WS2001/02
A.Putzer

Mathematische Hilfsmittel zur Vorlesung

Physik für Mediziner

1 Funktionen

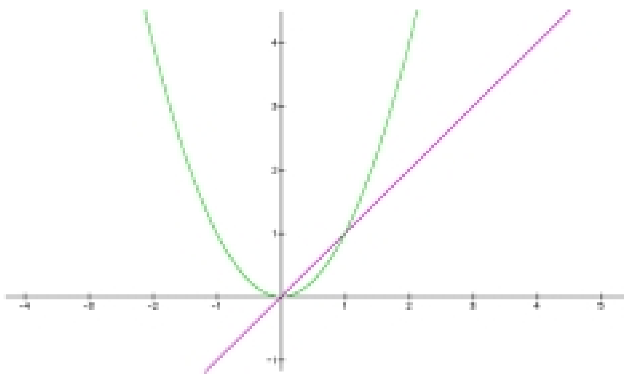
Wir sprechen von einer Funktion f, wenn jedem Wert einer veränderlichen Größe, meist x genannt, eindeutig ein Wert einer anderen Größe y = f(x) zugeordnet werden kann. In der Physik treten vor allem folgende Funktionen auf:

1.1 Potenz-Funktion

$$y(x) = ax^n$$

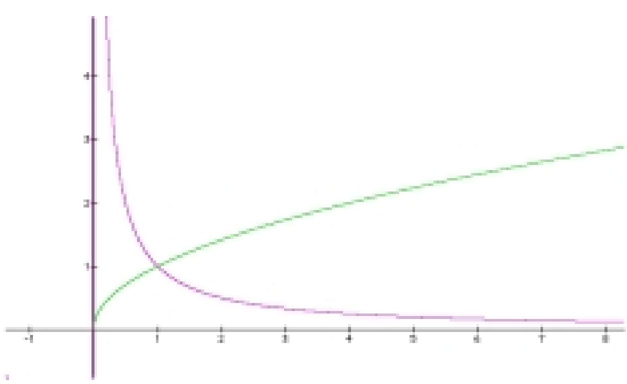
wobei n zunächst eine positive Zahl und a eine Konstante sei. Beispiele :

$y = ax$: lineare Funktion
$y = ax^2$: quadratische Funktion; Parabel
$y = ax^3$: Parabel 3. Grades



Es können auch Potenzfunktionen mit negativen und gebrochenen Exponenten auftreten:

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$$
$$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$$



Rechenregeln für Potenzen:

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{a \cdot b} \\ (x \cdot y)^a &= x^a \cdot y^a \end{aligned}$$

Die Auflösung der Gleichung $y = x^n$ nach x ergibt

$$x = y^{1/n}$$

Diese Funktion nennt man auch die Umkehrfunktion von $y = x^n$.

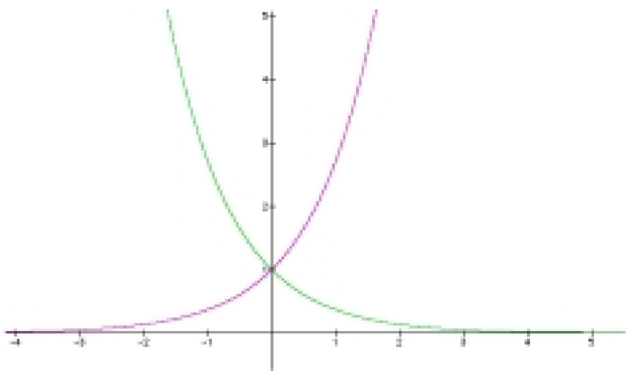
1.2 Exponentialfunktion, Logarithmus

Bei der Exponentialfunktion

$$y(x) = e^x = exp(x)$$

steht die veränderliche Größe im Exponenten. Potenziert wird die Zahl

$$e = 2,718... \text{ (= Basis der natürlichen Logarithmen)}$$

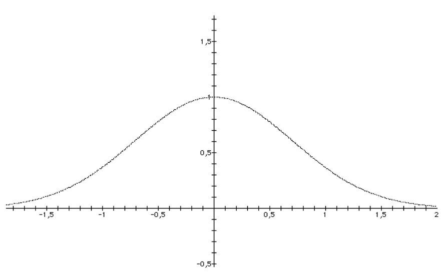


(Ihr Taschenrechner sollte die Funktionstaste e^x haben.)

In der Fehlerrechnung (s. Praktikumsanleitung) werden Ihnen Funktionen der Form

$$y = e^{-x^2}$$

begegnen, die einen glockenförmigen Verlauf haben (Gauß-Kurve).



Da man die Gleichung $y = e^x$ nicht durch die üblichen Rechenoperationen nach x auflösen kann, definiert man als Umkehrfunktion von e^x eine neue Funktion,

$$y = e^x \rightarrow x = ln\ y = log_e y$$

die man den natürlichen Logarithmus nennt. (Sollte ebenfalls auf Ihrem Taschenrechner sein.)

Für eine beliebige positive Zahl a gilt :

$$e^{ln\ a} = a$$

Daher kann man die allgemeine Exponentialfunktion

$$y = a^x$$

als e-Funktion schreiben :

$$a^x = (e^{ln\ a})^x = e^{x \cdot ln\ a}$$

Außerdem kommt gelegentlich die Umkehrfunktion von $y = 10^x$ vor:

$$y = 10^x \rightarrow x = log\ y$$

die man als Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus) bezeichnet. (Auf dem Taschenrechner und in der Literatur <u>meist</u> mit log bezeichnet.)

Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln :

$$\begin{array}{ll}
log\ 10^x = x & ln\ e^x = x \\
log\ 1 = 0 & ln\ 1 = 0 \\
log\ (a \cdot b) = log\ a + log\ b & ln\ (a \cdot b) = ln\ a + ln\ b \\
log\ a/b = log\ a - log\ b & ln\ a/b = ln\ a - ln\ b \\
log\ x^y = y \cdot log\ x & ln\ x^y = y \cdot ln\ x \\
x = 10^{log\ x} & x = e^{ln\ x}
\end{array}$$

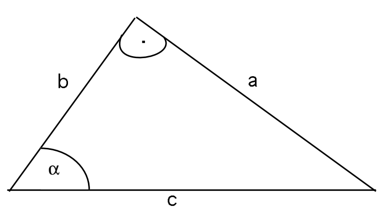
$$log\ x = log\ e^{ln\ x} = ln\ x \cdot log\ e = 0.434\ ln\ x$$
$$ln\ x = ln\ 10^{log\ x} = log\ x \cdot ln\ 10 = 2.30\ log\ x$$

1.3 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen

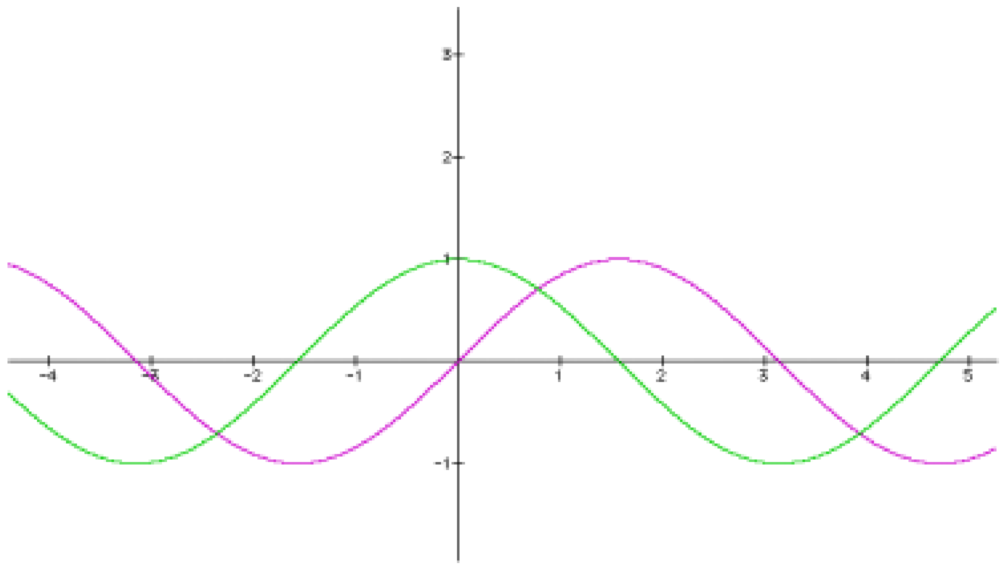
$$\begin{array}{llll}
y = & sin\ \alpha = & a/c & \text{(Sinus = Gegenkathete / Hypothenuse)} \\
y = & cos\ \alpha = & b/c & \text{(Cosinus = Ankathete / Hypothenuse)} \\
y = & tg\ \alpha = & a/b = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} & \text{(Tangens = Gegenkathete / Ankathete)} \\
y = & ctg\ \alpha = & b/a = 1/tg\ \alpha & \text{(Cotangens = Ankathete / Gegenkathete)}
\end{array}$$

kennt man zunächst als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:



In der Physik begegnen sie uns oft in ihrer Eigenschaft als <u>periodische Funktionen</u> y = sin x. Die Variable x kann in verschiedenen Einheiten gemessen (und in den Taschenrechner eingegeben) werden.

Verlauf der Funktionen sin x und cos x:



Beide Funktionen oszillieren mit der Periode $360^0 = 2\pi$ zwischen +1 und -1 hin und her.

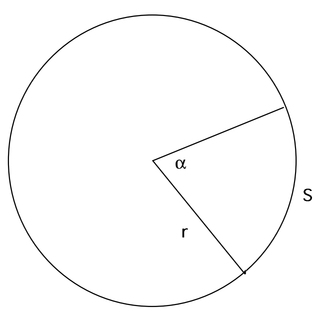
- Grad : (Rechter Winkel = 90^0)

  Dies wird in der Geometrie bevorzugt; auf dem Taschenrechner wird diese Betriebsart meist mit DEG (von engl. degree = Grad) bezeichnet.

- Radian (Rechter Winkel = $\frac{\pi}{2}$ = 1,57...)

  Dies wird in der Physik bevorzugt (Taschenrechner-Betriebsart : RAD). Die Angabe in Radian entspricht geometrisch dem Verhältnis Bogenlänge zu Radius:

$$\alpha = \frac{S}{r} = \frac{\text{Länge des Kreisbogens}}{\text{Radius des Kreises}}$$



$$\begin{array}{rcrl} 1^0 & = & 0.017 & \text{rad} \\ 57.3^0 & = & 1 & \text{rad} \\ 90^0 & = & 1.57... & \text{rad} \\ 180^0 & = & 3.14... & \text{rad} \end{array}$$

2 Algebraische Gleichungen

Eine Gleichung bleibt als Gleichung erhalten, wenn man auf beiden Seiten die gleichen Größen addiert oder substrahiert. Das gleiche gilt, wenn man beide Seiten mit derselben Göße multipliziert oder potenziert.

Beispiel: Ohmsches Gesetz

Dieses Gesetz stellt den Zusammenhang zwischen den elektrischen Größen

Spannung	U[V]
Strom	I[A]
Widerstand	R[Ω]

her.

$$R = \frac{U}{I}$$

Multiplikation mit I ergibt

$$U = R \cdot I$$

Division durch R ergibt

$$I = \frac{U}{R}$$

Beispiel: Beschleunigte Bewegung

$$Weg\ s[m]$$

$$Zeit\ t[s]$$

$$Beschleunigung\ a[\frac{m}{s^2}]$$

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Multiplikation mit 2 und Divison durch a liefert

$$\frac{2s}{a} = t^2$$

Zieht man auf beiden Seiten die Wurzel, so erhält man

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

So läßt sich jede Gleichung nach der gesuchten Größe auflösen.

Beispiel: Radioaktiver Zerfall (s. Praktikumsanleitung)

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Auflösung nach der Zerfallskonstanten λ

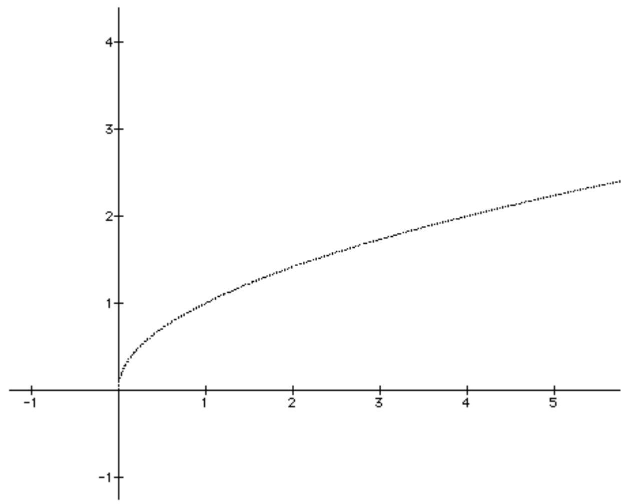
$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$ln\frac{N(t)}{N_0} = -\lambda t$$

$$\lambda = -(ln\frac{N(t)}{N_0})/t$$

3 Differentialrechnung

3.1 Erste Ableitung, Differentialquotient



Die Ableitung einer Funktion y = f(x) wird gewöhnlich als Grenzwert

$$\lim_{x_1 \to x} \left(\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \right) = f'(x)$$

eingeführt. Sie ist ein Maß für die Steigung der Kurve y = f(x), genauer gesagt gilt

$$f'(x) = tg\ \alpha$$

wobei α der Winkel zwischen der Richtung der Tangente und der x-Achse ist. Folgende Schreibweisen sind für die Ableitung der Funktion y = f(x) üblich:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = y'$$

Für die in Abschnitt 1 diskutierten Funktionen erhalten wir folgende Ableitungen:

$$\begin{array}{lll}
y = x^n & \to y' & = n \cdot x^{n-1} \\
y = e^x & \to y' & = e^x \\
y = a^x & \to y' & = ln\ a \cdot a^x \\
y = ln\ x & \to y' & = \frac{1}{x} \\
y = sin\ x & \to y' & = cos\ x \\
y = cos\ x & \to y' & = -sin\ x
\end{array}$$

Die e-Funktion $y = e^x$ ist also dadurch ausgezeichnet, daß sie beim Differenzieren unverändert bleibt.

3.2 Rechenregeln und Beispiele

Beim Differenzieren zusammengesetzter Funktionen sind folgende Rechenregeln zu beachten:

- Konstanter Faktor:
  $y = c \cdot f(x) \quad \to y' \quad = c \cdot f'(x)$
  $y = 3x^3 \quad \to y' \quad = 9x^2$

- Kettenregel:
  $y = \quad f(g(x)) \to y' \quad = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$
  $y = \quad e^{-ax}; f(g) \quad = e^g; g(x) = -ax$
  $y' = \quad e^{-ax} \cdot (-a) \quad = -a \cdot e^{-ax}$

- Summe:
  $y = f(x) + g(x) \quad \to y' = f'(x) + g'(x)$
  $y = ax^3 + bx^2 - cx + d \quad \to y' = 3ax^2 + 2bx - c$

- Produkt:
  $y = f(x) \cdot g(x) \quad \to y' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  $y = (1 + x) \cdot e^{-x} \quad \to y' = 1 \cdot e{-}x + (1 + x) \cdot (-1)e^{-x} = -xe^{-x}$

3.3 Die zweite Ableitung

Die zweite Ableitung einer Funktion wird gebildet, indem man die erste Ableitung differenziert:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Die zweite Ableitung ist ein Maß für die Krümmung der Kurve y = f(x):

Je größer y", desto krummer die Kurve.

Beispiel:

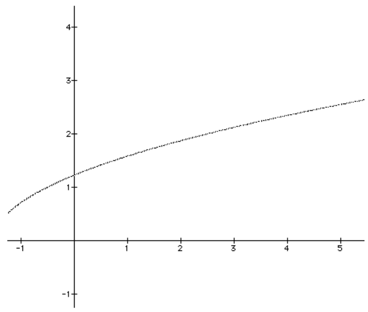
$y = ax^3 + bx$

$y' = 3ax^2 + b$

$y'' = 6ax$

4 Integralrechnung

Das Integral entsteht aus einer Summe durch Grenzübergang zu genügend feiner Unterteilung des Intervalls $a \leq x \leq b$ in Abschnitte Δx = (b-a)/n:



$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Eine typische Anwendung ist die Berechnung der Fläche unter der Kurve y = f(x). Zur Berechnung des Integrals muß eine Funktion F(x) gefunden werden, die differenziert f(x) ergibt:

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Dann ist

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x}$	ln x
e^x	e^x
sin x	-cos x
cos x	sin x

5 Vektor-Rechnung

Viele physikalische Größen sind vektorielle Größen, d.h. zu deren vollständiger Beschreibung ist die Angabe von Betrag und Richtung erforderlich (z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung).

Vektor $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$;

$|\vec{a}| = a =$ Länge des Pfeils $= \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$

Addition: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$

Skalarprodukt: $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Hierbei ist $(\vec{a}, \vec{b})$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

Vektorprodukt: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot sin(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{b} \times \vec{a}$

$\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

6 Fehlerrechnung

Hinweise zur Fehlerrechnung finden sie in der Praktikumsanleitung.

7 Das griechische Alphabet

kleine	Buchstaben	große	Buchstaben
α	alpha	A	Alpha
β	beta	B	Beta
γ	gamma	Γ	Gamma
δ	delta	Δ	Delta
ϵ	epsilon	E	Epsilon
ϕ, φ	phi	Φ	Phi
χ	chi	X	Chi
η	eta	H	Eta
ι	iota	I	Iota
κ	kappa	K	Kappa
λ	lambda	Λ	Lambda
μ	mu	M	Mu
ν	nu	N	Nu
o	omicron	O	Omicron
π	pi	Π	Pi
θ, ϑ	theta	Θ	Theta
ρ	rho	P	Rho
σ	sigma	Σ	Sigma
τ	tau	T	Tau
υ	upsilon	Υ	Upsilon
ξ	xi	Ξ	Xi
ζ	zeta	Z	Zeta
ψ	psi	Ψ	Psi
ω	omega	Ω	Omega

8 Physik-Formelsammlung (s. auch Praktikumsanleitung)

8.1 Kinematik

a) geradlinige Bewegung

$F = m \cdot a$	F: Kraft	$[F] = 1N$
	m: Masse	$[m] = 1kg$
	a: Beschleunigung	$[a] = 1m \cdot s^{-2}$

gleichförmige Bewegung:

$s = v \cdot t$	s: Weg	$[s] = 1m$
	v: Geschwindigkeit	$[v] = 1m \cdot s^{-2}$
	t: Zeit	$[t] = 1s$

gleichmäßig beschleunigte Bewegung:

$s = 1/2a \cdot t^2$

$v = a \cdot t$

b) Kreisbewegung

$M = I \cdot a$	M: Drehmoment	$[M] = 1N \cdot m$
	I: Trägheitsmoment	$[I] = 1N \cdot m \cdot s^2$
	φ: Winkel	
	ω: Winkelgeschwindigkeit	
	α: Winkelbeschleunigung	$[\alpha] = 1s^{-2}$

$\varphi = \omega \cdot t$

$\varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$

$\omega = \alpha \cdot t$

c) Energien

$W_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$	Kinetische Energie (Energie der Bewegung)
$W_{rot} = \frac{1}{2}I \cdot \omega^2$	Rotationsenergie
$W_{pot} = m \cdot g \cdot h$	Potentielle Energie (Energie der Lage)
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\alpha$	
$\bar{E} = \frac{1}{2} \cdot f \cdot k_B \cdot T$	$\bar{E}$: mittlere Thermische Energie
	f: Freiheitsgrade
	k_B:Boltzmann-Konstante
	T: Temperatur $[T] = 1K$

8.2 Geometrische Optik

$c_m = \lambda \cdot f$	c: Ausbreitungsgeschwindigkeit	
	λ: Wellenlänge	
	f: Frequenz	$[f] = 1Hz = 1s^{-1}$
$n = \frac{c_{Vakuum}}{c_{Medium}}$	n: Brechungsindex	

Brechnungsgesetz

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{sin\alpha_1}{sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$

Grenzwinkel der Totalreflexion

$sin\alpha_T = \frac{n_2}{n_1}$ mit $n_1 > n_2$ $\quad \alpha_T$:Grenzwinkel

8.3 Schallwellen

Wellengleichung (eindimensional)

$A(x,t) = A_0 \cdot sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$	A_0:Amplitude
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	k: Wellenzahl

Welle: räumliche ($\omega\cdot$ t) und zeitliche ($k \cdot x$) Entwicklung

$c = \lambda \cdot f$	c: Ausbreitungsgeschwindigkeit
	λ: Wellenlänge
	f: Frequenz

a) transversale Welle
Schwingung $\perp$ Ausbreitungsrichtung
Beispiel: Wasserwelle, Licht

b) longitudinale Welle
Schwingung in Ausbreitungsrichtung
Beispiel: Schallwelle

Interferenz

a) konstruktive Interferenz:
Maxima der 1. Welle fallen auf Maxima der 2. Welle
Gangunterschied Null

b) destruktive Interferenz:
Maxima der 1. Wellen fallen auf Minima der 2. Welle
Gangunterschied $\pi/2$