Methode hier nicht benutzt wird.

2.3 Bestimmung der spezifischen Ladung Q/M

- Durch Anlegen einer zusätzlichen Gleichspannung zwischen den Deckelektroden kann das gefangene Teilchen in axialer Richtung verschoben werden. Aus Gleichung 2.51 ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der resultierenden Verschiebung in z -Richtung Δz und der dazu benötigten Spannungsdifferenz ΔV_z :

$$\frac{Q}{M} = \frac{1}{4} \frac{z_0^3 \Omega^2}{V_{ac}^2} \frac{\Delta V_z}{\Delta z} \quad (2.53)$$

- Die Säkularbewegung in z -Richtung kann durch Anlegen einer zusätzlichen, von der Fallenspannung unabhängigen Wechselspannung zwischen den Deckelektroden beeinflusst werden. Es genügen dafür Amplituden von weniger als 1 V. Die Säkularfrequenz kann bestimmt werden, in dem man beobachtet, wann die Teilchenbewegung in Resonanz mit dem angelegten Signal ist. Eine kleine Differenz zwischen den beiden Frequenzen wirkt sich in einer leicht zu sehenden Schwebungsfrequenz aus, die verschwindet, wenn beide Frequenzen genau gleich sind. Mit Gleichung 2.45 lässt sich die spezifische Ladung aus der Säkularfrequenz in axialer Richtung für kleine a_z und q_z berechnen. Unter den drei angegebenen Methoden ist diese für kleine a_z und q_z bei weitem die exakteste.

Kapitel 2 Die Paulfalle

3 Erzeugung der geladenen Tröpfchen

Um Teilchen in der Paulfalle speichern zu können, müssen sie zunächst elektrisch aufgeladen werden. Hierfür stehen prinzipiell verschiedene Mechanismen wie die Elektronenstoßionisation, die chemische Ionisation und Ionisation durch Reibung zur Verfügung. Wir entschieden uns dafür, die sogenannte Elektrospray-Ionisation (ESI) zu verwenden, mit der erste Experimente in den 30er Jahren von Chapman *et al.* durchgeführt wurden (Cha37). Es können mit dieser Methode alle in einem geeigneten Lösungsmittel gelösten Teilchen ionisiert werden. In unserem Experiment werden monodisperse, in Wasser gelöste Kolloide verwendet, da sie aus verschiedensten Materialien und in sehr vielen verschiedenen Größen hergestellt werden können. Der Durchmesser der meist runden Kolloidpartikel ist dabei bis auf ungefähr 10% Abweichung bekannt. Es wurden Polystyrenlatexkolloide, die in verschiedenen Größen von 280 nm bis 6.3 μm bereits vorhanden waren, und Goldkolloide, die in einer Größe ab 2 nm erhältlich sind, aufgeladen. Die Elektrosprayionisation hat in den letzten 20 Jahren sprunghaft an Bedeutung gewonnen, da sie in Quadrupol- und time-of-flight-Massenspektrometern für einzelne Atome und Moleküle eingesetzt werden kann (siehe zum Beispiel (Håk00)). Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

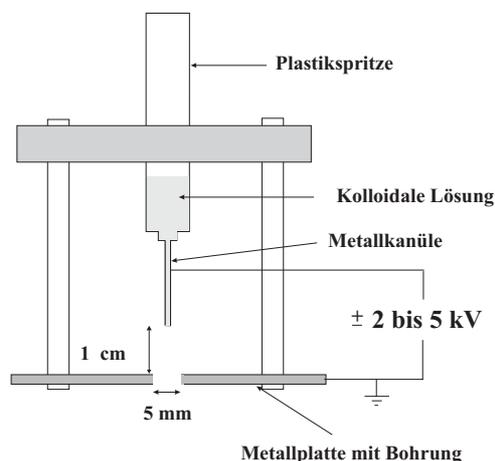


Abbildung 3.1: Aufbau des Elektrosprays für eine kolloidale Lösung. Der Innendurchmesser der Kanüle beträgt 200 μm .

Der Elektrospray besteht aus einer Spritze und einer Einweg-Metallkanüle¹ mit einem Innendurchmesser von 200 μm , die im Abstand von ungefähr 1 cm vor einer geerdeten

¹Die Spitze der Kanüle wird mit einer Feile abgeschliffen.

Metallplatte mit einer Bohrung von 0.5 cm montiert ist. Zwischen der Kanüle und der Metallplatte wird eine Gleichspannung von 2-5 kV angelegt. Dies führt an der Spitze zu einem sehr starken elektrischen Feld von etwa 10^6 V/m. Im Folgenden sei die Kanüle auf positivem Potential. Ab einem Spannungs-Schwellwert, der vom genauen Abstand der Kanüle von der Metallplatte abhängt und nicht immer reproduzierbar ist, entsteht ein Flüssigkeitskonus (oft Taylorkonus genannt), da die Kationen im Lösungsmittel zur negativ geladenen Metallplatte gezogen werden. Diese Trennung der Ionen wird elektrophoretischer Mechanismus genannt (Rul92)².

Es reichern sich an der Flüssigkeitsoberfläche also positive Ladungen an. Ab einer bestimmten Distanz zum Kappillarende erfolgt eine zunehmende Destabilisierung des Taylorkonus, da die Oberflächenspannung durch die elektrostatische Kraft überwunden wird und es werden kleine geladene Tropfen mit positiver Überschussladung³ von bis zu 10^{-5} C und einem Durchmesser von einigen zehn Mikrometern in einem stabilen Spray emittiert. Diese Tropfen können nun die Bohrung in der Metallplatte passieren⁴.

Der große Vorteil dieser Ionisierungsmethode ist, dass sie sehr universell einsetzbar ist. Außerdem kann mit sehr geringen Mengen der zu untersuchenden Proben gearbeitet werden, da im Gegensatz zu anderen Methoden hier bei hinreichend starker Verdünnung der kolloidalen Lösung jedes Teilchen geladen werden kann. Ein Vorteil beim Einsatz in Massenspektrometern ist, dass die Elektrosprayionisierung sehr schonend ist. Auf diese Art und Weise können empfindliche biologische Makromoleküle ionisiert werden, die zum Beispiel bei der Elektronenstoßionisation zerstört würden.

3.1 Rayleigh-Limit und Coulomb-Explosionen

Nachdem die geladenen Tropfen den Taylorkonus verlassen haben, beginnt Lösungsmittel zu verdampfen. Hierdurch steigt die Oberflächenladungsdichte auf den Tropfen, da die Lösungsmittelmoleküle keine Ladungen abtransportieren. Dies kann dadurch erklärt werden, dass ionische Moleküle stärker als neutrale Moleküle gebunden sind, was ihre Austrittsarbeit aus dem Tropfen erhöht. Bereits 1882 hat Lord Rayleigh in (Ray1882) die Stabilität geladener Tropfen untersucht und fand, dass zu stark geladene Tropfen instabil sind. Die kritische Ladung ist erreicht, wenn die Coulombabstoßung die Oberflächenspannung der Tropfen übersteigt. Er berechnete daraus das sogenannte Rayleigh-Kriterium für die maximale Ladung auf einem Tropfen vom Radius r :

$$Q_{\max} = 8\pi\sqrt{\epsilon_0\sigma r^3} \quad (3.1)$$

Dabei ist σ die Oberflächenspannung des Lösungsmittels. Für Wassertropfen mit einem Durchmesser von 50 μm ergibt sich mit $\sigma = 0,073$ N/m eine maximale Ladung $Q_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-12}$ C. Sobald der Tropfen den kritischen Radius erreicht, zerfällt er in sogenannten Coulomb-Explosionen in kleinere, weniger stark geladene Tropfen, die nach weiterem

²In (Keb93) wird gezeigt, dass tatsächlich der elektrophoretische Mechanismus für die Ladung auf den Tropfen verantwortlich ist.

³Die Ladung der Tropfen ist negativ, wenn die Kanüle auf negativem Potential gegenüber der Metallplatte liegt.

⁴Die Emission der positiven Tropfen transportiert ständig positive Ionen aus dem Lösungsmittel ab. Der Elektrospraymechanismus muss also eine elektrochemische Umwandlung von Ionen in Elektronen beinhalten. Dafür ist eine Oxidationsreaktion mit dem Metall der Kapillare verantwortlich, in der negative Ionen in neutrale Moleküle und ein Elektron umgewandelt werden.

3.2 Verschiedene Modi der Tröpfchenerzeugung

Abdampfen des Lösungsmittels wieder explodieren. Am Ende dieses Prozesses ist bei genügend starker Verdünnung der kolloidalen Lösung in jedem Tropfen maximal ein Kolloidteilchen enthalten. Wenn noch das restliche Lösungsmittel verdampft ist, bleiben also einzelne geladene Kolloidpartikel zurück. Die Effektivität dieser sehr einfachen Idee zur Ionisierung wurde in (Dol68) gezeigt.

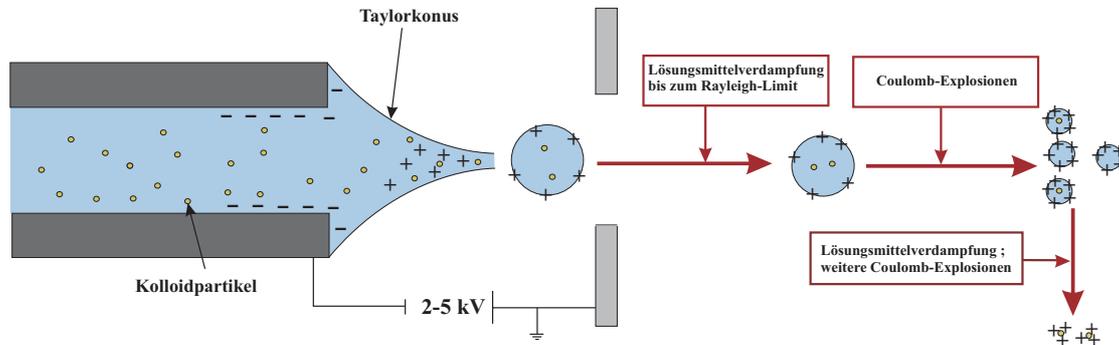


Abbildung 3.2: Erzeugung geladener Kolloidteilchen. Zunächst werden geladene Tropfen mit einem Durchmesser von ca. $100 \mu\text{m}$ erzeugt, die sich dann durch Verdampfung des Lösungsmittels bis zum Rayleigh-Limit verkleinern. Durch Coulomb-Explosionen entstehen kleinere Tropfen bis schließlich einzelne geladene Kolloidpartikel zurück bleiben.

3.2 Verschiedene Modi der Tröpfchenerzeugung

Das Verhalten des Elektrosprays bei verschiedenen zwischen Kanüle und Metallplatte angelegten Spannungen wurde sehr genau untersucht, als man begann, ihn zur Ionisierung für die Massenspektrometrie zu verwenden (siehe zum Beispiel (Clo89) und (Yam84)). Bei sehr niedriger Spannung entstehen große Tropfen, die von der Kapillare abreißen, wenn ihre Gravitationskraft die Oberflächenspannungskräfte, die sie an die Kapillare binden, übersteigt. Die entstehenden Wassertropfen haben einen Durchmesser von ungefähr einem Millimeter. Bei Erhöhung der Spannung werden die Tropfen kleiner, weil nun zusätzlich zur Gravitation die elektrostatische Kraft entgegen die Oberflächenspannung wirkt. Außerdem wird die Geschwindigkeit der sich lösenden Tropfen immer größer. Bei einer Spannung von ca. 2000 V entsteht der oben beschriebene Taylorkonus, aus dem sich nun kleine Tropfen mit einem Durchmesser von einigen hundert Mikrometern lösen. Bei weiterer Erhöhung der Spannung entsteht anstatt der einzelnen Tropfen ein feiner Strahl, was oft als cone-jet Modus bezeichnet wird. Detaillierte Messungen in (Clo89) und (Gas97) zeigten, dass die Tropfen in der Mitte dieses Strahls monodispers mit einem Durchmesser von einigen zehn Mikrometern (bis auf 5% Abweichung definiert) sind. Am Rand des Strahls entstehen kleine Satellitentropfen, die jedoch auf der Metallplatte landen und nicht in die Falle gelangen können. Die kritische Spannung zum Übergang in den cone-jet Modus beträgt je nach Kapillardurchmesser, Füllstand der kolloidalen Lösung und Abstand der Kapillare von der Metallplatte etwa 3000 V. Erhöht man die Spannung nur um wenige Volt, so treten zwei und dann mehrere Tröpfchenstrahlen mit Tropfendurchmessern von oft wenigen Mikrometern an der Seite des Taylorkonus aus und der mittlere verschwindet. Von all diesen austretenden Tropfen passiert keiner die

Kapitel 3 Erzeugung der geladenen Tröpfchen

Bohrung in der Metallelektrode, so dass diese sogenannten Multijets nicht erwünscht sind. Bei noch höheren Spannungen treten Entladungen zwischen Kanüle und Metallplatte auf und der Tröpfchenstrom reißt ab. Die verschiedenen Modi des Elektrosprays sind in Abbildung 3.3 aufgenommen.

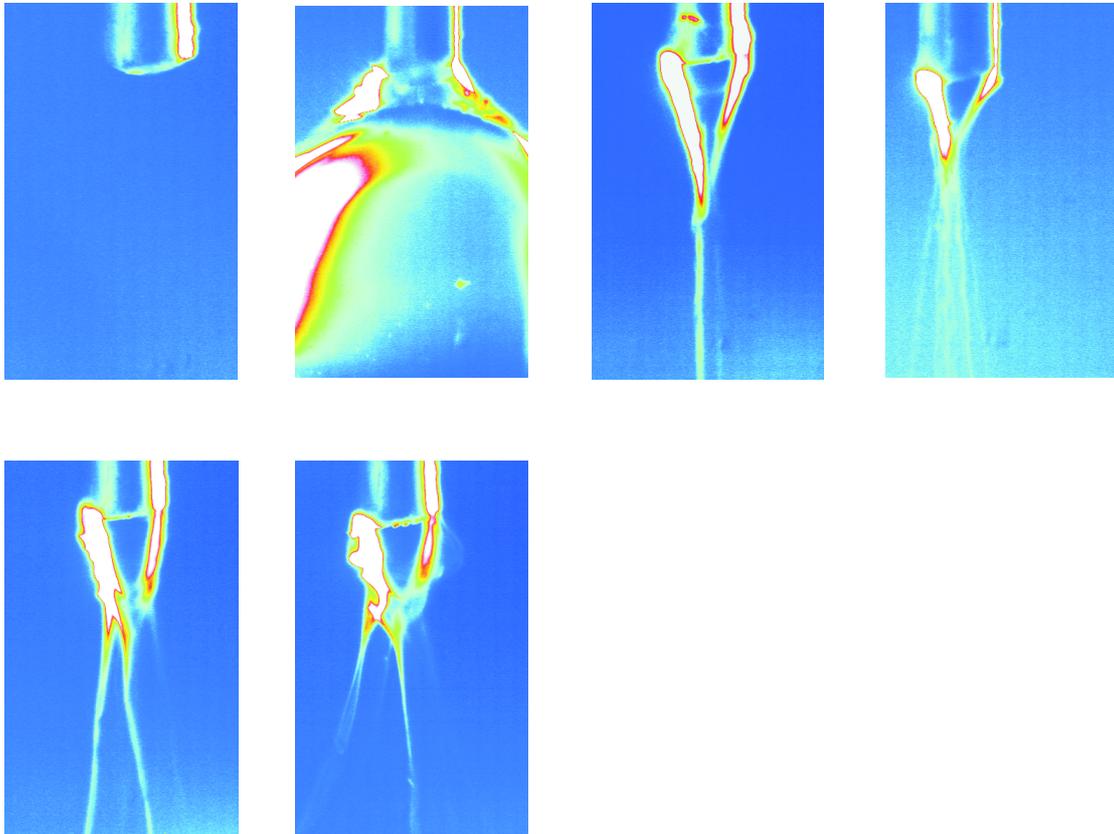


Abbildung 3.3: Verschiedene Modi des Elektrosprays. Die Belichtungszeit beträgt bei allen Bildern 20 ms. Zwischen Kapillare und Metallelektrode wurden von links nach rechts Spannungen von 0 V, 1000 V, 2500 V, 3000 V, 3500 V und 4500 V angelegt. Der Modus im dritten Bild wird als single-jet Modus bezeichnet und bei uns zur Erzeugung der geladenen Tropfen verwendet.

Bei uns muss der Elektrospray im single-jet-Modus betrieben werden, um die richtige Tröpfchengröße und vor allem einen akzeptablen Tröpfchenfluß in die Falle zu erhalten. Leider ist der hierfür geeignete Spannungsbereich sehr klein und nicht reproduzierbar. Es kommt häufig vor, dass der single-jet Modus für keine Spannung zwischen der Kapillare und der Metallelektrode möglich ist, so dass mehrere Kanülen getestet werden müssen bis die Spritze einsetzbar ist.

3.3 Überführung der Tropfen ins Vakuum

Weil die Elektrospray-Ionisation unter Atmosphärendruck stattfindet, der Betrieb der Paulfalle in unserem Experiment jedoch einen Druck von ungefähr $5 \cdot 10^{-5}$ mbar erfordert, muss ein entsprechender Übergang geschaffen werden. Es ist leider nicht möglich,

3.3 Überführung der Tropfen ins Vakuum

die Kolloidteilchen bei Normaldruck zu laden und dann langsam die Fallenkammer zu evakuieren, da erstens die Teilchen sehr empfindlich auf Luftverwirbelungen reagieren und zweitens bei einem Druck von ca. 0.1 mbar Gasentladungen zwischen den Elektroden der Falle einsetzen die die Teilchenbewegungen instabil werden lassen. Auch das Einbringen eines Löschgases in die Vakuumkammer verhindert die Entladungen nicht, da für alle Gase die kritische Feldstärke zwischen den Fallenelektroden bei einem gewissen Druck überstiegen wird (Hir78). Aus diesem Grund wurden zwei differenzielle Pumpstufen realisiert, um die geladenen Tropfen in die Kammer zu bringen.

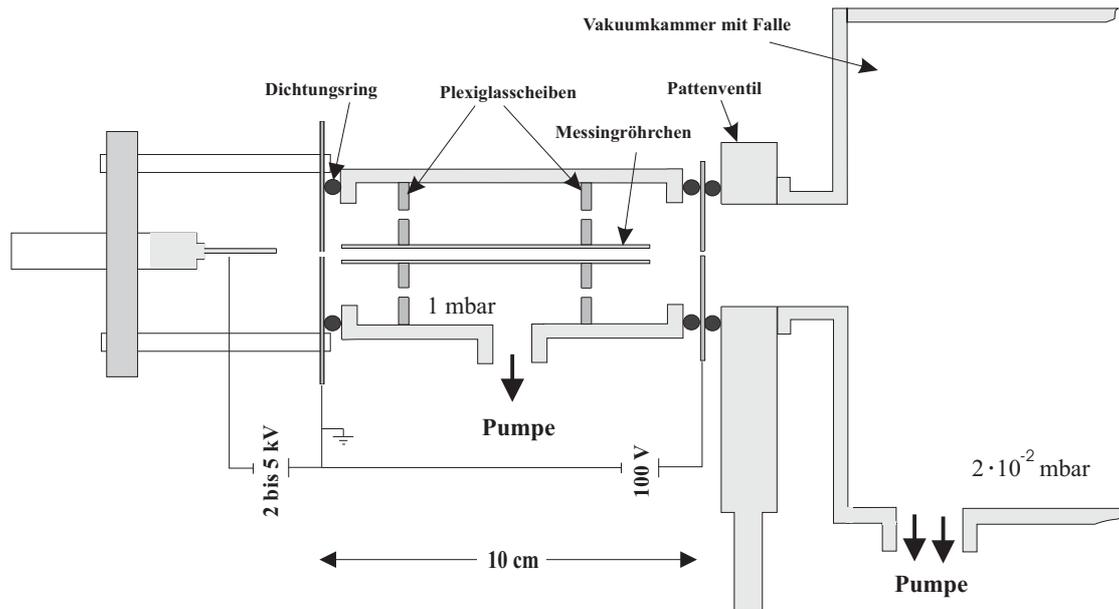


Abbildung 3.4: Überführung der geladenen Tropfen von Atmosphärendruck in die Vakuumkammer mit der Paulfalle. Es werden hierzu zwei differenzielle Pumpstufen verwendet. Die Löcher in den Metallplatten haben einen Durchmesser von $300 \mu\text{m}$.

In Abbildung 3.4 ist das Prinzip ersichtlich. Die erste Metallplatte hat eine Bohrung mit einem Durchmesser von $300 \mu\text{m}$. Das Volumen hinter dieser Platte wird durch eine große Drehschieberpumpe mit einem Pumpvolumen von $65 \text{ m}^3/\text{h}$ evakuiert, womit ein Druck von ca. 1 mbar erreicht wird. Der Übergang zur Vakuumkammer ist durch eine zweite Platte mit einer ebenfalls $300 \mu\text{m}$ großen Bohrung gegeben. Die Kammer selbst wird zunächst auch durch eine Drehschieberpumpe mit einem Pumpvolumen von $35 \text{ m}^3/\text{h}$ evakuiert, womit ein Druck von $2 \cdot 10^{-2} \text{ mbar}$ erreicht werden kann. Dieser Druck reicht zur Verhinderung von Gasentladungen aus. Bei diesem Druck werden die Tropfen in der Paulfalle gefangen. Nach einigen Sekunden, in denen mehrere Coulombexplosionen stattfinden, bleiben bei geeigneter Konzentration der kolloidalen Lösung einzelne geladene Kolloidteilchen in der Falle zurück. Anschließend wird die Vakuumkammer mit einem Plattenventil verschlossen und es wird eine Turbomolekularpumpe zugeschaltet, so dass ein Enddruck von $2 \cdot 10^{-5} \text{ mbar}$ erreicht wird. Es ist dabei notwendig, sehr langsam zu pumpen, da ansonsten das Teilchen die Falle verlässt und ein jähes Ende in der Pumpe erlebt. Der Enddruck kann mit Hilfe eines Nadelventils mit der die Kammer belüftet wird auf 10^{-6} mbar genau eingestellt werden. Diese Genauigkeit wird benötigt, um die

Kapitel 3 Erzeugung der geladenen Tröpfchen

Dämpfung der Teilchenbewegung in der Falle kontrollieren zu können (siehe Kapitel 5). Als die differentiellen Pumpstufen eingebaut wurden, gelang es zunächst nicht, Tropfen durch das zweite Loch in die Vakuumkammer zu bringen, da zwischen den Metallplatten ein starker seitlicher Luftstrom in Richtung Pumpe vorhanden war. Deshalb wurde zusätzlich ein Messingröhrchen mit einem Innendurchmesser von 0.5 cm zwischen die Metallplatten gebracht. Es wird von zwei Plexiglasscheiben, in die einige Löcher gebohrt wurden um den Luftstrom zu gewährleisten, in der Mitte des Vakuumrohres gehalten. Zwischen den Platten kann zusätzlich eine Gleichspannung von 0-100 V angelegt werden, um die Tropfen in die richtige Richtung zu beschleunigen.

4 Deterministisches Chaos in der klassischen Mechanik und der δ -kicked rotor

Von deterministischem Chaos in klassischen physikalischen Systemen spricht man, wenn bei Abwesenheit von zufälligen äußeren Kräften Zustände der Irregularität und Unordnung vorliegen können. Dabei bedeutet deterministisch, dass die Zeitabhängigkeit des Systems durch exakte Differentialgleichungen gegeben ist, nach der sich das zukünftige Verhalten aus gegebenen Anfangsbedingungen berechnen läßt. Die Ursache der Irregularität beruht dabei auf der Eigenschaft nichtlinearer Systeme, dass in gewissen Gebieten des Phasenraums anfänglich benachbarte Trajektorien exponentiell schnell auseinanderlaufen. Bereits 1889 fand Poincaré¹, dass bestimmte Systeme, deren Zeitentwicklung durch die klassischen Hamiltongleichungen bestimmt werden, chaotisches Verhalten zeigen, was aber viele Jahre nur wenig beachtet wurde. Erst etwa 60 Jahre später bewiesen Kolmogorov, Arnold und Moser das sogenannte KAM-Theorem ((Arn63), (Kol54) und (Mos67)). Es besagt, dass die Bewegung im Phasenraum der klassischen Mechanik weder vollständig regulär noch vollständig irregulär ist, sondern dass das Verhalten empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt. Seither wurde dieses neue Gebiet der Physik allgemein anerkannt.

Es stellt sich die Frage, welche physikalischen Systeme deterministisches Chaos zeigen und ob dies anhand der Differentialgleichungen des Systems gesehen werden kann. Hierzu verwendet man die Hamilton-Darstellung für die Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik. Der Zustand eines physikalischen Systems mit N Freiheitsgraden wird durch verallgemeinerte Koordinaten (q_1, \dots, q_N) , verallgemeinerte Impulse (p_1, \dots, p_N) und die Hamiltonfunktion $H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + V(q_1, \dots, q_N)$ beschrieben. Die Systeme, deren Hamiltongleichungen eine analytische Lösung besitzen, heißen integrabel. Solche Systeme bilden jedoch eher die Ausnahme. Ein System mit N Freiheitsgraden ist genau dann integrabel, wenn N Symmetrien im System und damit nach dem Noetherschen Theorem N unabhängige Konstanten der Bewegung existieren, die von den verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen abhängen. Durch eine kanonische Transformation der Koordinaten erniedrigt jede Konstante der Bewegung die Anzahl der Freiheitsgrade um eins. N Konstanten der Bewegung führen dann zu N ein-Körper-Problemen. Solche separable Hamiltonfunktionen können nicht zu Chaos führen, weil sie periodische oder quasiperiodische Lösungen besitzen. Es gilt, dass lineare Hamiltongleichungen immer separabel sind (siehe z.B. (Dev87)). Deshalb ist eine Nichtlinearität in der Hamiltonfunktion eine notwendige Voraussetzung für deterministisches Chaos.

¹1889 wurde vom König von Norwegen und Schweden ein mathematischer Wettbewerb zur Beantwortung der Frage, ob das Sonnensystem stabil ist, ausgeschrieben. Poincaré zeigte daraufhin, dass es keine analytische Lösung für das Dreikörperproblem gibt.

4.1 Der δ -kicked rotor im harmonischen Potential

Eines der ersten und einfachsten chaotischen physikalischen Systeme, das untersucht wurde und mittlerweile in jedem Lehrbuch über deterministisches Chaos (siehe zum Beispiel (Dev87) oder (Rei92)) zu finden ist, ist das periodisch getriebene Pendel. Es handelt sich hierbei um ein Pendel, das einer "ortsabhängigen, gepulsten Gravitation" ausgesetzt ist.

Allgemein wird ein eindimensionales System mit einer ortsabhängigen zeitlich periodischen δ -förmigen Kraft, bei dem zwischen den Kraftpulsen freie Bewegung stattfindet, als δ -kicked rotor bezeichnet. In diesem Fall spricht man von $N = 3/2$ Freiheitsgraden, wobei der halbe Freiheitsgrad für die zeitlich periodische Störung steht. Der δ -kicked rotor ist das einfachste Testsystem, um klassisches Chaos und Quantenchaos zu erforschen, weil Systeme mit nur einem Freiheitsgrad stets integrabel sind². Das durch δ -förmige Pulse getriebene Pendel wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{\Theta} = K f(\Theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.1)$$

Hierbei beschreibt Θ den Winkel, der Parameter K die Stärke der treibenden Kraft und T den zeitliche Abstand der Pulse.

In unserem Experiment wird die δ -förmige Kraft von einer gepulsten stehende Lichtwelle geliefert, die in einem in der Paulfalle gefangenen Teilchen ein Dipolmoment erzeugt und es in Abhängigkeit von seiner Position in der Stehwelle beschleunigt (siehe Abbildung 4.1).

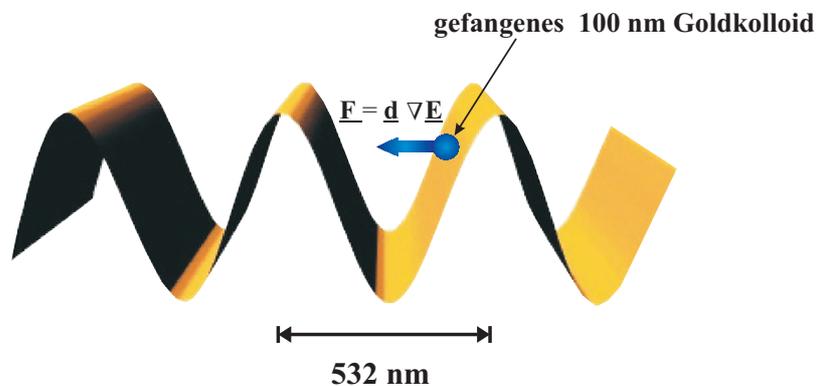


Abbildung 4.1: Realisierung eines δ -kicked rotors. Das sinusförmige gepulste Potential wird durch eine gepulste stehende Lichtwelle erzeugt. Aufgrund der Dipolwechselwirkung erfährt das gefangene Kolloid im elektrischen Feld der Stehwelle eine Kraft in Richtung des Feldgradienten.

Das elektrische Feld des in x -Richtung einlaufenden monochromatischen Strahls des Nd:YAG Lasers mit Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω ist

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.2)$$

²Es wird hier deshalb oft von minimalem Chaos gesprochen.

4.1 Der δ -kicked rotor im harmonischen Potential

Durch Überlagerung mit dem retroreflektierten Strahl wird eine stehende Lichtwelle mit dem elektrischen Feld

$$\mathbf{E}(x, t) = 2 \mathbf{E}_0 \cos(kx) \cdot e^{-i\omega t} \quad (4.3)$$

erzeugt.

Das im Teilchen in der Stehwelle induzierte Dipolmoment ist

$$\mathbf{d}(x, t) = p \cdot \mathbf{E}(x, t) \quad (4.4)$$

wobei mit p die Polarisierbarkeit des Teilchens bezeichnet ist. Die Wechselwirkungsenergie des Teilchens mit dem elektrischen Feld im Zeitmittel³ ergibt sich zu

$$U_{\text{ww}}(x) = -d \langle \mathbf{E}(x, t) \rangle_t = -p E_0^2 (1 + \cos(2kx)) =: U_{\text{max}} \cdot (1 + \cos(2kx)) \quad (4.5)$$

Hiermit lässt sich die im Zeitmittel auf das Teilchen wirkende Kraft bestimmen:

$$\mathbf{F}(x) = -\nabla U_{\text{ww}}(x) = 2 p k E_0^2 \sin(2kx) \hat{\mathbf{x}} \quad (4.6)$$

Es ergibt sich für unser System also folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{x} = \frac{2pkE_0^2}{M} \sin(2kx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) =: \frac{K}{2kT^2} \sin(2kx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.7)$$

Hierbei beschreibt der dimensionslose Parameter K wieder die Stärke der Pulse und M die Masse des Teilchens. Ein Vergleich mit Gleichung 4.1 zeigt, dass mit unserem System eines in der Paulfalle gefangenen Kolloids in einer gepulsten Stehwelle ein δ -kicked rotor realisiert wird.

Es muss bei dieser Realisierung des δ -kicked rotor noch die Bewegung des Teilchens in der Paulfalle berücksichtigt werden, das heisst zwischen den durch die stehende Lichtwelle übertragenen Kraftpulsen findet keine freie, sondern eine durch die Paulfalle bestimmte Bewegung statt. Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, sind an der Bewegung des Teilchens in der Paulfalle mehrere harmonische Schwingungen beteiligt. Die Anzahl und Größe der auftretenden Frequenzen hängt von der Größe der Entwicklungsparameter in Gleichung 2.13 ab. Diese sind wiederum abhängig vom Parameter q_u , das heisst von der Größe der spezifischen Ladung Q/M . Die in Gleichung 2.21 auftretende Säkularfrequenz lässt sich aus Gleichung 2.45 bestimmen. Mit typischen Parametern $V_{\text{ac}} = 700$ V, $\Omega = 2\pi \cdot 200$ Hz, $z_0 = 1.7$ cm und $Q/M \approx 0.2$ C/kg für Goldkolloide mit 100 nm Durchmesser ergibt sich eine radiale Säkularfrequenz von ungefähr 22 Hz.

4.1.1 Das stochastische Netz

Der δ -kicked rotor in einem harmonischen Potential wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{2pkE_0^2}{M} \sin(2kx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) =: \frac{K}{2kT^2} \sin(2kx) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (4.8)$$

³Gemittelt über eine Schwingungsperiode des Laserlichts.

Hierbei ist ω_0 die Frequenz der harmonischen Schwingung in der Falle, T der Pulsabstand, M die Masse des Teilchens und K der dimensionslose Wechselwirkungsparameter. In (Che87) wird gezeigt, dass im Resonanzfall

$$\frac{2\pi}{T} = q \cdot \omega_0 \quad , \quad q \in \mathbb{N} \quad (4.9)$$

das heisst für den Fall, dass die Pulsfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Schwingungsfrequenz des Kolloids in der Falle beträgt, der gesamte Phasenraum des Systems von einem zusammenhängenden Netz endlicher Dicke überdeckt ist. Dieses sogenannte stochastische Netz ist in Abbildung 4.2 für den Fall $q=5$ für $K = 0.7$ und $K = 0.9$ und $K = 20$, sowie für $q=7$ mit $K=0.5$ abgebildet. Es weist eine q -fache Symmetrie auf.

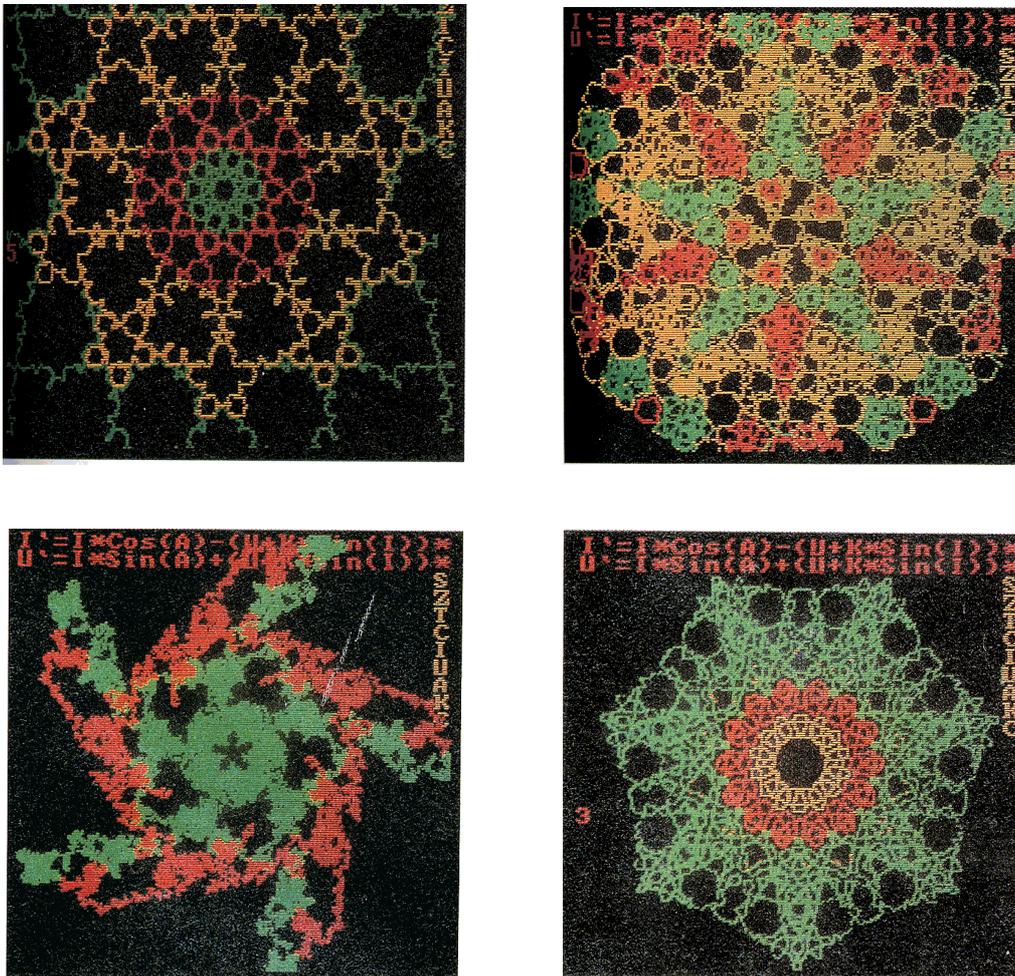


Abbildung 4.2: Stochastisches Netz für den ein-dimensionalen δ -kicked rotor im periodischen Potential. Die x -Achse ist horizontal und die \dot{x} -Achse vertikal. Die ersten drei Bilder sind jeweils für $q = 5$ mit Parametern $K = 0.7$, $K = 0.9$ und $K = 20$ berechnet und besitzen 5-fache Rotationssymmetrie. Im 4. Bild ist der Fall $q = 7$, $K = 0.5$ mit 7-facher Rotationssymmetrie gezeigt. Die eingezeichneten Farben beschreiben, zu welcher Zeit bestimmte Gebiete des Phasenraums von der Teilchentrajektorie erreicht werden (aus (Che87)).

4.1 Der δ -kicked rotor im harmonischen Potential

Auf dem Netz ist die Dynamik des Systems stochastisch. Wenn sich die Anfangsbedingungen (x_0, \dot{x}_0) für das gefangene Goldkolloid auf dem Netz befinden, wird nach Iteration der Kicks das gesamte Netz von einer einzigen Teilchentrajektorie generiert. Falls der Anfangszustand des Teilchens nicht auf dem Netz liegt, bewegt es sich im Phasenraum innerhalb einer durch das Netz eingeschlossenen Zelle. Die Tatsache, dass das stochastische Netz den gesamten Phasenraum bedeckt führt dazu, dass auf das Teilchen mit äußerst geringen Kräften beliebig große kinetische Energien übertragen werden können. Die Dicke Δ des stochastischen Netzes ist für kleine Parameter $K \ll 1$ exponentiell klein (Che87):

$$\Delta \propto e^{-const/K} \quad \text{für } K \ll 1 \quad (4.10)$$

so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anfangsbedingungen des Teilchens auf dem Netz liegen, beliebig klein ist. Um die über alle Anfangsbedingungen des Teilchens gemittelte übertragene Energie zu beschreiben wird der Diffusionskoeffizient

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle \mathbf{R}_n^2 \rangle}{n} \quad (4.11)$$

eingeführt. Hierbei wird mit \mathbf{R}_n der Vektor (u_n, v_n) mit den dimensionslosen Geschwindigkeiten $u_n = 2k\dot{x}_n/\omega_0$ und Positionen $v_n = -2kx_n$ unmittelbar nach dem n -ten Puls bezeichnet. Die Mittelung in Gleichung 4.11 bedeutet Mittelung über alle möglichen Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten des Teilchens. In (Afa90) wird der Diffusionskoeffizient D für den Fall $q = 4$ in Abhängigkeit des Parameters K berechnet.

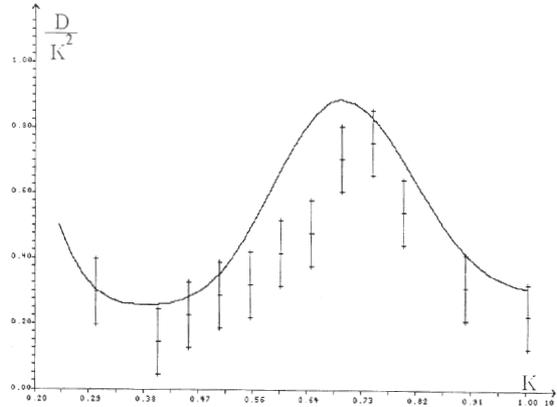


Abbildung 4.3: Diffusionskoeffizient D in Abhängigkeit des Wechselwirkungsparameters K . Die durchgezogene Linie repräsentiert analytische Berechnungen und die eingezeichneten Werte numerische Simulationen (Afa90).

Aus Abbildung 4.3 ist ersichtlich, dass die auf das Teilchen übertragene kinetische Energie in Abhängigkeit von K Maxima aufweist, so dass Vergrößerung der Wechselwirkung durch Vergrößerung der Laserleistung nicht zwangsläufig zu einer größeren durch die stehende Lichtwelle auf das Teilchen übertragenen kinetischen Energie führt. Bei einfachem Antreiben der Fallenbewegungen würde die übertragene Energie mit steigender Laserleistung monoton anwachsen, so dass dies durch Variation von K von der hier berechneten dynamischen Resonanz unterschieden werden kann.

Ist die Resonanzbedingung nicht erfüllt, das heisst die Pulsfrequenz ist kein ganzzahliges Vielfaches der Frequenz der harmonischen Schwingung in der Falle, existiert im Phasenraum kein zusammenhängendes Netz. Deshalb ist in diesem Fall der mögliche Energieübertrag auf die Kolloidteilchen beschränkt.

4.1.2 Abschätzung der benötigten Laserleistung

Ein Einfluß der Dipolwechselwirkung auf die Bewegung des Teilchens ist sicherlich gegeben, wenn die während des Lichtpulses auf ein ruhendes Teilchen übertragene kinetische Energie so groß ist, dass es bis zum nächsten Puls eine Periode der Stehwelle zurücklegen kann. Die während des Pulses wirkende Kraft ist durch Gleichung 4.6 gegeben. Zur Bestimmung der Polarisierbarkeit p der Goldkolloide wird die Clausius-Mosotti-Gleichung für die molekulare Polarisierbarkeit α verwendet:

$$\alpha = 3\epsilon_0 \frac{V}{N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (4.12)$$

Hierbei ist n der Brechungsindex und N/V die Anzahldichte der Atome im Kolloid. Die Polarisierbarkeit eines Goldkolloids mit Radius r ergibt sich damit zu

$$p = N\alpha = 4\pi\epsilon_0 r^3 \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \quad (4.13)$$

Die auf das Kolloid wirkende Kraft ist nach Gleichung 4.6 gegeben durch

$$\mathbf{F}(x) = 8\pi\epsilon_0 r^3 k E_0^2 \sin(2kx) \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.14)$$

Daraus ergibt sich die von der Teilchengröße unabhängige Beschleunigung

$$\mathbf{a}(x) = \frac{6\epsilon_0 k b f E_0^2 \sin(2kx)}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \hat{\mathbf{x}} \quad (4.15)$$

Der Brechungsindex von Gold bei $\lambda = 1064$ nm ist $n = 0.2 + 7.15i$ (Joh72) und die Dichte beträgt $\rho = 19300$ kg/m³. Bei einer Pulslänge von 50 μ s und einem Pulsabstand von 1 ms ist also eine elektrische Feldstärke $E_0 \approx 4.6 \cdot 10^4$ V/m nötig. Die auf das Teilchen wirkende Beschleunigung ist damit $a=33$ m/s². Der Laser hat in der Fallenmitte einen Strahldurchmesser von 500 μ m, so dass eine Laserleistung von ungefähr 1 W genügen sollte.

5 Experimenteller Aufbau und Durchführung

Ziel des Experiments ist es, in der Falle die Dipolwechselwirkung der der Teilchen mit einer gepulsten stehenden Lichtwelle zu untersuchen. Zunächst wird ein geeignetes Kolloidteilchen, dessen Größe kleiner sein muss als die Wellenlänge der Stehwelle¹, geladen. Es wird mit Hilfe des gestreuten Lichts einer 50 mW-Laserdiode bei einer Wellenlänge von 685 nm und einer CCD-Kamera abgebildet (siehe Abbildung 5.1). Um sicher zu stellen, dass es sich dabei nicht um mehrere zusammengeklumpte Kolloide handelt, werden sowohl die absolute Größe des Teilchens aus der gestreuten Lichtintensität als auch die spezifische Ladung bestimmt. Der Strahl eines Nd-YAG Lasers kann durch zwei gegenüberliegende Bohrungen in der Ringelektrode die Falle passieren, und wird ausserhalb der Kammer von einem Metallspiegel, auf den der Strahl fokussiert wird, retroreflektiert. Das Teilchen befindet sich somit in einer stehenden Lichtwelle, die mit Hilfe eines akustooptischen Modulators gepulst werden kann. Nun wird der Laser periodisch 20 bis 30 mal mit einer Pulsdauer von ca. 50 μ s eingeschaltet. Die Zeit zwischen den Pulsen wird in kleinen Schritten zwischen 100 μ s und 10 ms variiert. Während des Lichtpulses wird in dem gefangenen Teilchen ein Dipolmoment induziert. Hierdurch wird es in Abhängigkeit von der Anfangsposition im elektrischen Feld des Lasers in Richtung des Feldgradienten beschleunigt. Auf diese Weise wird ein δ -kicked rotor realisiert. Einige Millisekunden nach den Pulsen wird ein Bild der Bewegung des Teilchens aufgenommen, deren Amplitude ein Maß für die durch die Stehwelle übertragene Energie ist. Wie in Kapitel 4.1.1 gezeigt, sollten sich für bestimmte Pulsabstände sehr große Energieüberträge ergeben.

Der Druck in der Kammer wird so eingestellt, dass die durch die Pulse induzierte Bewegung erst nach 10 Sekunden ausgedämpft ist. Damit ist garantiert, dass einerseits die Dämpfung der Bewegung zwischen den einzelnen Pulsen vernachlässigbar ist, andererseits nach zehn Sekunden das Experiment mit einem neuen Abstand zwischen den Stehwellenpulsen unter gleichen Anfangsbedingungen fortgeführt werden kann. Um über alle möglichen Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten mitteln zu können, muss das Experiment für jeden Pulsabstand 50 mal wiederholt werden, was schon bei 100 verschiedenen Pulsabständen zu einer Dauer des Experiments von ca. 14 Stunden führt. Für genauere Messungen wurde zum Teil eine Zeit von über 30 Stunden benötigt, so dass das Experiment komplett automatisiert werden musste.

Die einzelnen Teile des experimentellen Aufbaus und der Durchführung werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

¹Es wurden Goldkolloide mit einem Durchmesser von 100 nm verwendet.

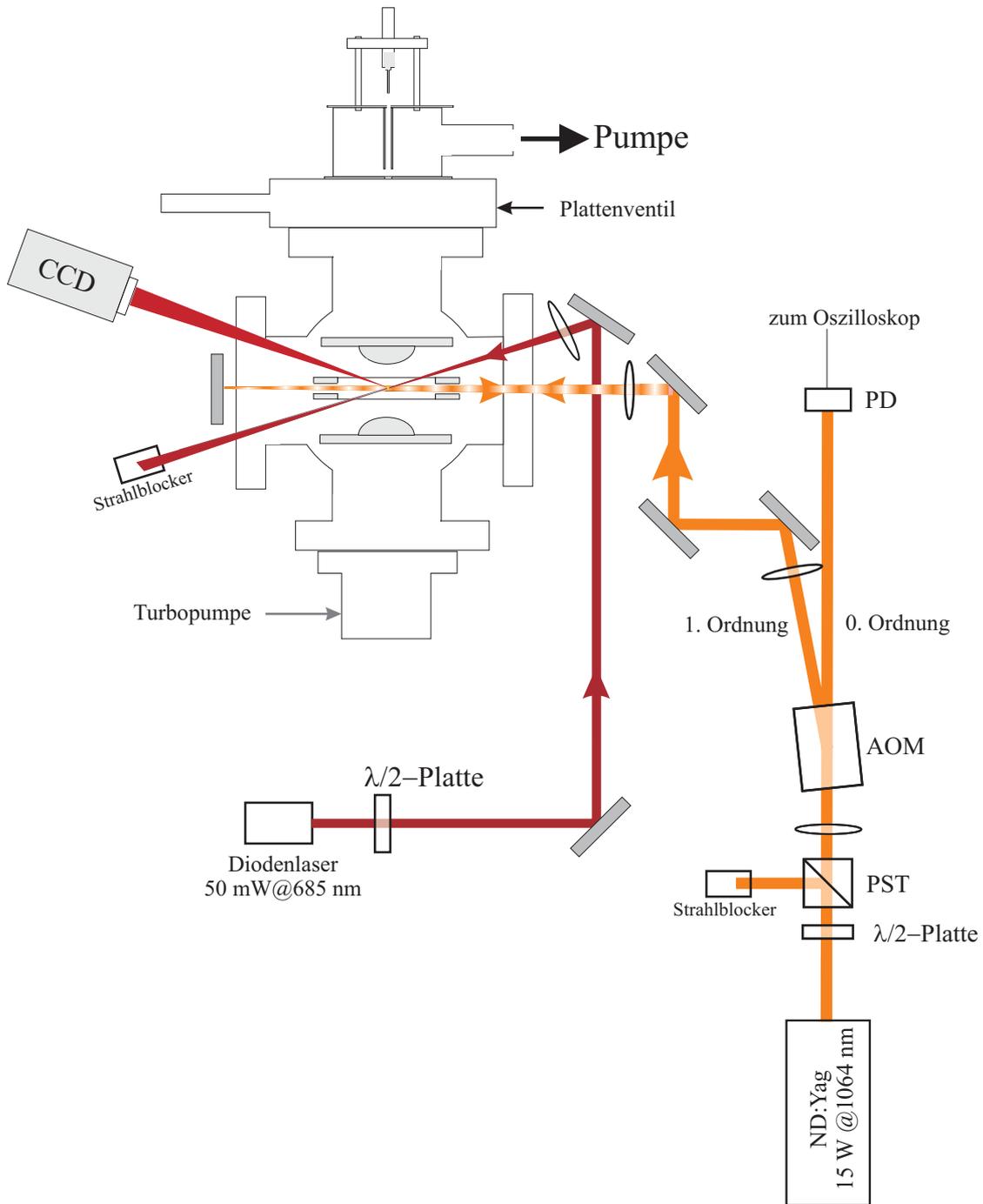


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus. Die mit Hilfe des Elektrosprays in die Falle geladenen 100 nm großen Goldkolloide werden mit einer CCD-Kamera abgebildet. Mit dem akusto-optischen Modulator kann die stehende Lichtwelle gepulst und somit ein δ -kicked rotor realisiert werden. Abkürzungen: PST=polarisierender Strahlteilerwürfel, PD=Photodiode, AOM=akusto-optischer Modulator

5.1 Paulfalle

Zu Beginn der Arbeit wussten wir noch sehr wenig über das Speichern von makroskopischen Teilchen in einer Paulfalle. Deshalb wurde zunächst dem Vorschlag von Winter *et al.* (Wint91) folgend eine sehr einfache Falle aufgebaut, um einige Erfahrungen zu sammeln. Als Ringelektrode wurde ein Messingring mit einem Innendurchmesser von 2,5 cm und einer Dicke von 0,5 cm verwendet. Die Deckelektroden bestanden aus jeweils einer 1 cm großen Messingkugel². Alle Elektroden wurden auf Metallgewindestangen, die gleichzeitig als Stromzuführung dienten, geschraubt und an einer Plexiglashalterung befestigt (siehe Abbildung 5.2). Die Kugeln wurden so angebracht, dass ihr Abstand dem $1/\sqrt{2}$ -fachen des Innendurchmessers des Messingrings betrug, um für die Bewegung der Teilchen im elektrischen Feld die Mathieuschen Differentialgleichungen in Kapitel 2 verwenden zu können. Als Spannungsquelle wurde ein Stelltransformator verwendet, der eine Wechselspannung von 0 - 230 V bei 50 Hz liefert. Diese Spannung konnte nun mit Hilfe eines Leibold-Transformators auf bis zu 10000 V transformiert werden und wurde zwischen die Ringelektrode und die Deckelektroden angelegt. Da die Elektroden offen zugänglich waren, war es bei den verwendeten Spannungen nötig, einen Widerstand von 10 M Ω in den Stromkreis einzubauen, um im Falle eines Kurzschlusses den Strom zu begrenzen. Zur Kompensation der Gravitation konnte eine Gleichspannung von bis zu 30 V zwischen den Kugeln angelegt werden.

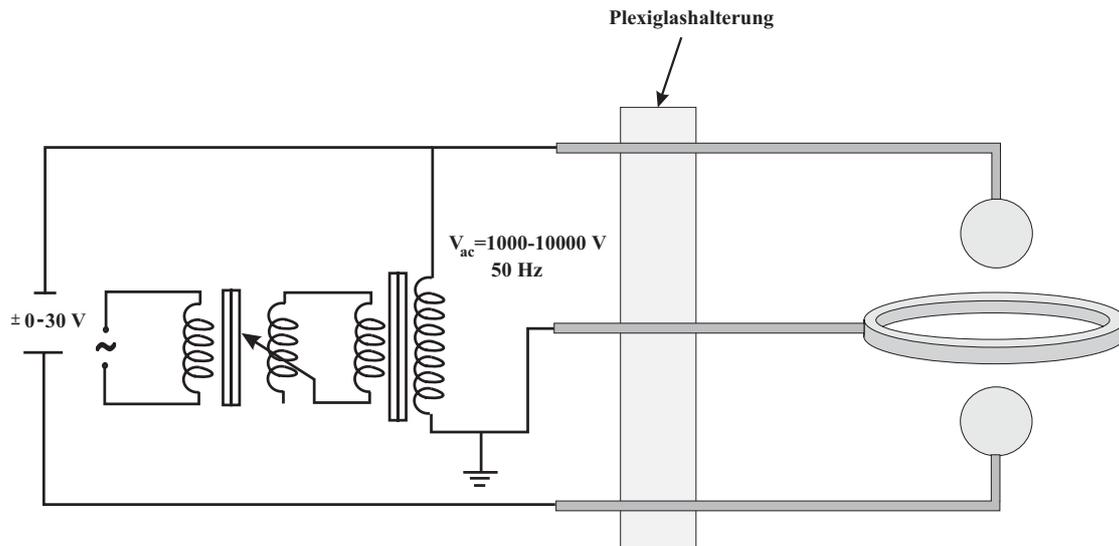


Abbildung 5.2: Erste aufgebaute Falle. Die Frequenz der angelegten Wechselspannung war 50 Hz. Mit dieser Falle konnten Anthracenstaub und $6.3 \mu\text{m}$ große Polyesterlatexkolloide gefangen werden.

Zunächst sollte Anthracenstaub aufgeladen und in der Falle gefangen werden. Hierzu wurde eine Spritze verwendet, in die eine kleine Menge Staub gefüllt wurde. Die Teilchen wurden nun einfach aus einem Abstand von einigen Zentimetern in die Fallenmitte inji-

²Nach (Bea86) sollten diese sehr einfachen Elektroden in guter Näherung ein Quadrupolfeld in der Fallenmitte erzeugen.

ziert. Aufladung der Staubpartikel erfolgte dabei durch Reibung an der Spritze. Die Falle wurde mit einer Schwanenhalslampe ausgeleuchtet und zur Abbildung der Teilchen wurde eine CCD-Kamera verwendet. Bei den ersten Versuchen konnten keine Staubteilchen gefangen werden, weil die Fallenspannung zu groß gewählt wurde. Bei einer Spannung von ungefähr 4000 V waren die Teilchenbewegungen in der Falle am stabilsten, die Teilchen konnten jedoch nie länger als einige Sekunden gehalten werden. Verantwortlich dafür waren zum einen Luftbewegungen, die mit Hilfe einer Plexiglashaube eliminiert wurden, zum anderen stellte sich heraus, dass die Größe der Messingkugeln zu klein war, um ein geeignetes elektrisches Feld auch etwas außerhalb der Fallenmitte zu erzeugen. Nachdem Kugeln mit dem doppelten Durchmesser angebracht wurden, konnten die Staubteilchen über mehrere Tage stabil in der Falle gefangen werden.

Für unsere geplanten Experimente mussten Teilchen mit einem wesentlich kleineren Durchmesser als die Wellenlänge der stehenden Lichtwelle, die der halben Wellenlänge des Nd-YAG-Lasers entspricht (532 nm), gefangen werden. Die Anthracenteilchen sind mit einer Größe von einigen hundert Mikrometern also nicht geeignet. Wir entschieden uns, kolloidale Lösungen mit einem Elektrospray in die Falle zu bringen, was eine große Vielzahl von Teilchengrößen ermöglicht, da Kolloide in nahezu allen gewünschten Größen verfügbar sind. Zunächst wurden $6.3 \mu\text{m}$ Polystyrenkolloide verwendet, die man mit bloßem Auge in der Falle sehen kann. Die aus dem Elektrospray austretenden Tropfen konnten gefangen werden, aber während des Verdampfens des Wassers, in dem die Kolloide gelöst sind, wurden sie instabil weil sich ihre spezifische Ladung änderte. Es gelang zwar durch Nachregeln der angelegten Spannung ab und zu den Tropfen solange zu speichern, bis einzelne Kolloide in der Falle zurück blieben, diese waren jedoch so instabil, dass sie nur einige Sekunden in der Falle gespeichert werden konnten. Um verschiedene Teilchen mit verschiedenen spezifischen Ladungen fangen zu können musste also auch die Frequenz der angelegten Spannung variiert werden. Deshalb wurde als Spannungsquelle ein Funktionsgenerator verwendet, dessen maximale Ausgangsspannung von 10 V mit Hilfe von parallel geschalteten Transformatoren auf 4000 V transformiert wurde. Da die Ausgangsleistung des Funktionsgenerators zu klein für den im Primärkreis der Transformatoren fließenden Strom war, wurde das Signal zunächst mit Hilfe eines Audioverstärkers verstärkt und dann transformiert. Jetzt steht eine Spannungsquelle mit variabler Frequenz von 50 bis 1000 Hz und Spannungen bis 5000 V zur Verfügung, die es ermöglichen sollte, Teilchen mit verschiedensten spezifischen Ladungen zu fangen. Neben den $6.3 \mu\text{m}$ großen Kolloiden konnten auch Polystyrenlatexkolloide mit 800 nm, 530 nm und 280 nm in die Falle geladen werden, wobei die Beobachtung der Teilchen mit kleinerem Durchmesser erheblich schwerer war, da die gestreute Lichtintensität mit der sechsten Potenz des Radius abnimmt (siehe Kapitel 5.3).

Für die Realisierung des δ -kicked rotor sollte die Dämpfung der Teilchenbewegung zwischen den Pulsen vernachlässigbar sein. Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde ist die Bewegung der gefangenen Teilchen bei Normaldruck jedoch sehr stark gedämpft. Deshalb muss die Falle zur Durchführung des Experiments in eine Vakuumkammer gebracht werden. Zu diesem Zweck wurde sie auf einem Vakuumflansch aus Plexiglas befestigt und in eine Vakuumkammer montiert, die durch 20 cm große Fenster einen sehr guten optischen Zugang ermöglicht. Abbildung 5.4 zeigt ein Bild der verwendeten Vakuumkammer mit eingebauter Paulfalle. Zunächst versuchte ich, die Teilchen bei Normaldruck zu fangen und dann langsam mit pumpen zu beginnen, was aber aufgrund von Gasentladungen

zwischen den Elektroden und von zu starken Luftverwirbelungen dazu führte, dass das Teilchen verloren ging. Es wurden dann zwei differentielle Pumpstufen realisiert (siehe Abschnitt 3.3), um die bei Normaldruck erzeugten geladenen Tropfen in die Vakuumkammer bei einem Druck von $2 \cdot 10^{-2}$ mbar zu bringen. Anschließend wurde mit Hilfe einer Turbomolekularpumpe der Druck langsam auf ungefähr $2 \cdot 10^{-5}$ mbar abgesenkt. Bei diesem Druck ist die Reibung nun so klein, dass die Säkularbewegung erst nach einigen Sekunden ausgedämpft wird.

Zur Abbildung wird jetzt ein Diodenlaser mit einer Leistung von 50 mW bei einer Wellenlänge von 685 nm verwendet. Mit Hilfe der CCD-Kamera können Teilchen bis zu einem Radius von 100 nm beobachtet werden.

Es zeigte sich, dass die Säkularbewegung im Vakuum bis zu einem Millimeter betrug, was daran lag, dass unsere Falle, die nur einseitig durch Gewindestangen gehalten wurde, nicht genau genug justiert werden konnte. Dadurch verschiebt sich das Potentialminimum aus dem geometrischen Mittelpunkt der Falle, was Anharmonizitäten des Potentials ist zur Folge hat. Aus diesem Grund wurde eine neue Falle konzipiert, bei der die Elektroden fest gegeneinander verschraubt werden können. Die Justage ist somit bis auf eine Abweichung von ungefähr $100 \mu\text{m}$ möglich und die Amplitude der Säkularbewegung konnte auf ein Drittel reduziert werden. Außerdem wurde die Falle etwas größer gebaut, um die Frequenzen der Bewegungen des Teilchens auf die Hälfte zu verkleinern. Statt der Kugeln werden Halbkugeln mit einem Radius von 1.75 cm verwendet und der Innendurchmesser der Ringelektrode beträgt 4.5 cm. Der Nd-YAG Laser kann durch zwei ein Millimeter große Bohrungen in der Ringelektrode die Falle passieren.

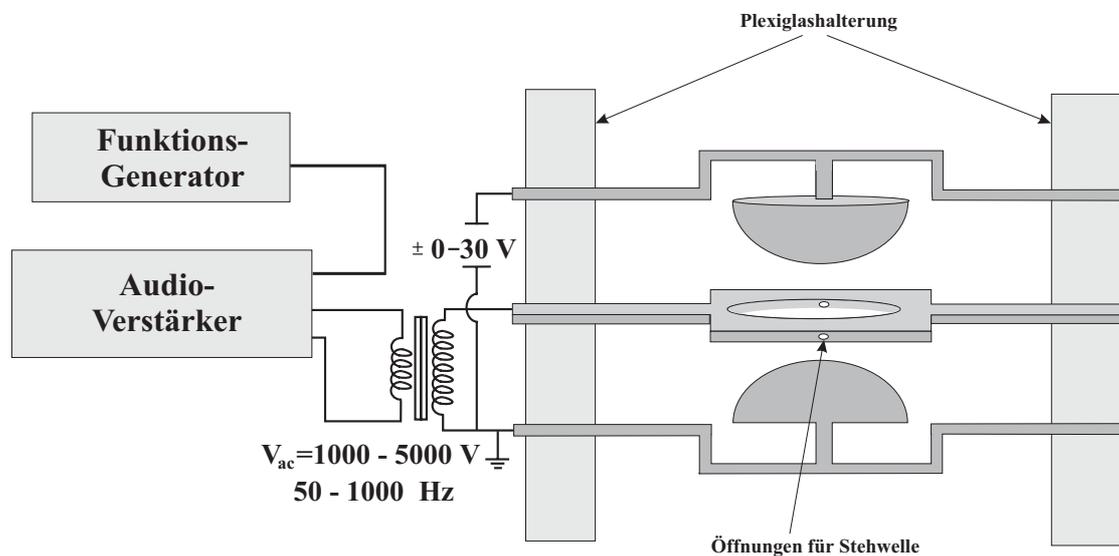


Abbildung 5.3: Skizze der neuen Falle, bei der die Elektroden sehr genau justiert werden können, wodurch die Säkularbewegung im Vergleich zur alten Falle auf ein Drittel reduziert werden konnte.

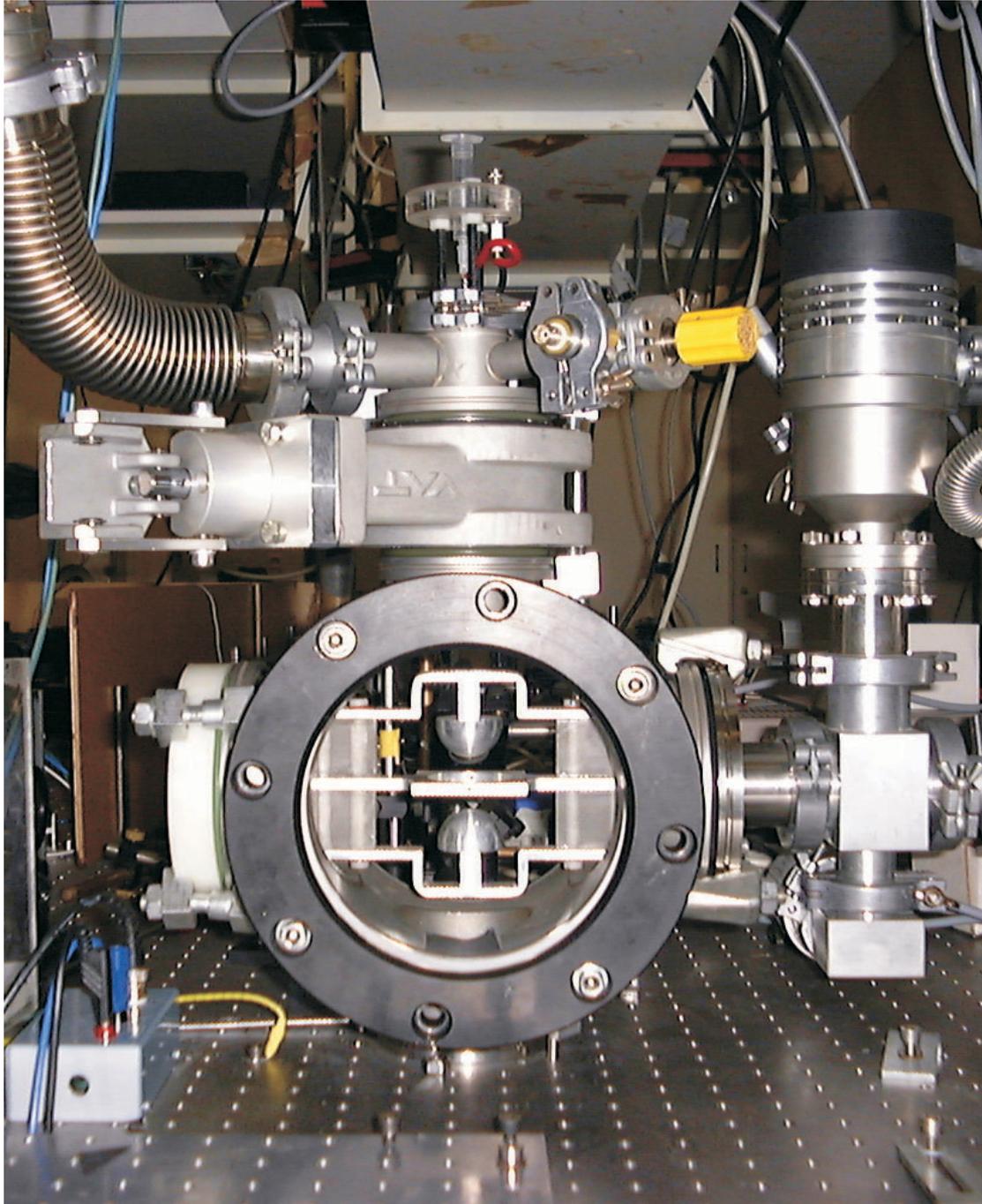


Abbildung 5.4: Foto der neuen Falle in der Vakuumkammer. Oben sind der Elektrospray und die differentiellen Pumpstufen zu sehen.

5.2 Elektrospray

Um Teilchen in der Falle bei Normaldruck zu laden, konnte für den Elektrospray eine Metallelektrode mit einer Bohrung von 0.5 cm verwendet werden, womit die Erzeugung

eines geeigneten Tröpfchenstrahls relativ problemlos war. Es konnten damit innerhalb von wenigen Sekunden mehrere Teilchen in der Paulfalle gefangen werden. Der Betrieb der Falle im Vakuum erfordert nun wegen der differentiellen Pumpstufen eine wesentlich kleinere Öffnung in der Metallelektrode. Es stellte sich heraus, dass beide Bohrungen in den Metallplatten nicht größer sein durften als $300 \mu\text{m}$, um den zur Vermeidung von Gasentladungen benötigten Druck von $2 \cdot 10^{-2}$ mbar in der Vakuumkammer zu erhalten. Es schien zunächst unmöglich, Tropfen durch die beiden Löcher in die Vakuumkammer zu bekommen, da durch die Pumpe verursachte Luftverwirbelungen zwischen den Platten die Tropfen ablenkten. Die Justage des Messingröhrchens (vergleiche Kapitel 3.3) zur Führung der Tropfen und der beiden Metallplatten erwies sich also als Geduldspiel aber schließlich erreichte ungefähr ein Tropfen pro Sekunde die Vakuumkammer.

Auch das Fangen der Tropfen erwies sich als sehr problematisch, da die Tropfen auf ihrem Weg in die Kammer eine beachtliche Geschwindigkeit erreichen und die Dämpfung in der Falle bei einem Luftdruck von 10^{-2} mbar kaum mehr gegeben ist. Es dauerte oft mehrere Minuten, bis ein Tropfen in der Falle gespeichert werden konnte. Da sich beim Verdampfen des Wassers und bei den Coulombexplosionen die spezifische Ladung der Tropfen ändert ist es nötig, die Fallenparameter laufend zu verändern. Dies erfordert im Vakuum einige Routine, da der Stabilitätsbereich, das heisst der mögliche Bereich für die Fallenparameter, sehr klein ist. Die Ladezeit für ein Teilchen beträgt jetzt zwischen einigen Minuten und einigen Stunden, je nachdem, wie gut der Elektrospray arbeitet und wieviel Glück man bei der Wahl der Fallenparameter hat. Ein gefangenes Kolloid kann dann bei geschlossenem Plattenventil beliebig lange gespeichert werden.

5.3 Abbildung der Teilchen

Die in der Paulfalle gefangenen Teilchen werden mit Hilfe des gestreuten Lichtes eines Diodenlasers mit einer Leistung von 50 mW bei einer Wellenlänge von 685 nm abgebildet. Um ausschließen zu können, dass es sich um mehrere zusammengeklumpte Kolloide handelt muss die Größe der gefangenen Teilchen bekannt sein. Messungen in der Falle liefern jedoch nur die spezifische Ladung, so dass die Größe mit Hilfe der Intensität des Streulichtes bestimmt werden muss. Deshalb soll hier kurz die Mie-Theorie behandelt werden, die die Lichtstreuung von dielektrischen Partikeln beschreibt. Sie ist für alle kugelförmigen, homogenen Teilchen beliebiger Größe innerhalb des gesamten Bereichs der elektromagnetischen Strahlung gültig (eine detaillierte Herleitung der Theorie findet sich zum Beispiel in (Boh83)). Hunt *et al.* zeigten, dass die Streuung von geladenen metallischen runden Teilchen in guter Näherung der von ungeladenen Teilchen entspricht, so dass hier die Mie-Theorie verwendet werden kann (Boh77).

Von Interesse ist für uns lediglich die in einen bestimmten Raumwinkel im Fernfeld abgestrahlte Leistung und insbesondere deren Abhängigkeit von der Größe des streuenden Teilchens. Führt man den Streuparameter

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (5.1)$$

ein, wobei r den Teilchenradius bezeichnet, so ergibt sich für die Intensität des gestreuten Lichts der Wellenlänge λ , die im Abstand a unter einem Streuwinkel Θ gemessen wird:

$$I = I_0 \lambda^2 \frac{f(\Theta, x, n)}{4\pi^2 a^2} \quad (5.2)$$

Dabei ist I_0 die Intensität des einfallenden Strahls und n der Brechungsindex des Teilchens. Die Funktion $f(\Theta, x, n)$ muß für die beiden möglichen Polarisationsrichtungen der einfallenden linear polarisierten Welle senkrecht zur Streuebene³ und in der Streuebene unterschieden und im allgemeinen Fall mit Hilfe der Mie-Theorie numerisch berechnet werden.

Falls an Teilchen gestreut wird, für deren Streuparameter $x \ll 1$ gilt, genügt die Beschreibung in Dipolnäherung (Rayleigh-Näherung). Für senkrechte Polarisation der einfallenden Welle ergibt sich dann die vom Streuwinkel Θ unabhängige Funktion

$$f_s(\Theta, x, n) = x^6 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \quad (5.3)$$

und für parallele Polarisation erhält man

$$f_p(\Theta, x, n) = x^6 \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right)^2 \cos^2 \Theta \quad (5.4)$$

Der Radius der Teilchen geht im Fall der Rayleigh-Streuung also in der sechsten Potenz in die gestreute Lichtintensität ein, so dass mit Hilfe des gestreuten Lichts eine exakte Größenbestimmung der Teilchen möglich ist. Aus Gleichung 5.3 ergibt sich für den Radius des Teilchens bei senkrecht polarisierter einfallender Welle

$$r = \sqrt[6]{\frac{\lambda^4 a^2 I}{16\pi^4 I_0} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 - 1} \right)^2} \quad (5.5)$$

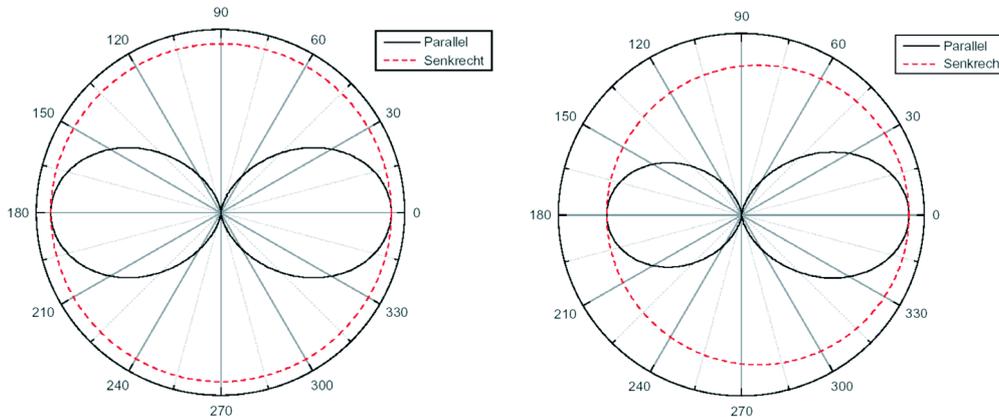


Abbildung 5.5: Winkelabhängigkeit der Lichtstreuung für senkrechte und parallele Polarisation des einfallenden Laserlichts aus (Krä98) (links für einen Streuparameter $x = 0.05$, rechts für $x = 1.14$). Ein Streuwinkel von 180° entspricht Vorwärtsstreuung.

In Abbildung 5.5 sind die Funktionen $f(\Theta, x, n)$ für Streuparameter $x = 0.05$ (Rayleigh-Streuung) und $x = 1.14$ dargestellt. In unserem Experiment ist das einfallende Licht

³Die Streuebene wird aufgespannt durch die Richtung des einfallenden Strahls und die Beobachtungsrichtung.

senkrecht polarisiert und die CCD-Kamera nimmt das gestreute Licht in einem Streuwinkel von 90° auf. Die verwendeten Goldkolloide mit einem Durchmesser von 100 nm haben bei einer Wellenlänge des Diodenlasers von 685 nm einen Streuparameter $x = 0.46$. Es ist aus Abbildung 5.5 ersichtlich, dass selbst für $x = 1.14$ für senkrechte Polarisation die Winkelverteilung noch ungefähr der Rayleigh-Streuung entspricht, so dass zur Radiusbestimmung der verwendeten Teilchen Gleichung 5.5 verwendet werden kann. Die sechste Wurzel in Gleichung 5.5 sorgt dafür, dass Fehler bei der Bestimmung der Intensität des einfallenden und des gestreuten Lichts nur sehr unkritisch in die Radiusbestimmung eingehen.

5.4 Lasersystem

Um die stehende Lichtwelle zu erzeugen, wird ein Nd-YAG-Laser der Firma LeeLaser verwendet. Dieser kann mit Hilfe verschiedener Resonator-Spiegel sowohl bei 1064 nm als auch bei 1320 nm betrieben werden. Der Laser läuft ohne dass zusätzliche Blenden in den optischen Resonator eingebracht werden im sogenannten Multimode, das heißt es schwingen mehrere räumliche Moden an. In diesem Modus liefert er mit einer neuen Kryptonlampe⁴, mit der der Laser gepumpt wird, eine Ausgangsleistung von 50 W bei 1064 nm und 10 W bei 1320 nm. Durch Einbringen von zwei Lochblenden schwingt nur die TEM₀₀ Mode an und die Ausgangsleistung reduziert sich bei gut justierten Blenden auf 8 W bei 1064 nm. In unserem Experiment wird der Laser in diesem Singlemode betrieben, da er hier wesentlich stabiler als im Multimode läuft. Es ist möglich, die momentane Laserleistung mit einer fest installierten Diode zu messen und den Strom durch die Kryptonlampe entsprechend nachzuregeln (lichtstabilisierter Betrieb). Der Regelbereich ist in der Frequenz hierbei auf 1 Hz bis 1 MHz beschränkt, so dass Langzeitschwankungen nicht ausgeglichen werden können. Schnelle Schwankungen können bei richtiger Einstellung jedoch effizient behoben werden, so dass wie in Abbildung 5.6 gezeigt die Leistung der Pulse in einer Pulsfolge in guter Näherung konstant ist.

Der Laser kann zwar innerhalb des optischen Resonators mit Hilfe einer Q-Switch Einheit gepulst werden, es hat sich jedoch herausgestellt, dass der hierfür benötigte Treiber sich nicht exakt genug extern triggern läßt. Deshalb wird außerhalb des Resonators ein akusto-optischer Modulator⁵ verwendet, um die gepulste Stehwelle zu realisieren. Hierbei können ohne Fokussierung des Strahls in den Kristall des AOM ungefähr 50%, mit Fokussierung 70% der Laserleistung in die erste Ordnung, die zur Erzeugung der Stehwelle benutzt wird, gebeugt werden. Es stehen also maximal 5.5 W Laserleistung in der stehenden Welle zur Verfügung. Der Strahl wird mit einer Linse mit einer Brennweite von 30 cm auf den retroreflektierenden Spiegel fokussiert, was in der Mitte der Falle zu einem Strahldurchmesser von $500 \pm 20 \mu\text{m}$ führt. Der Strahldurchmesser wurde bestimmt, indem eine Rasierklinge schrittweise mit einer Mikrometerschraube in den Strahl geschoben und die durchgelassene Leistung mit einer Photodiode aufgezeichnet wurde.

Für die Erzeugung der stehenden Lichtwelle ist es wichtig, dass die Kohärenzlänge

⁴Zu Beginn der Versuche brannte die Kryptonlampe durch, worauf eine neue bestellt und eingebaut wurde. Zuvor betrug die Ausgangsleistung nur maximal 25 W im Multimode-Betrieb und 4,5 W im Singlemode-Betrieb bei 1064 nm.

⁵Es wurde ein AOM der Firma Automates et Automatismes (A.A.) vom Typ MT 15 verwendet.

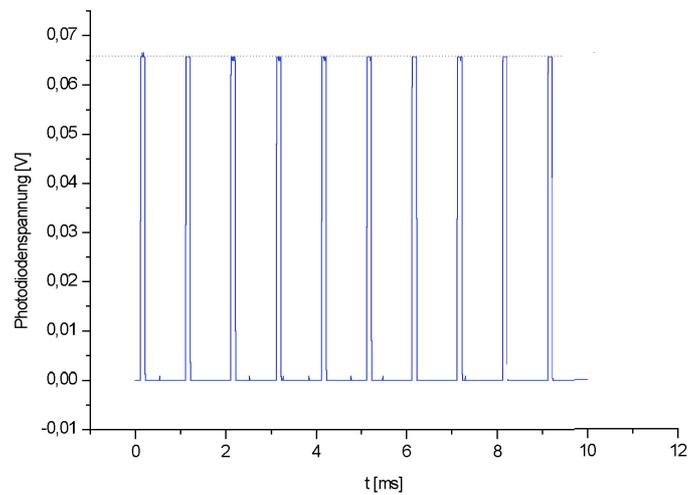


Abbildung 5.6: Leistung in der gepulsten Stehwelle für 10 Pulse mit einem Abstand von 1 ms und einer Länge von $150 \mu\text{s}$. Die Laserleistung wurde mit einer Photodiode aufgenommen und ist für alle Pulse in guter Näherung gleich.

des Lasers mindestens dem doppelten Abstand von der Fallenmitte zum retroreflektierenden Spiegel (ungefähr 30 cm) entspricht. Um dies zu testen wurde ein Michelson-Interferometer aufgebaut, womit eine Kohärenzlänge von mindestens einem Meter nachgewiesen werden konnte.

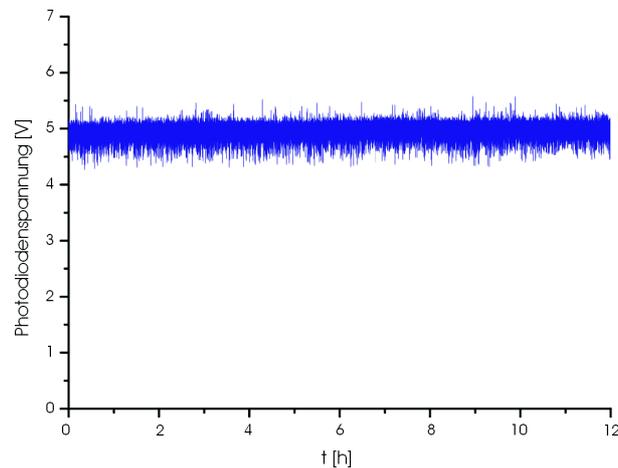


Abbildung 5.7: Laserleistung in der nullten Ordnung des akusto-optischen Modulators gemessen über 12 Stunden.

Weil ein Experiment über 20 Stunden dauern kann, darf die Laserleistung auch auf diese Zeit gesehen keine zu großen Schwankungen aufweisen. Zur Überprüfung wurde die nullte Ordnung nach dem AOM während der Experimente mit Hilfe einer Photodi-

ode und eines Speicheroszilloskops aufgezeichnet. Der Verlauf der Laserleistung über 12 Stunden ist in Abbildung 5.7 gezeigt. Die Schwankungen betragen ungefähr 10 %, was für unser Experiment ausreichend ist.

5.5 Steuerung des Experiments

Aufgrund der langen Versuchsdauern ist es nötig, das Experiment so weit wie möglich zu automatisieren. Hierzu wird ein Stanford Research Funktionsgenerator DS 345 mit dem Computer über eine GPIB-Schnittstelle programmiert, der dann entsprechende Spannungen an den Treiber des akusto-optischen Modulators ausgibt. Hierzu wurde ein LABVIEW-Programm geschrieben, um die gewünschte Pulsfolgen erzeugen zu können. Es können dadurch beliebige Folgen von Rechteckpulsen mit variablen Pulsdauern und Pulsabständen realisiert werden.

Für die Auswertung des Experiments wird die durch die Lichtpulse auf das Teilchen übertragene Energie, das heisst die Amplitude der Teilchenbewegung in der Falle nach den Pulsen benötigt. Sie wird ermittelt indem einige Millisekunden nach dem letzten Puls ein Bild der Bewegung des Teilchens von der CCD-Kamera aufgenommen und gespeichert wird. Hierzu gibt der Funktionsgenerator ein Triggersignal an ein Delay und dieses anschließend mit einer einstellbaren Verzögerung von 1 ms bis 10 ms an die Kamera weiter. Danach wartet das Programm zehn Sekunden, bis die Teilchenbewegung vollständig ausgedämpft ist und gibt eine neue Pulsfolge mit veränderten Pulsabständen und gleichen Pulsdauern an den Funktionsgenerator aus. Die Pulsabstände werden typischerweise von 50 μs bis 10ms in Schritten von 50 μs durchgefahen. Nachdem jeder Pulsabstand realisiert wurde, wird das ganze 50 mal wiederholt, um jedes Experiment über alle Anfangsgeschwindigkeiten und Anfangspositionen des Teilchens in der stehenden Lichtwelle mitteln zu können. Damit werden pro Meßreihe bis zu 9850 Bilder aufgenommen, die anschließend ausgewertet werden (siehe Kapitel 6).

Kapitel 5 Experimenteller Aufbau und Durchführung

6 Experimentelle Ergebnisse

6.1 Aufladung und Fangen von Teilchen

In der aufgebauten Paulfalle konnten die in Tabelle 6.1 gezeigten Teilchen bei den angegebenen Fallenparametern gefangen werden. Die Anthracenstaubpartikel wurden mit Hilfe einer Spritze in die Falle injiziert und durch Reibung aufgeladen. Zur Ionisierung aller Kolloide wurde die Elektrospray-Ionisierungsmethode verwendet. Dabei werden zunächst geladene Tropfen produziert, die in der Falle gefangen werden. Nach einigen Sekunden, in denen das Lösungsmittel, in dem die Kolloide gelöst sind, verdampft und einige Coulomb-Explosionen stattfinden, bleiben bei geeigneter Verdünnung der kolloidalen Suspension einzelne Kolloide in der Falle zurück. Während des Verdampfens des Lösungsmittels erhöht sich die spezifische Ladung der Tropfen. Deshalb muss die Frequenz der angelegten Wechselspannung erhöht werden, um eine stabile Bewegung der Tropfen in der Falle zu erreichen. Die in Tabelle 6.1 angegebenen Frequenzen sind diejenigen, bei denen die in der Falle zurückbleibenden Kolloide gefangen wurden. Die dargestellten Werte für die spezifischen Ladungen der Teilchen wurden ermittelt, indem die Verschiebung der Teilchen in z-Richtung in Abhängigkeit von der dafür zwischen die Deckelektroden angelegte Gleichspannung gemessen wurde. Bei Kenntnis der Antriebsfrequenz und Antriebsspannung ergeben sich nach Gleichung 2.53 die angegebenen spezifischen Ladungen. Um eine Verschiebung um 5 mm zu erreichen, ist je nach Teilchengröße und Frequenz der angelegten Wechselspannung eine Gleichspannung von maximal 50 V nötig.

Das Fangen von Teilchen bei Normaldruck ist relativ einfach, da durch Luftreibung der Stabilitätsbereich, das heisst der mögliche Bereich für die Fallenparameter für stabile Bewegungen des Teilchens, sehr stark vergrößert ist. Im Vakuum kann es mehrere Stunden dauern, bis ein Kolloid in der Falle gefangen wird, da nur wenige der vom Elektrospray produzierten Tropfen durch die beiden differentiellen Pumpstufen in die Vakuumkammer gelangen¹. Außerdem sind für Frequenz und Amplitude der an die Falle angelegten Wechselspannung im Vakuum nur kleine Bereiche möglich, um das Kolloid stabil zu fangen. Eine Veränderung der Frequenz um weniger als 10 Hz kann zum Beispiel bei den 100 nm Goldkolloiden schon Instabilität und damit Verlust des Teilchens zur Folge haben.

Zur Realisierung des δ -kicked rotor, das heisst für die benötigte ortsabhängige Kraft, müssen die gefangenen Teilchen einen kleineren Durchmesser besitzen als die Wellenlänge der stehenden Lichtwelle. Um sicherzustellen, dass wirklich einzelne Kolloidteilchen in der Paulfalle gefangen werden, wurde die absolute Größe der gefangenen Goldkolloide

¹Zur Speicherung der Teilchen im Vakuum ist es sehr wichtig, dass der Elektrospray im single-jet-Modus betrieben wird, da ansonsten alle erzeugten Tropfen bereits die erste Metallplatte der differentiellen Pumpstufen nicht passieren können.

Teilchen	Größe	Q/M	V_{ac}	Ω
Anthracenstaub	$\approx 200\mu\text{m}$	$(5 - 9) \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$	2000 V	$2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$
Polystyrenlatexkolloide	$6.3 \mu\text{m}$	$0.02 - 0.04 \text{ C/kg}$	1000 V	$2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$
Polystyrenlatexkolloide	$6.3 \mu\text{m}$	$0.02 - 0.04 \text{ C/kg}$	1500 V	$2\pi \cdot 180 \text{ Hz}$
Polystyrenlatexkolloide	800 nm	$0.05 - 0.08 \text{ C/kg}$	1200 V	$2\pi \cdot 300 \text{ Hz}$
Polystyrenlatexkolloide	530 nm	$0.08 - 0.1 \text{ C/kg}$	1000 V	$2\pi \cdot 300 \text{ Hz}$
Polystyrenlatexkolloide	280 nm	$0.1 - 0.3 \text{ C/kg}$	800 V	$2\pi \cdot 400 \text{ Hz}$
Goldkolloide	150 nm	$0.05 - 0.2 \text{ C/kg}$	1000 V	$2\pi \cdot 500 \text{ Hz}$
Goldkolloide	100 nm	$0.1 - 0.5 \text{ C/kg}$	700 V	$2\pi \cdot 400 \text{ Hz}$

Tabelle 6.1: Verschiedene in der Paulfalle gefangene Teilchen mit den entsprechenden Fallenparametern, bei denen die Bewegung des Teilchen stabil ist.

mit Hilfe des gestreuten Lichts bestimmt. Hierzu wurde die CCD-Kamera mit dem Diodenlaser geeicht und es ergaben sich aus den gemessenen Streulichtintensitäten von ca. 0.1 nW bei einem erfassten Raumwinkel von 0.2 sr die Teilchenradien mit Gleichung 5.5. Insgesamt wurden die gestreuten Intensitäten von 10 gefangenen Goldkolloiden gemessen. Bei acht Teilchen wurde eine Größe von $100 \text{ nm} \pm 20 \text{ nm}$ bestimmt. Die anderen zwei Teilchen hatten eine Größe von $200 \text{ nm} \pm 18 \text{ nm}$. Wir können also einzelne 100 nm große Goldkolloide fangen und beobachten. Goldkolloide mit einem Durchmesser kleiner als 100 nm können mit unserer Abbildung nicht mehr beobachtet werden, da die gestreute Lichtintensität mit der sechsten Potenz des Teilchenradius abnimmt. Die bei einem 20 nm grossen Goldkolloid auf die Kamera treffende gestreute Lichtleistung wäre zum Beispiel im Bereich von weniger als einem Pikowatt und kann mit dem verwendeten Kamerasystem nicht mehr nachgewiesen werden.

6.2 Wechselwirkung der Teilchen mit der stehenden Lichtwelle

Um die Wechselwirkung mit der gepulsten stehenden Lichtwelle in Abhängigkeit vom Abstand zwischen den Lichtpulsen zu untersuchen, wurde 1 bis 10 Millisekunden nach den Pulsen ein Bild der Auslenkung des Teilchens mit einer Belichtungszeit von 20 ms aufgenommen. In Abbildung 6.1 sind zwei aufgenommene Bilder nach jeweils 30 Pulsen gezeigt. Beim linken Bild ist der Pulsabstand so gewählt, dass sich keine Resonanz im Energieübertrag ergibt². Bei Variation der Frequenz der Lichtpulse treten für gewisse Werte sehr große Energieüberträge auf das Teilchen auf. Die Teilchenbewegung im rechten Bild hat eine Amplitude von ca. 1 mm.

Insgesamt wurden 10 Teilchen in die Falle geladen und deren Wechselwirkung mit der stehenden Lichtwelle untersucht. In Abbildung 6.2 sind die Ergebnisse für ein 100 nm großes Goldkolloid zusammengefasst. Auf der x -Achse ist jeweils der Pulsabstand in μs und auf der y -Achse die Amplitude der Teilchenbewegung 10 ms nach dem letzten

²Die Amplitude der Teilchenbewegung ist ein Maß für die auf das Teilchen übertragene kinetische Energie.

6.2 Wechselwirkung der Teilchen mit der stehenden Lichtwelle

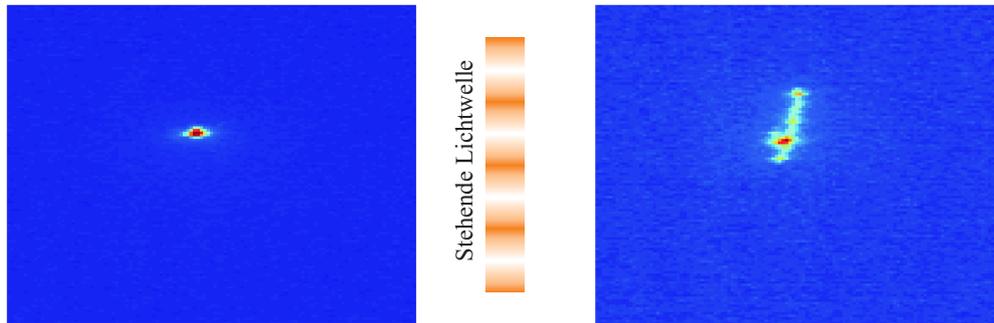


Abbildung 6.1: Amplitude der Teilchenbewegung in der Paulfalle nach den Stehwellenpulsen. Auf der linken Seite ist die Pulsfrequenz so gewählt, dass keine Resonanz in der übertragenen Energie auftritt. Auf der rechten Seite ist die Bewegungsamplitude für einen Resonanzfall gezeigt. Sie beträgt ca. 1 mm. Die stehende Lichtwelle ist vertikal orientiert.

Puls aufgetragen.

In der ersten Messung wurden 20 Pulse mit einer Pulslänge von $70 \mu\text{s}$ für verschiedene Pulslängen erzeugt. Es wurde mit einem Pulsabstand von $200 \mu\text{s}$ begonnen und 10 ms nach dem letzten Puls ein Bild aufgenommen. Die Pulsabstände wurden dann in 196 Schritten von $50 \mu\text{s}$ erhöht, so dass der maximale Pulsabstand 10 ms beträgt. Zwischen zwei Pulsfolgen muss ca. 10 Sekunden gewartet werden, da der Druck in der Vakuumkammer so gewählt ist, dass erst dann die durch die Stehwellenpulse verursachte Bewegung des Teilchens durch Luftreibung ausgedämpft ist. Hierdurch werden gleiche Anfangsbedingungen für alle Experimente garantiert. Um über alle Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten des Teilchens in der stehenden Lichtwelle mitteln zu können, wurde diese Folge von Experimenten 50 mal wiederholt. Insgesamt wurden also 9850 Bilder von der CCD-Kamera aufgenommen.

Zu dieser Messung sind in Abbildung 6.2 oben zwei verschiedene Auswertungsbilder gezeigt. Jede Spalte des Bildes auf der linken Seite ist das Ergebnis der Zeilensummati- on der zu einem festen Pulsabstand aufgenommenen Kamerabilder und anschliessenden Mittelung über die 50 Realisierungen. Das Bild gibt also die gemittelte Position und Amplitude des Teilchens nach den 20 Pulsen in Abhängigkeit der Pulsabstände an. Maximale Intensitäten, das heisst hohe Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in diesem Bild bedeuten, dass für die entsprechenden Pulslängen die durch die stehende Lichtwelle übertragene kinetische Energie klein ist. Es ist zu sehen, dass für bestimmte Pulslängen, zum Beispiel für ca. $2000 \mu\text{s}$ die Amplituden der Teilchenbewegungen nach den Pulsen sehr groß sind, so dass hier eine Resonanz in der übertragenen Energie vorliegt.

Die verschiedenen Messungen unterscheiden sich durch verschiedene Pulslängen und die Anzahl der Pulse. In den Bildern auf der rechten Seite handelt es sich um die selben Messungen, jedoch wurde hier für jeden Pulsabstand die Größe der Oszillationsamplitude nach den Pulsen ausgemessen und über die 50 Realisierungen gemittelt. Die Resonanzen werden hier wesentlich deutlicher.

Für das in Abbildung 6.2 gezeigte Teilchen konnten insgesamt 4 Messungen durchgeführt werden, bevor ein Stromausfall dazu führte, dass das Teilchen verloren ging.

Kapitel 6 Experimentelle Ergebnisse

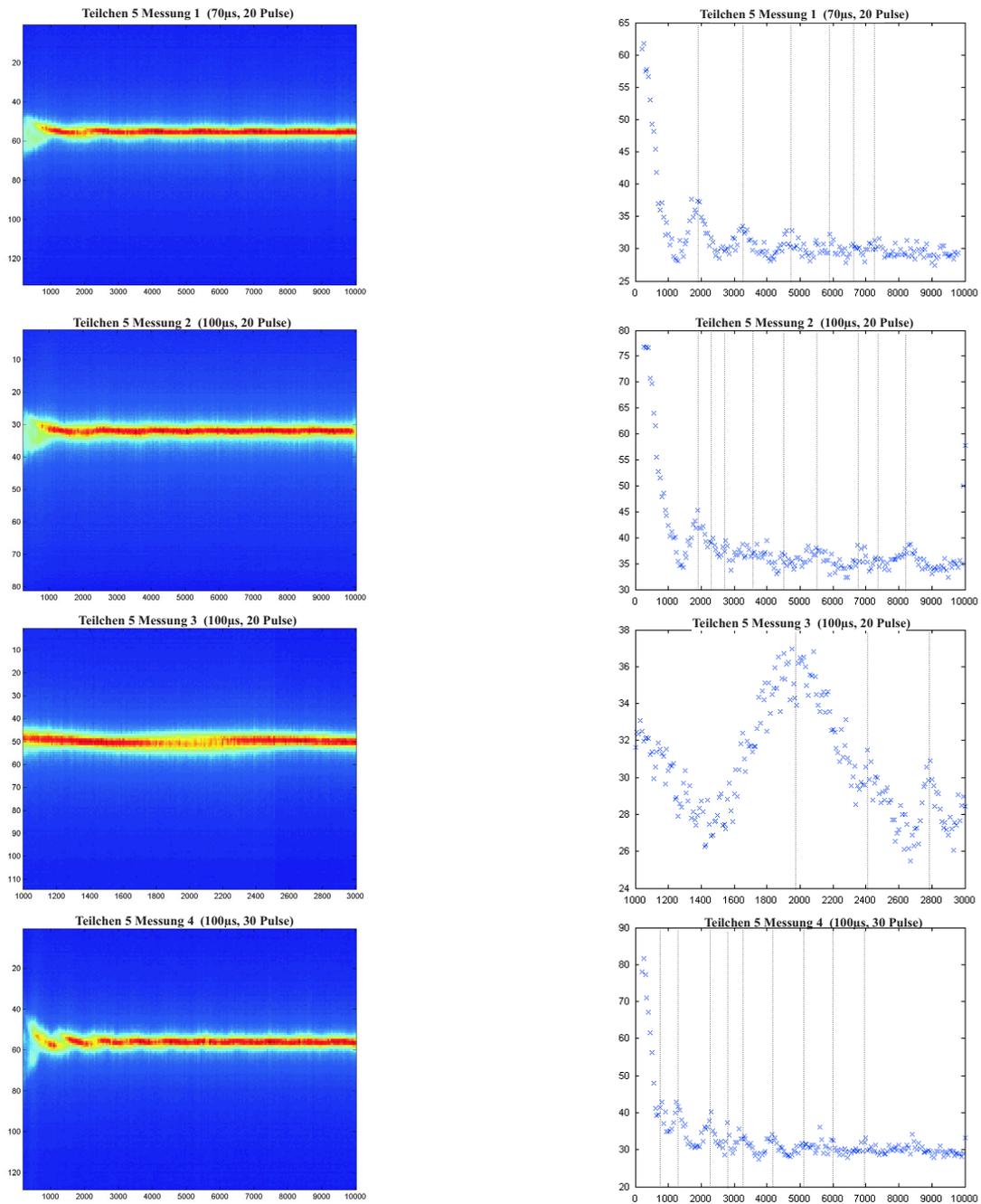


Abbildung 6.2: Durch die stehende Lichtwelle übertragene Energie auf ein gefangenes 100 nm Goldkolloid. Auf der x-Achse sind die Pulsabstände in μs angegeben. Die Frequenz der an die Falle angelegten Wechselspannung ist 428 Hz und die Skalarfrequenz in radialer Richtung beträgt 15 Hz. Die Bilder auf der linken Seite sind durch Zeilensummen von nach den Pulsen aufgenommenen Bildern entstanden. In den Diagrammen auf der rechten Seite ist die Amplitude der Teilchenbewegung nach den Pulsen aufgetragen.

6.2 Wechselwirkung der Teilchen mit der stehenden Lichtwelle

Gemäß der Theorie für einen δ -kicked rotor im harmonischen Potential liegen die Resonanzen im Energieübertrag genau bei Pulsfrequenzen, die ganzzahligen Vielfachen der an der Bewegung des Teilchens in der Falle beteiligten Frequenzen entsprechen. Die Frequenz der an die Falle angelegten Wechselspannung war bei diesem Teilchen bei allen Messungen 428 Hz. Nach Gleichung 2.21 ist das Frequenzspektrum der Bewegungen in der Paulfalle in radialer Richtung gegeben durch³:

$$\omega_{r,n} = \left(n + \frac{1}{2}b_r \right) \Omega, \quad 0 \leq n < \infty \quad (6.1)$$

$$\omega_{r,n} = - \left(n + \frac{1}{2}b_r \right) \Omega, \quad -\infty < n < 0 \quad (6.2)$$

Die Säkularfrequenz in radialer Richtung ist bei uns ca. 20 Hz, so dass bei

$$\omega = k \cdot (n \cdot 428 \pm 20) \text{ Hz} \quad \text{mit} \quad k, n \in \mathbb{N} \quad (6.3)$$

Resonanzen auftreten sollten.

Bei der ersten Messung mit Pulslänge 70 μs und 20 Pulsen liegen die Resonanzen nach Abbildung 6.2 bei 135 Hz, 150 Hz, 170 Hz, 213 Hz, 308 Hz, 550 Hz und 2860 Hz. Diese Lage der Resonanzen lässt sich nicht mit Gleichung 6.3 vereinbaren.

Aus der nächsten aufgetragenen Messung für Pulsängen von 100 μs und 20 Pulse ergeben sich folgende Resonanzfrequenzen: *125* Hz, 136 Hz, 145 Hz, *181* Hz, 225 Hz, *275* Hz, 362 Hz, 425 Hz und *532* Hz, wobei die kursiv gedruckten Frequenzen den breiten Resonanzen entsprechen. Die Resonanzen verschieben sich also mit veränderter Pulslänge.

Bei der dritten Messung ist die Pulslänge und Anzahl gleich wie in der zweiten, jedoch wurden hier die Pulsabstände zwischen 1 ms und 3 ms in Schritten von 10 μs variiert. Es ist zu sehen, dass noch zusätzliche Nebenresonanzen bei 438 Hz und 532 Hz existieren, die in der zweiten Messung nicht aufgelöst werden konnten.

In Messung 4 beträgt die Pulslänge weiterhin 100 μs , es werden nun aber 30 Pulse erzeugt. Auch hier verändert sich die Lage und Anzahl der Resonanzen. Sie liegen jetzt bei 143 Hz, 178 Hz, *195* Hz, *241* Hz, *303* Hz, 353 Hz, *444* Hz, *787* Hz, und 1282 Hz, wobei wieder die Hauptresonanzen kursiv gedruckt sind.

Die Tatsache, dass sich die Resonanzen bei veränderter Pulslänge verschieben, würde sich bei Vernachlässigung der Teilchenbewegung in der Falle zwischen den Pulsen mit einem einfachen Argument erklären lassen: bei kürzeren Pulsen mit gleicher Pulsstärke wirken die gleichen Beschleunigungen, das Teilchen erhält aber eine kleinere Geschwindigkeit. Wenn das Auftreten der Resonanzen nun dadurch erklärt wird, dass das Teilchen durch die Pulse eine Geschwindigkeit erhält, die es bis zum nächsten Puls gerade ein Vielfaches der Wellenlänge der stehenden Lichtwelle zurücklegen lässt, müssten die Resonanzfrequenzen im gleichen Verhältnis ansteigen, wie die Pulsängen verkleinert würden. Außerdem könnte auf diese Weise die zeitlich äquidistante Lage der Resonanzen erklärt werden. Ein Vergleich der Messungen 1 und 2 zeigt jedoch, dass die Resonanzfrequenzen sich nicht entsprechend verhalten. Auch sollte sich die Lagen der Resonanzen bei Änderung der Anzahl der Lichtpulse in diesem Bild nicht ändern.

³Die durch die gepulste stehende Lichtwelle auf das Teilchen ausgeübte Kraft hat keine Komponente in axialer Richtung, so dass hier nur die Fallbewegungen in radialer Richtung betrachtet werden müssen.

Kapitel 6 Experimentelle Ergebnisse

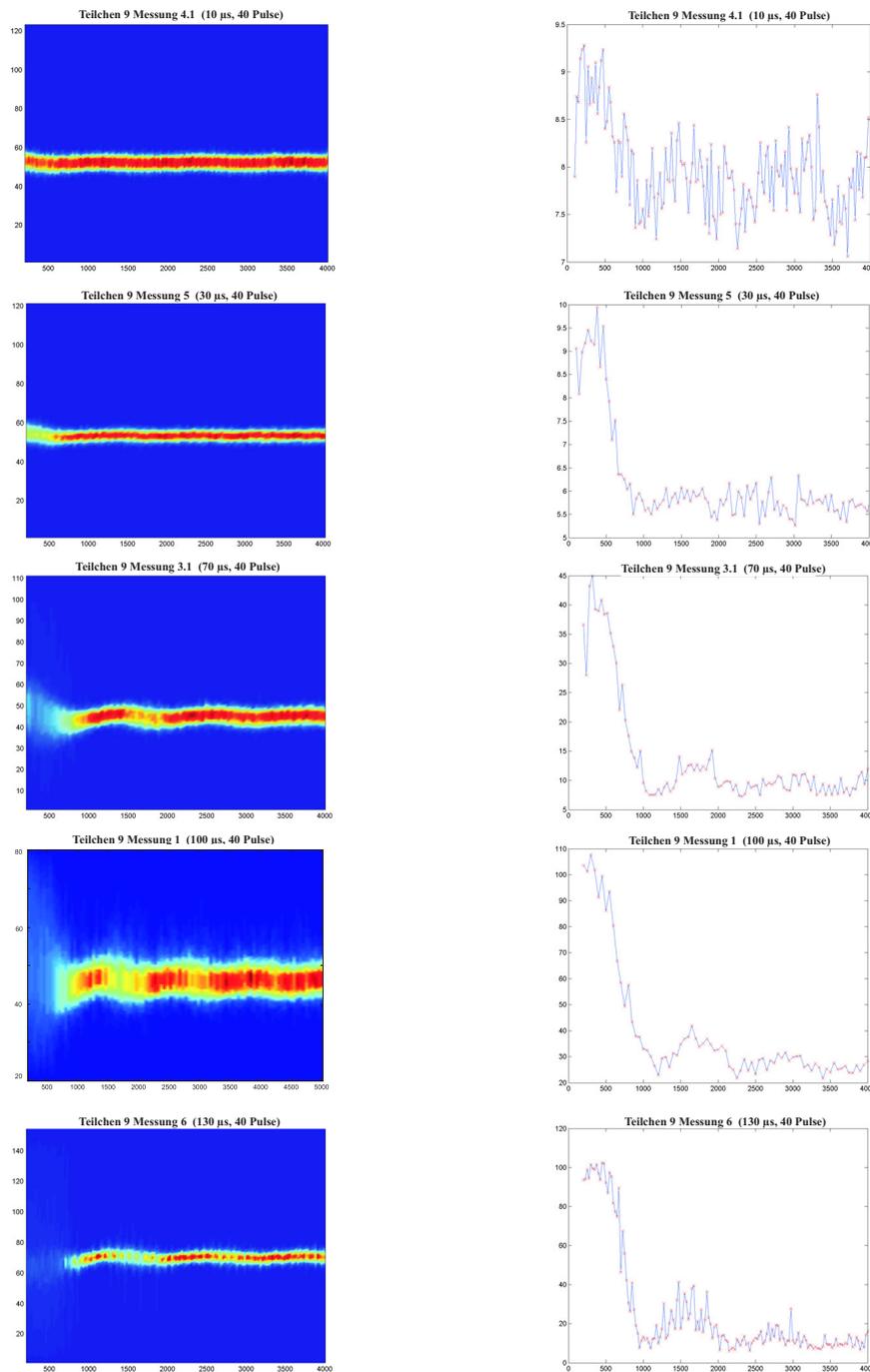


Abbildung 6.3: Durch die stehende Lichtwelle übertragene Energie auf ein gefangenes 100 nm Goldkolloid. Auf der x-Achse sind die Pulsabstände in μs aufgetragen. Die Bilder sind wie in Abbildung 6.2 gezeichnet. Die Frequenz der an die Falle angelegten Wechselspannung ist hier 195 Hz und die radiale Skalarfrequenz beträgt 25 Hz.

Bisher konnte die Lage der Resonanzen leider nicht erklärt werden. Auch erste durchgeführte Simulationen der Bewegung der Teilchen in der Paulfalle bei Anwesenheit der Lichtpulse beschreiben die experimentell gemessenen Daten nicht ausreichend. Die Tatsache, dass die Theorie des δ -kicked rotors im harmonischen Potential nicht zur Beschreibung ausreicht könnte dadurch erklärt werden, dass hier mehrere, nicht unabhängige Bewegungen in der Falle beteiligt sind und dass hier natürlich Pulse endlicher Länge erzeugt werden, für die die Beschreibung als δ -kicks nicht gültig ist. Ein weiteres Problem ist, dass die maximale Belichtungszeit unserer CCD-Kamera nur 20 ms beträgt, womit nach den Pulsen nur etwa eine halbe Schwingung des Teilchens aufgenommen werden kann. Dadurch könnten Fehler in der Auswertung verursacht werden. Die nächsten Experimente werden mit einer neuen Kamera mit wesentlich längerer Belichtungszeit durchgeführt werden.

In Abbildung 6.3 sind die Ergebnisse für ein weiteres 100 nm Goldkolloid in der stehenden Lichtwelle aufgetragen. Die Frequenz der angelegten Wechselfspannung beträgt hier 195 Hz, also weniger als die Hälfte des oben besprochenen Kolloids. Im Prinzip verhalten sich die Resonanzen bei den verschiedenen Messungen gleich wie oben, so dass dieses Teilchen hier nicht ausführlich besprochen werden soll.

6.3 Coulomb-Kristalle

Wuerker *et al.* beschrieben bereits 1959, dass mehrere in einer Paulfalle gefangenen Aluminiumteilchen mit einer Größe von einigen Mikrometern aufgrund der abstoßenden Coulomb-Wechselwirkung einen Kristall bilden können, nachdem die kinetische Energie der einzelnen Partikel durch Reibung verringert wurde (Wue59)⁴. Die Teilchen ordnen sich vorzugsweise in der $z=0$ -Ebene an, da für $a = 0$, das heißt bei Abwesenheit einer Gleichspannung zwischen Ringelektrode und Deckelektroden die Falle in axialer Richtung doppelt so steil ist wie in radialer Richtung. Durch Anlegen einer Gleichspannung können auch drei-dimensionale Kristalle erzeugt werden (für $V_{dc} = \frac{QV_{ac}^2}{4M\Omega^2 z_0^2}$ ist die rücktreibende Kraft in alle Raumrichtungen gleich groß). 1987 ist es Walther *et al.* (Blü88) und Blatt *et al.* (Cas88) gelungen, auch Ionen in einer Paulfalle mit optischer Seitenbandkühlung so weit zu kühlen, dass sie Kristalle bilden. In einer linearen Paulfalle, die nicht aus einer Ringelektrode und Deckelektroden, sondern aus vier zylindrischen Stangen besteht, ordnen sich die Ionen regelmäßig in einer linearen Kette mit einem Abstand von einigen Mikrometern an, so dass sie noch einzeln mit Lasern adressiert werden können. Dieses System wird heute als mögliche Realisierung eines Quantencomputers untersucht (siehe zum Beispiel (Näg90)).

Ob mehrere gefangene Teilchen in der Paulfalle einen Kristall bilden, hängt im Wesentlichen von der Stärke der Coulombwechselwirkung relativ zur thermischen Energie der Teilchen ab. Allgemein wird der Coulomb-Kopplungsparameter Γ definiert als

$$\Gamma = \frac{\langle E_{\text{coulomb}} \rangle}{Nk_B T} \quad (6.4)$$

Dabei stehen die Klammern für die Summe über alle Teilchenpaare und N für die Zahl der gefangenen Teilchen. Nach Slattery *et al.* (Sla80) sollte für $\Gamma > 170$ Kristallisation

⁴Auch in anderen Gebieten der Physik zum Beispiel bei Elektronen auf flüssigem Helium (Lei87) oder bei in Wasser gelösten kolloidalen Teilchen (Bub99) treten solche Wignerkrystalle auf (benannt nach Eugene Wigner, der sie 1938 vorausgesagt hat.)

eintreten. Bei uns beträgt mit typischen Abständen der Teilchen von 5 mm und spezifischen Ladungen von 0.03 C/kg für 6.3 μm Polystyrenlatexkolloide bei 5 Teilchen in der Falle der Kopplungsparameter ungefähr 10^5 , so dass sich ein Coulombkristall ausbildet⁵.

In Abbildung 6.4 ist eine in unserer ersten Falle bei Normaldruck aufgenommene Folge von zwei-dimensionalen Coulombkristallen aus bis zu 15 Teilchen zu sehen. Es handelt sich hierbei um 6.3 μm große Polystyrenlatexkolloide, die mit Hilfe des Elektrosprays in die Falle gebracht wurden und angestrahlt mit einer Schwanenhalslampe mit bloßem Auge zu sehen sind. Hierbei wurde die Gravitation nicht durch eine Gleichspannung zwischen den Deckelektroden ausgeglichen, so dass die Teilchen nicht exakt in der x-y-Ebene schwingen. Voraussetzung für einen regelmäßigen Kristall ist, dass alle gefangenen Teilchen ähnliche spezifischen Ladungen besitzen, was mit unserer Lademethode gut erfüllt werden kann. Durch Erhöhung der angelegten Fallenspannung werden Teilchen mit kleiner und bei Verkleinerung der Fallenspannung solche mit großer spezifischer Ladung instabil. Auf diese Art und Weise konnte erreicht werden, dass alle gefangenen Kolloide eine spezifische Ladung $Q/M = 0.03 \pm 0.01$ C/kg hatten. Damit trägt jedes Teilchen ungefähr $2.5 \cdot 10^5$ Elementarladungen.

Durch die Coulombwechselwirkung werden die Differentialgleichungen für die verschiedenen Teilchen gekoppelt und sind deshalb nicht mehr analytisch lösbar. In (Bed93) werden zweidimensionale Kristalle aus endlich vielen in einem parabolischen Potential gefangenen Teilchen numerisch untersucht. Das Ergebnis ist, dass sich die Teilchen auf konzentrischen Schalen um den Fallenmittelpunkt anordnen. Die berechnete und bei uns beobachtete Teilchenzahl pro Schale für verschiedene Kristalle ist in Tabelle 6.2 dargestellt.

Es ist zu sehen, dass die Rechnungen von Bedanov *et al.* bis auf den Kristall mit 10 Teilchen mit unseren Kristallen übereinstimmen. Die Abweichung ergibt sich wahrscheinlich durch ein nicht perfekt parabolisches Pseudopotential, denn in (Bed93) wird gezeigt, dass das berechnete globale Energieminimum sehr nahe bei lokalen Energieminima liegen kann, so dass kleine Abweichungen vom angenommenen Potential eine andere Anordnung der Teilchen bewirken kann. Die Übereinstimmung der Gleichgewichtsanordnungen zeigt, dass trotz der nicht parabolisch geformten Elektroden das Potential in der Falle in guter Näherung harmonisch ist.

Leider war es nicht möglich, gleichzeitig mehr als 15 Kolloide zu fangen, da ein neu hinzukommendes jeweils ein anderes aus der Falle verdrängte. Deshalb konnte eine dritte Schale nicht realisiert werden.

⁵Für die Temperatur wurde dabei 300 K eingesetzt.

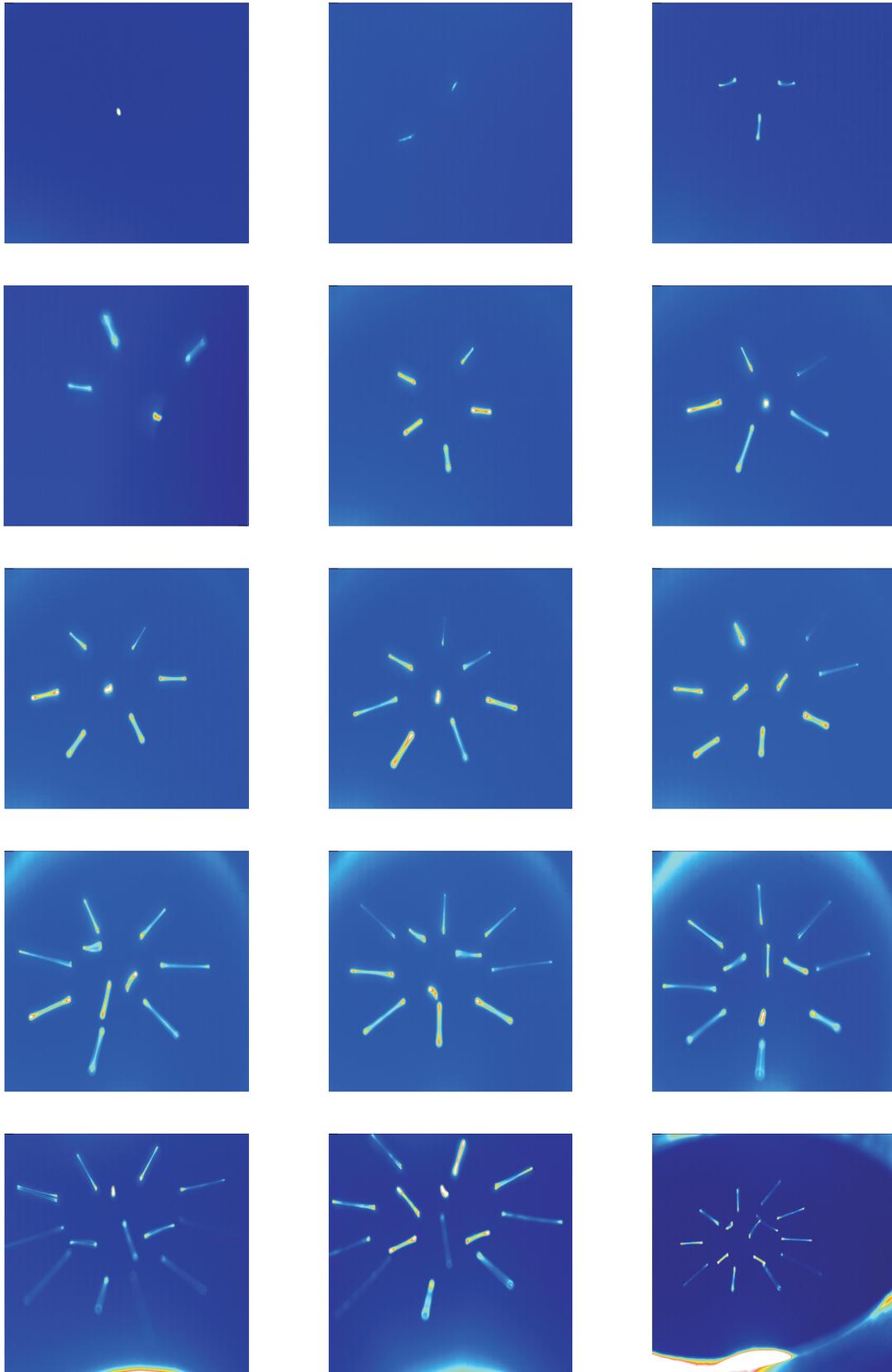


Abbildung 6.4: Folge von Coulombkristallen aus bis zu 15 Polystyrenlatexkolloiden mit einem Durchmesser von $6.3 \mu\text{m}$.

Teilchenzahl	Vorhergesagte Teilchen- zahl pro Schale	Beobachtete Teilchen- zahl pro Schale
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	3	3
5	5	5
6	1, 5	1, 5
7	1, 6	1, 6
8	1, 7	1, 7
9	2, 7	2, 7
10	2, 8	3, 7
11	3, 8	3, 8
12	3, 9	3, 9
13	4, 9	4, 9
14	4, 10	4, 10
15	5, 10	5, 10

Tabelle 6.2: Vergleich der von (Bed93) vorausgesagten und hier beobachteten Teilchenzahlen pro Schale für zwei-dimensionale Coulomb-Kristalle in einem parabolischen Potential.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Staatsexamensarbeit wurde eine Paulfalle für makroskopische Teilchen zur Realisierung von Experimenten zum deterministischen Chaos aufgebaut. Als zu speichernde Teilchen wurden Kolloide gewählt, da diese in nahezu beliebigen, gut definierten Größen erhältlich sind. Es konnten Polystyrenlatex-Kolloide mit Durchmessern von 280 nm bis $6.3 \mu\text{m}$ und Goldkolloide mit Durchmessern von 150 nm und 100 nm gefangen werden. Zur Ionisierung der Teilchen wurde die Elektrosprayionisation verwendet, womit bei den Goldkolloiden eine spezifische Ladung von bis zu 0.3 C/kg möglich ist. Der Nachweis der gefangenen Teilchen erfolgt über das gestreute Licht einer Laserdiode. Es stellte sich heraus, dass bei den 100 nm Goldkolloiden die Nachweisgrenze unserer Abbildung erreicht ist, so dass kleinere Teilchen nicht unserem Kamerasystem beobachtet werden können. Die Grund hierfür ist, dass die gestreute Lichtintensität mit der sechsten Potenz des Teilchenradius abnimmt. Die Bewegung der Teilchen in einer idealen Paulfalle, in der das erzeugte Potential exakt ein Quadrupolpotential ist, ist eine Überlagerung mehrerer unabhängiger harmonischer Schwingungen. Das Frequenzspektrum der beteiligten Bewegungen hängt von der Frequenz und Größe der an die Falle angelegten Wechselspannung und der spezifischen Ladung ab.

Zur Realisierung der Chaos-Experimente wurde das im Vakuum bei einem Druck von ungefähr $2 \cdot 10^{-5}$ mbar gefangene Teilchen in eine stehende Lichtwelle, die von einem Nd-YAG-Laser erzeugt wird, gebracht. Die stehende Lichtwelle wird mit Hilfe eines akustooptischen Modulators gepulst. Während eines Lichtpulses erfährt das Teilchen aufgrund der Dipolwechselwirkung mit dem Licht eine Kraft in Richtung des Feldgradienten. Es ist dabei notwendig, dass das Teilchen wesentlich kleiner ist als die Wellenlänge der stehenden Lichtwelle, die 532 nm beträgt. Deshalb werden die Experimente ausschließlich mit den 100 nm Goldkolloiden durchgeführt. Mit Hilfe der Intensität des gestreuten Lichtes wurde der tatsächliche Radius der Teilchen bestimmt. Dadurch konnte ausgeschlossen werden, dass es sich bei den gefangenen Teilchen um Klumpen mehrerer Goldkolloide handelt. Die Länge der Lichtpulse ist viel kleiner als deren Abstand, so dass in guter Näherung δ -förmige Kraftpulse realisiert werden. Zwischen den Pulsen folgt das Teilchen den ungedämpften Bewegungen in der Falle. Für den Fall eines δ -kicked rotor in einem harmonischen Potential sagt die Theorie voraus, dass im Resonanzfall, das heißt wenn die Pulsfrequenz einem ganzzahligen Vielfachen der Frequenz der harmonischen Schwingung des Teilchens entspricht, sogenannte stochastische Netze endlicher Dicke existieren. Diese Netze überdecken den gesamten Phasenraum. Wenn die Anfangsbedingungen des Teilchens auf dem Netz liegen sollten durch die stehende Lichtwelle beliebig große Energieüberträge auf das gefangene Teilchen möglich sein. Dies sollte durch Messung der Amplitude der Bewegungen des Teilchens, die ein Maß für die übertragene kinetische Energie ist, zu überprüfen sein.

Kapitel 7 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden zwischen 20 und 30 Lichtpulse mit verschiedenen Pulsabständen erzeugt. Durch Aufnahme der kinetischen Energie des Teilchens konnte dessen Dipolwechselwirkung mit der Stehwelle nachgewiesen werden. Die gemessenen Energieüberträge weisen tatsächlich gut aufgelöste Resonanzen für gewisse Pulsabstände auf, allerdings liegen diese nicht bei Vielfachen der verschiedenen auftretenden Fallenfrequenzen. Die Theorie der stochastischen Netze, die nur ein harmonisches Potential berücksichtigt kann hier also nicht angewandt werden. Die aufgenommenen Daten werden momentan noch ausgewertet, konnten bislang jedoch nicht ausreichend erklärt werden.

In nächster Zukunft werden zunächst noch Daten für weitere in der Paulfalle gefangene Teilchen aufgenommen, um die bisher gemessene Lage der Resonanzen zu bestätigen. Durch eine kürzlich eingebaute unterbrechungsfreie Stromversorgung werden längere Meßreihen an einem Teilchen möglich sein, da jetzt kurzfristige Stromausfälle nicht mehr zum Verlust des Teilchens führen können. Anschließend werden weitere numerische Simulationen nötig sein, um die Lage der beobachteten Resonanzen zu erklären.

Eine Paulfalle wie die hier aufgebaute wird im nächsten Jahr vermutlich zur Spektroskopie von Quantenpunkten eingesetzt werden. Die zu untersuchenden Halbleiter-Nanokristalle haben einen Durchmesser von ungefähr 5 nm. Sie besitzen ein sehr breites Absorptionsspektrum bei Wellenlängen von 300 nm bis 500 nm und emittieren Licht bei ungefähr 600 nm. Diese Fluoreszenz kann zum Nachweis der Teilchen anstelle des Streulichts verwendet werden und es sollte damit möglich sein, die Nanokristalle abzubilden und zu spektroskopieren. Normalerweise werden die Quantenpunkte auf einer Oberfläche spektroskopiert. Der Vorteil der Spektroskopie in der Paulfalle ist, dass hier Wechselwirkungen mit Oberflächen keine Rolle spielen.

Die Demonstration der Speicherung von Anthracen- oder Aluminiumstaub bei Normaldruck kann in einer sehr einfachen Paulfalle, die aus einem Metallring und zwei Metallkugeln besteht, mit in jeder Schule vorhandenen Mitteln durchgeführt werden. Es wird dazu lediglich ein Transformator mit einer Ausgangsspannung von ca. 5000 V bei einer Frequenz von 50 Hz benötigt. Die Staubpartikel sind mit bloßem Auge sichtbar, wenn sie mit einer Glühbirne beleuchtet werden. Der Aufbau einer Paulfalle wäre also durchaus im Rahmen eines Praktikums in der Schule möglich. An dem System könnten die Schüler sowohl praktische Erfahrung beim Experimentieren sammeln als auch grundlegende physikalische Konzepte und Methoden der Physik kennenlernen. Die Funktionsweise der Paulfalle kann mit Hilfe des mechanischen Modells einer rotierenden sattelförmigen Plexiglasform und einer darin gespeicherten Metallkugel anschaulich erklärt werden. Ein selbst geplantes und verwirklichtes Projekt wie der Aufbau einer Teilchenfalle würde sicherlich das Interesse der Schüler an der Physik verstärken und den Physikunterricht beleben.

Literaturverzeichnis

- [Afa90] V. V. Afanasiev, A. A. Chernikov, R. Z. Zagdeev and G. M. Zaslavski, “The Width Of The Stochastic Web And Particle Diffusion Along The Web”, *Phys. Lett. A* **144**, 229 (1990).
- [Arn84] S. Arnold, M. Neumann and A. B. Pluchino, “Molecular Spectroscopy of a Single Aerosol Particle”, *Opt. Lett* **9**, 4 (1984).
- [Arn85] S. Arnold, E. K. Murphy and G. Sageev, “Aerosol particle molecular spectroscopy”, *Appl. Opt.* **24**, 1048 (1985).
- [Arn86] S. Arnold and L. M. Folan, “Fluorescence spectrometer for a single electro-dynamically levitated microparticle”, *Rev. Sci. Instrum.* **57**, 2250 (1986).
- [Arn63] V. I. Arnold, “Small Denominators 2, Proof of a Theorem of A. N. Kolmogorov on the Preservation of Conditionally-Periodic Motions Under a Small Perturbation of the Hamiltonian”, *Russ. Math. Surveys* **18**, 5 (1963).
- [Bau98] J. Baumert, “Physikleistungen am Ende der Schullaufbahn im inter- und intranationalen Vergleich”, *Didaktik und Physik*, Deutsche Physikalische Gesellschaft Regensburg, (1998).
- [Bea86] Earl C. Beaty, “Simple electrodes for quadrupole ion traps”, *J. Appl. Phys.* **61**, 2118 (1987).
- [Bed93] V. M. Bedanov and F. M. Peeters, “Ordering and phase transitions of charged particles in a classical finite two-dimensional system”, *Phys. Rev. B* **49**, 2667 (1993).
- [Bla70] H. H. Blau, D. J. McClesse and D. Watson, “Scattering by individual transparent spheres”, *Appl. Opt.* **9**, 2522 (1970).
- [Blo00] M. Block, A. Drakoudis, H. Leuthner, P. Seibert and G. Werth, “Crystalline ion structures in a Paul trap”, *J. Phys. B* **33**, L375 (2000).
- [Blü88] R. Blümel, J. M. Chen, E. Peik, W. Quint, W. Schleich, Y. R. Shen and H. Walther, “Phase transitions of stored laser-cooled ions”, *Nature* **334**, 309 (1988).
- [Blü89] R. Blümel, C. Kappler, W. Quint and H. Walther, “Chaos and order of laser-cooled ions in a Paul trap”, *Phys. Rev. A* **40**, 808 (1989).
- [Boh77] C. F. Bohren and A. J. Hunt, “Scattering of Electromagnetic Waves by a Charged Sphere”, *Can. J. Phys.* **55**, 1930 (1977).

Literaturverzeichnis

- [Boh83] C. F. Bohren and D. R. Huffman, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles", John Wiley and Sons, New York (1983).
- [Bub99] R. Bubeck, C. Bechinger, S. Nesper and P. Leiderer, "Melting and reentrant freezing of two-dimensional colloidal crystals in confined geometry", *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3364 (1999).
- [Cas88] R. Casdorff and R. Blatt, "Ordered Structures and Statistical Properties of Ion Clouds Stored in a Paul Trap", *Appl. Phys. B* **45**, 175 (1988).
- [Cha37] S. Chapman, *Phys. Rev* **52**, 184 (1937)
- [Che87] A. A. Chernikov, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, M. Yu Zakharov and G. M. Zaslavsky, "Minimal chaos and stochastic web", *Nature* **326**, 559 (1987).
- [Che88] A. A. Chernikov, R. Z. Sagdeev and G. M. Zaslavsky, "Stochastic Webs", *Physica D* **33**, 65 (1988).
- [Clo89] M. Cloupeau and B. Prunet-Foch, "Electrostatic Spraying Of Liquids In Cone-Jet Mode", *J. Electrostat.* **22**, 135 (1989).
- [Dav80] E. J. Davis and A. K. Ray, "Single Aerosol Particle Size and Mass Measurements Using an Electrodynamic Balance", *J. Colloid Interface Sci.* **75**, 566 (1980).
- [Dav97] E. J. Davis, "A History of Single Aerosol Particle Levitation", *Aerosol Science and Technology* **26**, 212 (1997) and 471 (Erratum).
- [Daw76] T. F. J. Todd, G. Lawson and R. F. Bonner in P. H. Dawson ed., "Quadrupole Mass Spectrometry and its Applications", Elsevier Scientific Publishing Company Amsterdam (1976).
- [Dev87] R. L. Devaney, "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", Addison-Wesley, New York (1987).
- [Dol68] M. Dole, L. L. Mack, R. L. Hines, R. C. Mobley, L. D. Ferguson and M. B. Alice, "Molecular Beams of Macroions", *J. Chem. Phys.* **49**, 2240 (1968).
- [Fen95] M. Feng, K. Wang, "Exact solution for the motion of a particle in a Paul trap", *Phys. Lett. A* **197**, 135 (1995).
- [Fis98] Susan L. Fisher, "Ions in Electromagnetic Traps", Senior Honors Thesis, Davidson College (1995).
- [Gas97] S. J. Gaskell, "Electrospray: Principles and Practice", *J. Mass Spectrom.* **32**, 677 (1997).
- [Håk00] K. Håkansson, R. A. Zubarev and Per Håkansson, "Design and performance of an electrospray ionisation time-of-flight mass spectrometer", *Rev. Sci. Instrum.* **71**, 36 (2000).
- [Hir78] M. N. Hirsh, "Gaseous electronics, volume one: Electrical Discharges", Academic Press (New York, 1978).

- [Ill00] Jens Ille mann, “Präzisionsmassebestimmung einzelner Partikel im Femtogramm-bereich und Anwendungen in der Oberflächenphysik”, Dissertation, TU Chemnitz (2000).
- [Joh72] P. B. Johnson and R. W. Christy, “Optical Constants of the Noble Metals”, Phys. Rev. B **6**, 4370 (1972).
- [Keb93] P. Kebarle and L. Tang, “From Ions in Solution to Ions in the Gas Phase”, Anal. Chem **65**, 972 (1993).
- [Kol54] A. N. Kolmogorov, “On Conservation of Conditionally-Periodic Motions for a Small Change in Hamiltons Function”, C. R. Dokl. Akad. Sci. USSR **98**, 525 (1954).
- [Krä98] B. Krämer, “Laboruntersuchungen zum Gefrierprozeß in polaren stratosphärischen Wolken”, Dissertaton, FU Berlin (1998).
- [Lac74] N. W. McLachlan, “Theory and Application of Mathieu Functions”, Oxford University Press London (1974).
- [Lei87] P. Leiderer, W. Ebner and V. Shikin, Macroscopic electron dimples on the surface of liquid helium”, Surf. Sci **113**, 405 (1987).
- [Mar90] Raymond E. March, “Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometer”, Encyclopedia of Analytical Chemistry, John Wiley and Sons Ltd Chichester (1990).
- [Mei54] J. Meixner, F. W. Schäfer, “Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen”, Springer-Verlag Berlin (1954).
- [Min96] Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung, “Entwurf Lehrplan Physik” (1996).
- [Mon95] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King, W. M. Itano and D. J. Wineland, “Demonstration of a fundamental quantum logic gate”, Phys. Rev. Lett. **75**, 4714 (1995).
- [Moo95] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, Bala Sundram and M. G. Raizen, “Atom Optics Realization of the Quantum δ -kicked rotor”, Phys. Rev. Lett. **75**, 4589 (1995).
- [Mos67] J. Moser, “Convergent Series Expansions of Quasi-Periodic Motions”, Math. Ann. **169**, 163 (1967).
- [Näg90] H. C. Nägerl, W. Bechter, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler and R. Blatt, “Ion strings for quantum gates”, Appl. Phys. B **66**, 603 (1998).
- [Pau53] W. Paul and H. Steinwedel, “A new mass spectrometer without magnetic field”, Z. Naturforsch **8a**, 448 (1953).
- [Pau55] H. G. Bennewitz and W. Paul, “Fokussierung polarer Moleküle”, Z. Phys **141**, 6 (1955).
- [Raf91] R. Rafac, J. P. Schiffer, J. S. Hangst, D. H. E. Dubin and D. J. Wales, “Stable configurations of confined cold ionic systems”, Proc. Natl. Acad. Sci. **88**, 483 (1991).

Literaturverzeichnis

- [Ray1882] Lord Rayleigh, "On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses charged with Electricity", *Philosoph. Mag* **14**, 184 (1882).
- [Rei92] L. E. Reichl. "The Transition to Chaos", Springer-Verlag New York (1992).
- [Rob99] S. Robertson and R. Younger, "Coulomb crystals of oil droplets", *Am. J. Phys.* **67**, 310 (1999).
- [Rue94] W. Rueckner, J. Georgi, D. Goodale and D. Rosenberg "Rotating saddle Paul trap", *Am. J. Phys.* **63**, 186 (1995).
- [Rul92] A. J. Rulison and R. F. Flagan, "Scale-up of electrospray atomization using linear arrays of Taylor cones", *Rev. Sci. Instrum.* **64**, 683 (1992).
- [Sch94] H. Schmidt, "Chaos und Fraktale - in ihrer Bedeutung über- oder unterschätzt?", *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **47**, 240 (1994).
- [Sla80] W. L. Slattery, G. D. Doolen and H. E. DeWitt, "Improved equation of state for the classical one-component plasma", *Phys. Rev. A* **21**, 2087 (1980).
- [Str67] M. J. O. Strutt, "Lamésche, Mathieusche und Verwandte Funktionen in Physik und Technik", Chelsea Publishing Company New York (1967)
- [Whe73] N. Rey Whetten, "Macroscopic Particle Motion in Quadrupole Fields", *J. Vac. Sci. Technol.* **11**, 515 (1974).
- [Wer85] G. Werth, "Trapped Ions", *Contemp. Phys.* **26**, 241 (1985).
- [Wint91] H. Winter and H. W. Ortjohann, "Simple demonstration of storing macroscopic particles in a Paul trap", *Am. J. Phys.* **59**, 807 (1991).
- [Wue59] R. F. Wuerker, H. Shelton and R. V. Langmuir, "Electrodynamic Containment of charged Particles", *J. Appl. Phys* **30**, 342 (1959).
- [Yam84] M. Yamashita and J. B. Fenn, "Electrospray Ion Source. Another Variation on the Free-Jet Theme", *J. Phys. Chem* **88**, 4451 (1984).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen danken, die mich während meines Studiums und insbesondere bei der Durchführung und schriftlichen Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Insbesondere geht mein Dank an

- Herrn Professor Leiderer für die Bereitschaft, die Betreuung dieser Arbeit zu übernehmen
- Markus Oberthaler, der mich in seine Nachwuchsgruppe aufnahm und mir die Möglichkeit gab, ein eigenes Experiment aufzubauen
- Herrn Professor Mlynek für die Bereitstellung der experimentellen Ausstattung (vor allem des Nd:YAG Lasers)
- die Gruppenmitglieder Bernd, Dirk, Karen, Ralf und Tom für die physikalischen Diskussionen, aber auch für außeruniversitäre Aktivitäten, die zu der guten Stimmung in unserer Gruppe beitrugen
- Stefan Hahn und Stefan Eggert für die Hilfestellung bei mechanischen und elektronischen Problemen aller Art
- Jiri Tomkovic, der als Hiwi an meinem Experiment mitgearbeitet hat
- Herrn Döpfner für die Bereitstellung des Leibold-Transformators, der für die ersten Experimente benötigt wurde
- die Werkstätten der Universität für die ausgeführten feinmechanischen Arbeiten
- meine Freunde für die schöne Zeit während des Studiums

Schließlich möchte ich mich bei meiner Familie und meiner Freundin Karen Schäfle für die Unterstützung und das Vertrauen bedanken, das sie mir auf meinem bisherigen Weg entgegengebracht haben.

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und dass alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.