

Praktikumsanleitung

zum

Physikalischen Praktikum

für Studierende der Medizin und Zahnmedizin

an der

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

- Ausgabe März 2015 -

Die folgenden Anleitungen zu den Versuchen des Physikalischen Praktikums für Studierende der Medizin und Zahnmedizin sollen das Praktikum unterstützend begleiten.

Zu jedem Versuch erhalten Sie folgende Informationen:

- Physikalische Begriffe und Gesetze, die zum Verständnis der Versuche erforderlich sind
- Versuchsbeschreibung
- Aufgabenstellung
- Hinweise zur Protokollierung der Versuchsergebnisse und zur Auswertung
- Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Medizin

Die in diesem Praktikum erworbenen Kenntnisse sind notwendige Voraussetzung für eine erfolgreiche Teilnahme am späteren Physiologiepraktikum.

<p>Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die vorliegende Anleitung keinen Ersatz für ein Lehrbuch darstellt. Dieses Skript ersetzt auch nicht die Teilnahme an der Vorlesung "Physik für Mediziner".</p>
--

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass der Stoff des Praktikums weder ausreichend ist für die Prüfungsfragen der Medizinischen Vorprüfung noch die Anforderungen an Physik in der Physiologieausbildung abdeckt. Daher ist empfohlen die Vorlesung "Physik für Mediziner" zu besuchen, die den Stoff des IMPP Gegenstandskatalogs weitgehend abdeckt.

Inhaltsverzeichnis

1	Empfohlene Lehrbücher	3
2	Allgemeines	4
2.1	Einige wichtige Rechenregeln	4
2.2	Fehlerbetrachtungen	7
2.3	Physikalische Einheiten und Konstanten	15
2.4	Materialdaten	17
2.5	Dosimetrie und Strahlenschutz	19
2.6	Strahlenschutzbelehrung	25
3	Regeln für das Praktikum	26
3.1	Organisation	26
3.2	Versuchsvorbereitung und -durchführung	27
3.3	Auswertung und Protokollführung	27
4	Die Versuche	33
4.1	Versuch 11: Federpendel (Einführungsversuch)	33
4.2	Versuch 12: Augenmodell	42
4.3	Versuch 13: Nervenleitungsmodell	49
4.4	Versuch 14: Doppler-Sonographie	67
4.5	Versuch 15: Strömungsgesetze des Blutkreislaufs	73
4.6	Versuch 16: Temperaturmessung	80
4.7	Versuch 17: Radioaktivität und Statistik	88
4.8	Versuch 18: Radiometrie von Röntgenstrahlung	103

1 Empfohlene Lehrbücher

Im folgenden sind einige Lehrbücher zur Auswahl gestellt. Die Bücher sind sehr unterschiedlich im Stil und in ihrer Ausführlichkeit. Sie sollten vor dem Kauf sich die Bücher ansehen und auswählen, was Ihrem Wissensstand am besten angepasst ist.

- 1) A. Grossmann, Physik Kompaktleitfaden, Wiley-VCH, Weinheim (übersichtlich, kompakt, berücksichtigt Gegenstandskatalog)
- 2) H. Bannwarth, B. P. Kremer, A. Schulz, Basiswissen Physik, Chemie und Biochemie, Springer, Heidelberg (Zusammenfassung beider Fächer in einem Buch, Physikteil anschaulich beschrieben, berücksichtigt Gegenstandskatalog)
- 3) T. Wensch, Kurzlehrbuch Physik, Chemie, Biologie, Urban & Fischer, München, (auf vorklinische Ausbildung bezogen mit einigen Beispielen aus der Medizin, Zusammenfassung der drei Fächer in getrennten Kapiteln)
- 4) J. Schatz, R. Tammer, Erste Hilfe - Physik und Chemie für Mediziner, Springer, Heidelberg (übersichtliche Darstellung mit jeweils einer kurzen zusätzlichen Zusammenfassung, ausführlicher Mathematikteil)
- 5) V. Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, Harms, Lindhöft, mit separatem Übungsbuch (nur neueste Ausgabe, 17. oder höher, verwenden, da in alten Ausgaben zu viele Fehler, beschreibt vieles zwar ausführlich aber nur qualitativ, richtet sich in neuen Ausgaben größtenteils nach dem Gegenstandskatalog)
- 6) U. Harten, Physik für Mediziner, Springer, Heidelberg (nur neueste Ausgabe, 12. oder höher, verwenden, da in alten Ausgaben manches falsch dargestellt, ausführliche Beschreibung über 300 Seiten mit online Teil, meist nur qualitative Beschreibung)
- 7) A. Trautwein, U. Kreibig, J. Hüttermann, Physik für Mediziner, Biologen, Pharmazeuten, de Gruyter, Berlin (7. Auflage, ausführliches Lehrbuch mit Beispielen aus Biologie und Medizin, ausführlicher Mathematikteil)

2 Allgemeines

2.1 Einige wichtige Rechenregeln

Im folgenden werden einige Rechenregeln angegeben. Zum besseren Verständnis der Anforderungen an die mathematischen Kenntnisse wird dringend empfohlen, am mathematischen Vorkurs teilzunehmen. In der Mathematik und Physik werden die Dezimalstellen auch durch Punkte abgetrennt! Bitte beachten Sie dies bei den angegebenen Werten in diesem Skript.

$$ab = ba \quad a + b = b + a$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad c \neq 0$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$\frac{1}{x} = x^{-1} \quad x \neq 0$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Insbesondere gilt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2.1.1 Geometrie und Trigonometrie (ebenes rechtwinkliges Dreieck)

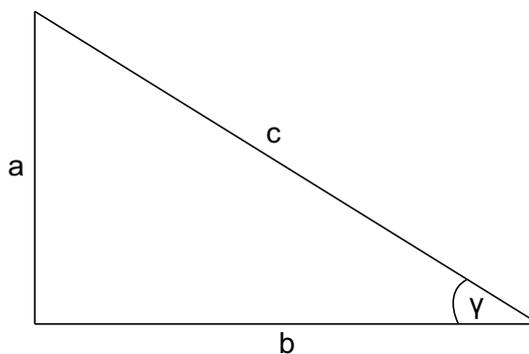
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin \gamma = \frac{a}{c} \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{c} \quad \gamma = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$$

$$\tan \gamma = \frac{a}{b} \quad \gamma = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\cot \gamma = \frac{b}{a} \quad \gamma = \operatorname{arccot}\left(\frac{b}{a}\right)$$



Beachten Sie auf Taschenrechnern wird oft $\arcsin x$ als \sin^{-1} bezeichnet.

Allgemeine Formeln	
mit $r =$ Radius gilt:	
Kreisumfang =	$2\pi r$
Kreisfläche =	πr^2
Kugeloberfläche =	$4\pi r^2$
Kugelvolumen =	$\frac{4}{3}\pi r^3$

2.1.2 Potenzen

$$a^x = e^{x \ln a} = \exp(x \ln a)$$

$e = 2.71828 \dots$ = Eulersche Zahl und $\ln x$ = natürlicher Logarithmus, d.h. Logarithmus zur Basis e

$$a^{1/2} = \sqrt{a}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$z = a^x \rightarrow x = \frac{\ln z}{\ln a}$$

2.1.3 Ableitung und Integration von Funktionen

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Geometrische Interpretation: Steigung im Punkt x

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{(b-a)/h} f(a + n h) h$$

Geometrische Interpretation: Fläche unter der Kurve von $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$

Beachten Sie: $\frac{d}{dx} \int_0^x f(y) dy = f(x)$

Regeln für die Bildung von Ableitungen

$$f(x) = c_1 g(x) + c_2 h(x) \rightarrow f'(x) = c_1 g'(x) + c_2 h'(x)$$

Produktregel

$$f(x) = g(x) h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g' h'$$

Wichtige Beispiele:

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Integral $\int_0^x f(y)dy$	
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	
e^x	$\exp(x)$	$\exp(x)$	$x > 0$
$\ln x$	$1/x$		$x > 0$

2.1.4 Vektorrechnen

Verschiedene physikalische Größen wie die Kraft oder der Impuls stellen Vektoren im Raum dar. Vektoren haben eine Richtung und einen Betrag.

Darstellung:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

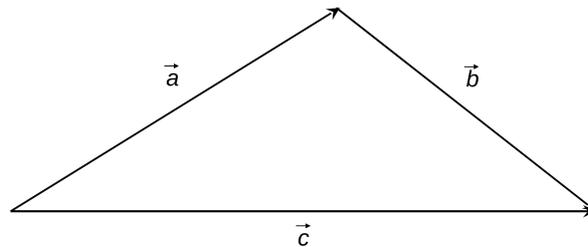
a_x, a_y, a_z sind die 3 Komponenten im Raum

Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Summe:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

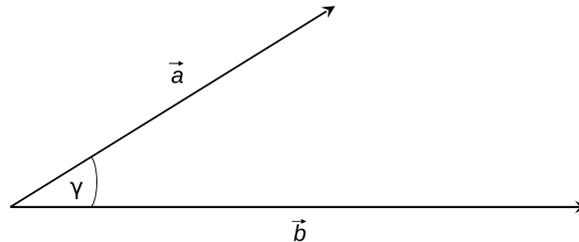


Multiplikation mit Skalar:

$$x \vec{a} = \begin{pmatrix} x a_x \\ x a_y \\ x a_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt (Ergebnis ist ein Skalar, d.h. kein Vektor):

$$\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$$



Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

2.2 Fehlerbetrachtungen

Keine physikalische Messung kann einen absolut exakten Zahlenwert einer physikalischen Größe ergeben. Es besteht immer eine Unsicherheit darüber, inwieweit der Messwert, z.B. der Mittelwert einer Messreihe, vom wahren Wert einer Messgröße abweicht. Ein Messfehler hat nichts mit einem Irrtum zu tun, es sei denn, es handelt sich um einen *groben Fehler* z.B. unsachgemäße Anwendung der Messapparatur oder Nichtbeachtung einer wesentlichen physikalischen Nebenbedingung. Die Fehlerrechnung dient dazu, den Grad dieser Unsicherheit abzuschätzen.

Bei Messfehlern unterscheidet man zwischen **systematischen** Fehlern und **statistischen** (zufälligen) Fehlern.

Systematische Fehler spiegeln die Unvollkommenheit der Messgeräte und der Messmethode wieder (fehlerhafte Eichung, innere Fehler der Messgeräte). Es liegt in der Natur systematischer Fehler, dass sie sich **nur abschätzen lassen**; andernfalls könnten sie ja im Endergebnis als Korrektur berücksichtigt werden. Allgemeine Regeln zu ihrer Abschätzung lassen sich nicht aufstellen. Einen Anhaltspunkt für den Mindestfehler geben z.B. die vom Hersteller angegebenen Messgenauigkeiten der verwendeten Messinstrumente. Solche Fehler spielen z.B. beim Versuch zur Messung der Zähigkeit die Hauptrolle.

Zufällige (statistische) Fehler (unsystematische Messabweichungen) zeichnen sich dadurch aus, dass sie von Messung zu Messung "zufällig" schwanken. Sie können von Umwelteinflüssen (Erschütterungen, Temperatur- oder Netzspannungsschwankungen) und von subjektiven Beobachtungsgenauigkeiten herühren. In solchen Fällen sind sie durch das Messverfahren bedingt. Durch mehrmalige Wiederholung der gleichen Messung lässt sich der statistische Fehler reduzieren und bestimmen. Statistische Fehler dominieren z.B. beim Versuch "Radioaktivität". Ihre Erfassung mittels statistischer Rechenmethoden ist der Gegenstand des folgenden Kapitels.

2.2.1 Behandlung statistischer Fehler

Führt man n Einzelmessungen durch, so nennt man in der Statistik alle n Messungen eine Stichprobe vom Umfang n und alle Messergebnisse x_i die Stichprobenwerte. Gesucht ist ein bester Wert (\bar{x}) für den unbekanntem "wahren" Wert (x_w) der physikalischen Messgröße und ein Maß für die Unsicherheit dieser Schätzung.

2.2.2 Mittelwert (arithmetisches Mittel)

Die Berechnung des Fehlers einer Messgröße, deren Messwerte x_i zufällig streuen, beruht auf folgenden Voraussetzungen:

- die Messwerte x_i streuen nach dem Gesetz der Statistik um einen mittleren Wert,
- die Messung kann beliebig häufig wiederholt werden,
- die systematischen Fehleranteile sind korrigierbar bzw. vernachlässigbar,
- die Messungen werden unter gleichen Bedingungen gewonnen.

Nach Gauß erhält man den Bestwert dadurch, dass man die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte zu einem Minimum macht (Methode der kleinsten Quadrate) mit:

$$\sum_i v_i^2 \stackrel{!}{=} \text{Minimum},$$

wobei

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

ist. Dies ist durch das **arithmetische Mittel** erfüllt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

2.2.3 Fehler der Einzelmessung

Die Varianz einer Einzelmessung ist definiert als der Mittelwert der Quadrate der Abweichungen der Einzelmessungen vom wahren Wert:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - x_w)^2$$

Weil man den wahren Wert x_w nicht kennt, sondern nur den Bestwert \bar{x} , benutzt man die Relation:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

Der eigentlich interessierende "**Fehler der Einzelmessung**", auch "**empirische Standardabweichung der Einzelmessung**" genannt, ist die Quadratwurzel aus der Varianz:

$$\Delta x = \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

2.2.4 Fehler des Mittelwertes (empirische Standardabweichung des Mittelwertes)

Auch der Mittelwert einer Messung (Stichprobe) hat einen mittleren Abstand zum wahren Wert. Der **Fehler des Mittelwertes** ist um einen Faktor \sqrt{n} kleiner als der Fehler der Einzelmessung:

$$\Delta\bar{x} = \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

Es ist üblich, ein Messergebnis in der Form anzugeben:

$$\bar{x} \pm \Delta\bar{x}$$

2.2.5 Relativer Fehler des Mittelwertes

Die Größe $\Delta\bar{x}$ nennt man den absoluten Fehler. Dieser ist i.a. aber kein Maß für die Güte der Messung. So entspricht z.B. ein Fehler von 1 mm bei einer Messung von 1 cm einem Fehler von 10 %, bei einer Messung von 1 km einem von 0.0001 %. Man benutzt daher meist die Angabe des relativen Fehlers:

$$\frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \text{ oder in Prozent: } \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} 100$$

2.2.6 Fehler einer zusammengesetzten Größe

In der Regel interessieren nicht die - im vorhergegangenen Abschnitt diskutierten - Messgrößen und ihre Fehler direkt, sondern eine aus ihnen abgeleitete Größe, wir nennen sie G. Oft müssen mehrere verschiedenartige Messgrößen, die wir hier x, y, z, ... nennen möchten, ermittelt werden. Sie sind natürlich alle mit Messfehlern $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ behaftet. G errechnet sich aus diesen Größen mit Hilfe einer Formel, ganz allgemein schreibt man:

$$G = f(x, y, z, \dots)$$

(f wie Formel). Meist ist die Formel ein Potenzprodukt, so dass man schreiben kann

$$G = k x^a y^b z^c \dots$$

mit der Konstanten k.

Zur Veranschaulichung:

In Versuch 2, Teil B, "messen" Sie die Größen R, s und t (Kugelradius, Fallstrecke und Fallzeit). Aus diesen "Messgrößen" berechnen Sie die Zähigkeit von Wasser (η) mit Hilfe der Formel

$$\eta = \frac{2g(\rho_K - \rho_{Fl})}{9} R^2 t^1 s^{-1} = k R^2 t^1 s^{-1}$$

Dabei ist angenommen, dass insbesondere $(\rho_K - \rho_{Fl})$ ohne Fehler bekannt ist und somit in die Konstante k übernommen werden kann. Man erkennt die Analogie zur obigen allgemein angegebenen Form

$$G = k x^a y^b z^c \dots$$

Zurück zur allgemeinen Schreibweise:

Sind die Größen x, y, z... und ihre Fehler $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ gemessen, berechnet sich die Größe G direkt und in aller Schönheit aus der entsprechenden Formel $f(x, y, \dots)$. Wie bestimmt man aber den Fehler ΔG von G? Garantiert falsch wäre es, einfach die Einzelfehler zu addieren. Denkbar und auch nicht falsch

ist es, durch Einsetzen der richtigen Kombination von größten und kleinsten Werten von x, y, \dots in die gleiche Formel eine Ober- und Untergrenze von G zu ermitteln. Man erhält auf diese Weise zumindest die größtmöglichen Fehler.

Gängige Praxis ist es aber, dass man sich des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes zur Ermittlung des Fehlers ΔG bedient. Wenn im Verlaufe des Praktikums der Fehler einer zusammengesetzten Größe $G = f(x, y, \dots)$ bestimmt werden soll, ist immer die Berechnung über dieses im folgenden beschriebene Gesetz gemeint. Aber Vorsicht: Das Gesetz funktioniert nur zuverlässig, wenn - was im Praktikum immer der Fall ist - die Einzelfehler $\Delta x, \Delta y, \dots$ klein gegen die Größen x, y, \dots sind.

2.2.7 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß

Die zu bestimmende Größe sei (wie vorher)

$$G = G(x, y, \dots)$$

wobei x, y, \dots die direkt gemessenen Größen und $\Delta x, \Delta y, \dots (= \sigma_x, \sigma_y, \dots)$ deren Fehler seien.

Der absolute Größtfehler berechnet sich dann zu:

$$\text{Größtfehler} = \Delta G = \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial G}{\partial z} \right| \Delta z$$

Da jedoch eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür besteht, dass die Fehler sich gegenseitig teilweise kompensieren, verwendet man als Fehler von G normalerweise den etwas kleineren, mittleren (wahrscheinlichsten) Fehler.

$$\Delta G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \Delta y^2 + \dots}$$

Dieser Fehler soll im Praktikum bei den Aufgaben, bei denen eine Fehlerrechnung verlangt wird, berechnet werden. Die Größen $\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \dots$ sind dabei die partiellen Ableitungen der Funktion $G = f(x, y, \dots)$ nach den Messgrößen x, y, \dots und berechnen sich mit ganz normaler Schulmathematik.

Betrachten wir nun die Spezialfälle von Summe / Differenz und Potenzprodukt für die Funktion G .

2.2.8 Summe und Differenz

G berechne sich nach

$$G = a x \pm b y \pm \dots$$

Differenziert man diese Formel partiell und setzt die Ableitung oben ein, so erhält man:

$$\Delta G = \sqrt{a^2 \Delta x^2 + b^2 \Delta y^2 + \dots}$$

a, b, \dots seien Konstanten.

Es addieren sich also die **absoluten** Fehler, "verziert" mit den Proportionalitätskonstanten a, b, \dots quadratisch. Man beachte, dass die Fehler sich immer addieren, egal ob es sich bei der eigentlichen Funktion um eine Summe oder Differenz handelt.

2.2.9 Potenzprodukt

G berechne sich nach dem Potenzprodukt

$$G = k x^a y^b \dots$$

k , a , b seien Konstanten.

Im Falle des Potenzproduktes, welches natürlich auch Quotienten erfasst (a oder b negativ), wird das Ergebnis einfach, wenn man den relativen Fehler $\frac{\Delta G}{G}$ berechnet. Die Schulmathematik ergibt:

$$\frac{\Delta G}{G} = \sqrt{a^2 \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \dots}$$

Jetzt addieren sich die **relativen** Fehler, "verziert" mit den Potenzen quadratisch. Die Konstante k taucht im Fehler nicht auf.

Für unser Beispiel von Versuch 2 gilt somit:

$$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \sqrt{2^2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + 1^2 \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + (-1)^2 \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2} = \sqrt{4 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2}$$

2.2.10 Signifikanz

Die Betrachtung der statistischen Fehler ist besonders wichtig, wenn man herausfinden will, ob die Differenz zweier Messergebnisse, $N_1 \pm \Delta N_1$ und $N_2 \pm \Delta N_2$, allein durch statistische Schwankungen erklärt werden kann oder auf unterschiedliche Versuchsbedingungen zurückzuführen ist. Viele Experimente laufen auf diese Fragestellung hinaus.

Nach der obigen Formel erhält man für den Fehler der Differenz $D = N_1 - N_2$.

$$\Delta D = \sqrt{\Delta N_1^2 + \Delta N_2^2}$$

In anderer Schreibweise bzw. in der σ -Schreibweise:

$$\sigma_D = \sqrt{\sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2}$$

Der Unterschied $D = N_1 - N_2$ zwischen den zwei Resultaten ist signifikant wenn gilt:

$$D > 3\Delta D \quad \text{bzw.} \quad D > 3\sigma_D$$

d.h. wenn die Differenz der Messungen größer als 3 Standardabweichungen ist.

2.2.11 Verteilungsfunktionen

Zur Beschreibung von statistisch verteilten Messergebnissen benutzt man Verteilungsfunktionen, die jedem möglichen Messwert seine relative Häufigkeit zuordnet. In der Physik von besonderer Bedeutung sind:

Gaußsche Normalverteilung und Poisson-Verteilung.

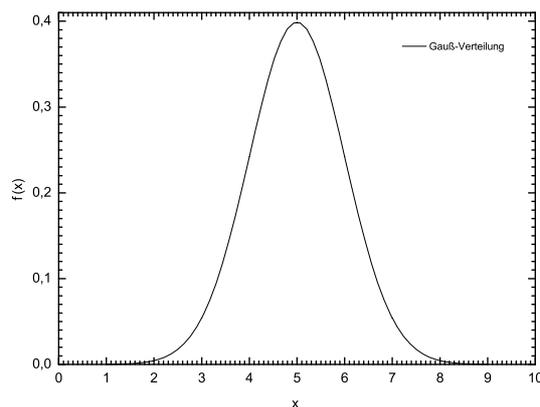
Die Gaußsche Normalverteilung wird im folgenden Abschnitt behandelt. Das Kapitel 4.9, Versuch Radioaktivität und Statistik, enthält eine Beschreibung zu verschiedenen Verteilungen, insbesondere zur Poissonverteilung.

2.2.12 Gaußsche Normalverteilung

In der Regel (jedoch nicht notwendigerweise) sind statistisch fluktuierende Messergebnisse um den wahren Wert (Mittelwert) "normalverteilt". Dabei ist:

$$f(x)\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-x_w)^2}{2\sigma^2}} \Delta x$$

die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung als Ergebnis einen Wert zwischen x und $x + \Delta x$ zu erhalten. Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist auf 1 normiert.



Die Verteilung ist glockenförmig und symmetrisch um den wahren Wert x_w . Der Parameter σ entspricht dabei dem mittleren quadratischen Fehler oder der Standardabweichung einer Einzelmessung. Er ist ein Maß dafür, wie stark die einzelnen Messwerte um den Mittelwert streuen. Weil die Normalverteilung symmetrisch um den wahren Wert ist und für $x = x_w = \bar{x}$ ein Maximum erreicht, ist der wahre Wert gleichzeitig auch der wahrscheinlichste Wert einer Messung. Der wahre Mittelwert x_w ergibt sich als:

$$x_w = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

und die wahre Streuung (Varianz) als Mittelwert über alle Abweichungsquadrate $(x - x_w)^2$:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_w)^2 f(x) dx$$

Für Zählreihen erhält man bei einem Mittelwert \bar{N} für die Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\bar{N}}$$

und für den relativen statistischen Fehler:

$$\frac{\sigma}{\bar{N}} = \frac{\sqrt{\bar{N}}}{\bar{N}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}}}$$

Die Gaußverteilung für Zählreihen hat folgende Form:

$$P(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(N - \bar{N})^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

In der Praxis ist der Mittelwert \bar{N} einer sehr langen Messreihe meistens nicht gegeben, sondern nur das Resultat N einer einzigen Messung. Auch in diesem Fall kann man etwas mit Gleichung (1) anfangen, indem man sie folgendermaßen interpretiert:

$P(N)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert \bar{N} ergeben würde, wobei das Resultat N einer einzigen Messung gegeben ist.

$$\sigma \approx \sqrt{N}$$

Es ist üblich, das Resultat einer solchen Zählung anzugeben in der Form:

$$N \pm \sqrt{N}$$

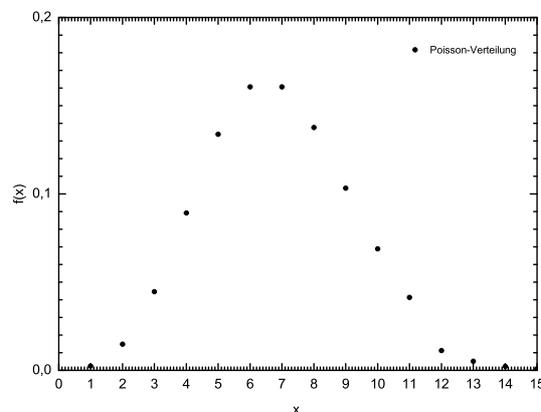
2.2.13 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung beschreibt die Verteilung von unendlich vielen Messungen solcher Ereignisse, deren Eintreten wesentlich weniger wahrscheinlich ist als deren Nichteintreten. Sie findet Anwendung bei der Zählung "seltener" Ereignisse, wobei selten hier als Faustregel mit < 30 anzusehen ist. Bei der Zählung treten nur ganzzahlige positive Werte einschließlich der Null auf. Für diese diskreten Werte k ist die Poisson-Verteilung definiert durch:

$$P(k) = \frac{\bar{x}^k}{k!} e^{-\bar{x}}$$

Die Verteilung enthält nur eine Konstante \bar{x} , die beliebige positive Werte annehmen kann. Die Standardabweichung σ wird bei der Poisson-Verteilung allein durch den Mittelwert \bar{x} bestimmt.

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}}$$



Das Bild dieser Verteilung ist für kleine Werte von \bar{x} stark asymmetrisch. Für große \bar{x} kann die Poisson-Verteilung praktisch durch eine Gaußverteilung angenähert werden. Die Bedingung $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$ ist weiterhin erfüllt. In der Medizin (z.B. bei klinischen Tests) hat man es häufig mit der Beobachtung von seltenen Ereignissen zu tun.

2.2.14 Rechnungen mit zufallsverteilten Größen

Werden zwei statistisch schwankende Größen x_1 bzw. x_2 addiert (subtrahiert), so sind die Mittelwerte zu addieren (subtrahieren), die Quadrate der Varianzen aber immer zu addieren!

Mittelwert der Summe $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

Mittelwert der Differenz $\overline{x_1 - x_2} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Fehler von $x_1 + x_2$ bzw. $x_1 - x_2$: $\sigma_{x_1 \pm x_2} = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2}$

Beispiel: Subtraktion des Untergrundes n_2 von einer Zählrate n_1 bei gleichen Messzeiten:

Zählrate ohne Untergrund: $n = n_1 - n_2$

Geschätzter Fehler dieser Zählrate: $\sigma_n = \sqrt{n_1 + n_2}$

2.3 Physikalische Einheiten und Konstanten

Basisgröße	Basiseinheit	Einheitenzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

Abgeleitete Einheiten			
Kraft	Newton	N	$= \text{kg m/s}^2$
Spannung	Volt	V	$= N m/A s = W/A$
Leistung	Watt	W	$= V A = J/s$
Energie	Joule	J	$= N m = W s$ $(1eV = 1.6022 \cdot 10^{-19} W s)$
Druck	Pascal	Pa	$= N/m^2$
Ladung	Coulomb	C	$= A s$
Kapazität	Farad	F	$= A s/V$
Induktivität	Henry	H	$= V s/A$
Frequenz	Hertz	Hz	$= 1/s$
El. Widerstand	Ohm	Ω	$= V/A$
Aktivität	Becquerel	Bq	$= \text{Zerfall / s}$
	Curie (alte Einheit)	1 Ci	$= 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$
Ionendosis			C/kg
Energiedosis	Gray	Gy	$= J/kg$
Äquivalentdosis	Sievert	Sv	$= RBW Gy = Q Gy$
		RBW	$= \text{rel. biol. Wirksamkeit}$

Zehnerpotenz	Vorsatz	Vorsatzzeichen
10^{12}	Tera	T
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^2	Hekto	h
10^1	Deka	da
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Piko	p
10^{-15}	Femto	f

Naturkonstanten			
Größe	Symbol	Wert	Einheit
Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	c	$2.997925 \cdot 10^8$	m/s
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ $1.2566 \cdot 10^{-6}$	$V s/(A m)$
Dielektrizitätskonstante	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.8542 \cdot 10^{-12}$	$A s/(V m)$
Gravitationskonstante	G	$6.6743 \cdot 10^{-11}$	$m^3/(kg s^2)$
Erdbeschleunigung	g	9.81	m/s^2
Masse des Elektrons	m_e	0.511	MeV/c^2
Masse des Protons	m_p	938.272	MeV/c^2
Masse des Neutrons	m_n	939.565	MeV/c^2
Elementarladung	e	$1.6022 \cdot 10^{-19}$	$A s$
Atomare Masseneinheit	m_u	$1.661 \cdot 10^{-27}$ 931.494	kg MeV/c^2
Avogadro-Konstante	N_A	$6.022 \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Faraday-Konstante	$F = e N_A$	96485	$A s/mol$
Molare Gaskonstante	R	8.3145	$J/(mol K)$
Boltzmann-Konstante	k	$1.3807 \cdot 10^{-23}$	J/K
Plancksche Konstante	h	$6.6261 \cdot 10^{-34}$	$J s$
Numerische Konstanten	π e	3.1416 2.7183	
Normalbedingungen	p_0 T_0 V_0	101 325 273.15 $22.414 \cdot 10^{-3}$	Pa K m^3/mol

Umrechnungsfaktoren
1 bar = 10^5 Pa = 750 Torr
1 kcal = $4.186 \cdot 10^3$ J = $1.16 \cdot 10^{-3}$ kWh
1 Jahr = $3.156 \cdot 10^7$ Sekunden = 365.25 Tage = 8766 Stunden

2.4 Materialdaten

Brechzahl (n)	
Stoff	Brechzahl
Vakuum	1
Luft	1.00
Wasser	1.333
Quarzglas	1.46
Flintglas	1.92
Diamant	2.42
Ölimmersion	1.55
Menschliches Auge	
Kammerwasser, Glaskörper	n = 1.337
Linse	n = 1.358
Hornhaut	r = 7.83 mm

Viskosität (η)	
Stoff	<i>Pa s</i>
Blut (37 ⁰ C)	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Wasser (0 ⁰ C)	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Wasser (20 ⁰ C)	$1.0 \cdot 10^{-3}$
Wasser (60 ⁰ C)	$0.47 \cdot 10^{-3}$
Luft	$0.018 \cdot 10^{-3}$

Energieverbrauch	
Tätigkeit	Leistung (W)
Schlafen	80
Stehen	120
Auto fahren	150
Gehen	200
Schwimmen	400
Tennis spielen	500
Rad fahren	900
Renntag fahren	1500

Biologischer Brennwert	
Nährstoff	kJ/g
Kohlehydrate	17
Proteine	17
Alkohol	30
Fett	40

Spezifische Wärmekapazität (c)	
Substanz	$J/(g\ K)$
Aluminium	0.9
Blei	0.128
Eis ($-10\ ^\circ\text{C}$)	2.05
Eisen	0.45
Gold	0.126
Kupfer	0.386
Quecksilber	0.140
Silber	0.233
Wasser ($24\ ^\circ\text{C}$)	4.18
Mensch	3.48
Schmelzenergie von Eis	$\lambda_s = 333.5\ \text{J/g}$
Verdampfung von Wasser	$\Lambda_s = 2257\ \text{J/g}$

Dichte (ρ)	
Substanz	g/cm^3
Aluminium	2.70
Blei	11.3
Blut	1.06
Butanol	0.81
Dampf ($100\ ^\circ\text{C}$)	$0.6\ 10^{-3}$
Eis	0.92
Eisen	7.86
Erythrozyten	1.10
Glas	2.6
Gold	19.3
Holz	0.7
Knochen	1.5
Kupfer	8.93
Luft	$1.293\ 10^{-3}$
Meereswasser	1.06
Quecksilber	13.6
Wasser ($4\ ^\circ\text{C}$)	1.0

Halbwertszeit ($T_{1/2}$)	
Isotop	
^{67}Ga	78.3 h
^{99m}Tc	6.0 h
^{123}I	13.2 h
^{131}I	8.0 d
^{133}Xe	5.3 d
^{201}Tl	73.1 h

Spezifischer Widerstand (ρ)	
Material	Ωm
Aluminium	$2.5 \cdot 10^{-8}$
Silber	$1.6 \cdot 10^{-8}$
Kupfer	$1.7 \cdot 10^{-8}$
Eisen	$10 \cdot 10^{-8}$
Wolfram	$5.5 \cdot 10^{-8}$

Massenabsorptionskoeffizient (μ/ρ)		
	Energie der Röntgenstrahlung	
	50 keV	100 keV
Material	$\mu/\rho(\text{cm}^2/\text{g})$	$\mu/\rho(\text{cm}^2/\text{g})$
Wasser (4 °C)	0.2	0.17
Aluminium	0.3	0.18
Blei	8.0	5.00

Schallgeschwindigkeit (c)	
Medium	m/s
Glas (20 °C)	5300
Wasser (0 °C)	1271
Wasser(20 °C)	1480
Wasser (37 °C)	1530
Blut	1560
CO ₂ (20 °C)	276
Luft (0 °C)	331

2.5 Dosimetrie und Strahlenschutz

Der Begriff Strahlendosis ist ein Begriff aus der Pharmakologie und bezieht sich auf die ionisierende Wirkung der Strahlung, d.h. die bei der Wechselwirkung mit einem Atom abgegebene Energie muss größer als die entsprechende Ionisierungsenergie sein. Die Strahlendosis beschreibt die *Wirkung der Strahlung* und nicht die Strahlung selbst. Man unterscheidet zwischen Energiedosis und Ionendosis (entsprechend auch zwischen Energiedosisleistung und Ionendosisleistung).

- 1) **Energiedosis:** Wird ein Objektelement einer ionisierenden Strahlung ausgesetzt, so wird von der Strahlung an das Objektelement eine Energie dW abgegeben. Die Energiedosis D ist das Verhältnis der aufgenommenen Energie dW zur Masse dm des bestrahlten Objektelements:

$$D = \frac{dW}{dm} = \frac{\text{absorbierte Strahlungsenergie}}{\text{Masse des absorbierenden Gewebes}}$$

Sie hängt neben der Energie und der Art der Strahlung auch von der Art des absorbierenden Gewebes ab.

Die Einheit der (absorbierten) Energiedosis ist das Gray.

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg} = 6.24 \cdot 10^{12} \text{ MeV/kg}$$

Die früher benutzte, jetzt nicht mehr zulässige Einheit der Energiedosis, ist rad (radiation absorbed dose):

$$1 \text{ rad} = 0.01 \text{ J/kg} \quad 1 \text{ Gy} = 100 \text{ rad}$$

- 2) **Ionendosis:** Da die Energiedosis schwer direkt zu messen ist (bei der 50% Letaldosis, also 4 Gy, würde sich ein Mensch um $10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ erwärmen!), benutzt man zur Bestimmung der Strahlendosis die Ionendosis und bekannte Umrechnungsfaktoren, um die Energiedosis zu erhalten. Die Einheit der Ionendosis ist

$$1 \text{ As/kg} = 1 \text{ C/kg}$$

d.h. die Strahlung, die in 1 kg Luft Ionen und Elektronen mit je 1 C Ladung erzeugt hat.

Für Weichteilgewebe und Luft gilt:

$$1 \frac{\text{C}}{\text{kg}} \approx 38.8 \frac{\text{J}}{\text{kg}} = 38.8 \text{ Gy}$$

Die früher benutzte Einheit ist das Röntgen, abgekürzt R:

$$1 \frac{\text{C}}{\text{kg}} = 3.88 \cdot 10^3 \text{ R}$$

Damit entspricht für Weichteilgewebe und Luft die Energiedosis 1 Gray *ungefähr* der früheren Ionendosis 100 R.

- 3) **Äquivalentdosis:** Das biologische Strahlenrisiko ist für verschiedene Strahlenarten unterschiedlich. Daher hängt die Schädigung organischen Gewebes durch ionisierende Strahlung außer von der Energiedosis auch von der Art der Strahlung ab. Dicht ionisierende Strahlung richtet bei gleicher Energiedosis viel schlimmere Schäden entlang der Teilchenspuren an. Die Äquivalentdosis ist definiert als die vom Gewebe aufgenommene Energiedosis multipliziert mit dem dimensionslosen Strahlungsgewichtungsfaktor w_R (früher Qualitätsfaktor Q). Die Einheit der Äquivalentdosis ist wie die der Energiedosis [J/kg]. Um allerdings den Unterschied klarzustellen, erhält die Äquivalentdosis eine eigene Einheit, das Sievert [Sv] (früher Rem (Röntgen equivalent man)): $1 \text{ Sv} = 100 \text{ Rem}$). Die Strahlungsgewichtungsfaktoren werden von der Internationalen Strahlenschutzkommission festgelegt und durch die deutsche Strahlenschutzkommission in die Strahlenschutzverordnung übernommen. Der Strahlungsgewichtungsfaktor ist daher keine Naturkonstante sondern ein "politisch" festgelegter Wert (Tabelle I)

$$H = w_R D$$

H : Äquivalentdosis

w_R : Strahlungsgewichtungsfaktor

D : Energiedosis

Das große Problem beim Strahlenschutz besteht darin, dass der Mensch kein Sinnesorgan hat, das ihn vor der Gefährdung durch Strahlung warnt.

Im folgenden sind die zur Zeit vom Gesetzgeber festgelegten maximalen Äquivalentdosen aufgeführt:

Voraussichtliche Auswirkung einer kurzzeitigen Ganz-Körper-Bestrahlung beim Menschen mit γ -Strahlen	
0.25 Sv: Gefährdungsdosis	(vorübergehende Blutbildveränderungen, sonst keine Strahlenkrankheiten)
1 Sv: Kritische Dosis	(Übelkeit und Erbrechen "Strahlenkater"; untere Grenze lebensgefährlicher Strahlenschädigungen) Erholung innerhalb von einigen Monaten wahrscheinlich.
4 Sv: Mittel-Letale Dosis	d.h. 50% der betroffenen Personen sterben (ohne ärztliche Behandlung) innerhalb von 30 Tagen. (Erholung der Überlebenden nach 6 Monaten) Besonders betroffen: Knochenmark.
> 6 Sv	Magen-Darm-System versagt
> 15 Sv: Letale Dosis	d.h. 100% der betroffenen Personen sterben
> 50 Sv:	schwere Nervenschäden; Tod innerhalb einer Woche

- 4) **Relative biologische Wirksamkeit (RBW):** Die relative biologische Wirksamkeit unterscheidet sich vom Strahlungsgewichtungsfaktor dadurch, dass es sich nicht um eine Strahlenschutzdefinition handelt, sondern um einen tatsächlichen Vergleich biologischer Effekte auf Zellen bei verschiedenen Strahlungsarten. Die RBW ist definiert durch das Verhältnis der Dosis einer Bezugsstrahlung (250 kV Röntgenstrahlung) zu der Dosis einer zu vergleichenden Strahlung.

$$RBW_{Y,f} = \frac{D_{RBW}}{D_Y}$$

D_Y ist dabei diejenige Energiedosis, die notwendig ist, um mit der Strahlenart Y unter sonst gleichen Bedingungen am gleichen biologischen Objekt die gleiche biologische Wirkung f zu erzielen, wie mit der Energiedosis D_{RBW} der Bezugsstrahlenart.

Die gleiche physikalische Dosis kann bei verschiedenen Strahlenarten unterschiedliche biologische Wirksamkeit entfalten. Gründe dafür können die unterschiedliche Beschaffenheit des Gewebes, die unterschiedliche zeitliche Dosisleistung oder die unterschiedliche örtliche Dosisverteilung (Linearer Energietransfer, LET) und Ionisationsdichte aufgrund der Strahlung sein. So kann zum Beispiel Röntgenstrahlung eine geringe Dichte von Ionisationspaaren erzeugen, wohingegen Protonenstrahlung mit der deponierten Dosis eine höhere Dichte Ionisierung bewirkt. Dicht ionisierende Strahlung erzeugt mehr Ionisation pro Volumen (Ionisationscluster) und daher ist beispielsweise im menschlichen Körper in den Zellen die Wahrscheinlichkeit von Doppelstrangbrüchen der DNA größer als von weniger dramatischen Einzelstrangbrüchen.

Die relative biologische Wirksamkeit ist ausserdem abhängig vom betrachteten biologischen Effekt (Einzelstrangbruch, Doppelstrangbruch der DNA).

Beispiel:

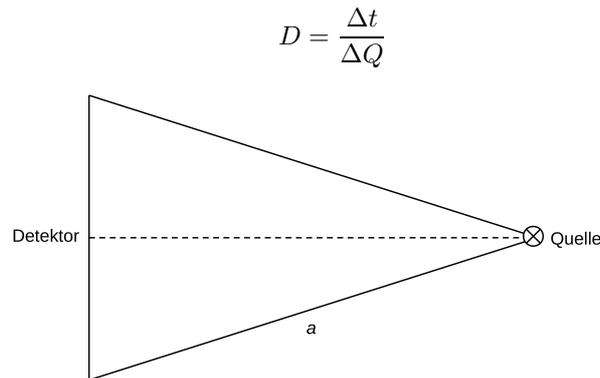
- Röntgenstrahlung erzeugt etwa 1000 Einzelstrangbrüche pro Zelle und Gray, alpha-Strahlung hingegen etwa 250 Einzelstrangbrüche pro Zelle und Gray. Also ist der RBW-Wert der alpha-Strahlung für die Erzeugung von Einzelstrangbrüchen $RBW_{\alpha ESB} = 0.25$
- Röntgenstrahlung erzeugt etwa 43 Doppelstrangbrüche pro Zelle und Gray, alpha-Strahlung hingegen etwa 63 Doppelstrangbrüche pro Zelle und Gray. Der RBW-Wert der alpha-Strahlung für die Erzeugung von Doppelstrangbrüchen ist $RBW_{\alpha DSB} = 1.5$.

- 5) Die Einheit für die **Zerfallsrate** dN/dt eines radioaktiven Präparats ist das Becquerel (Bq):

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ Zerfall pro Sekunde}$$

Dabei werden eventuell nachfolgende weitere Zerfälle nicht mitgezählt, und es ist auch gleichgültig, welche Zerfallsart (α -, β -Zerfall oder z.B. Elektroneneinfang) im Einzelfall stattfindet. Für radioaktive Tochterkerne sind also weitere Aktivitätsangaben erforderlich.

- 6) Bestrahlt man ein Objekt mit einem radioaktiven Präparat, so ist die absorbierte Dosis der Bestrahlungsdauer direkt und dem Quadrat des Abstandes zwischen Objekt und Präparat umgekehrt proportional.



Der Zahlenwert der Energiedosis hängt außerdem von der Art und dem Spektrum der Strahlung und der Umhüllung des Präparats ab.

Beispiel: Bestrahlt man ein Objekt mit einem 1 mg - Radium - Präparat, das sich in einer 0.5 mm starken Platinummhüllung befindet, aus 1 cm Entfernung 1 Minute lang, so beträgt die Energiedosis etwa $0.0013 \text{ Gy} = 1.3 \text{ mSv}$.

Tabelle I:

Strahlungsart	Q = RBW
Röntgen- und γ - Strahlen, Elektronen (E> 30 keV)	1
dito (E< 30 keV)	1.7
Thermische Neutronen	3
Schnelle Neutronen (> 1 MeV)	10
Protonen (bis 10 MeV)	10
α - Teilchen, schwere Kerne	≥ 20

Anhand der Tabelle sieht man, dass eine Energiedosis von 1 Gy Protonenstrahlung im organischen Gewebe die gleiche schädigende Wirkung hat wie 10 Gy Röntgenstrahlung; beiden entspricht eine Äquivalentdosis von 10 Sv.

Tabelle II:

Höchstzulässige Äquivalentdosen pro Jahr:

Personenkreis	Dosis Ganzkörper	Dosis Hände; Unterarme Füße; Haut
beruflich strahlenexponierte Personen Kategorie A (jährl. ärztl. Untersuchung)	6 mSv	150 mSv
beruflich strahlenexponierte Personen, Kategorie B	1 mSv	50 mSv
beruflich nicht strahlenexponierte Personen in außerbetrieblichen Überwachungsbereichen	1 mSv	50 mSv

Tabelle III:

Die natürliche Strahlenbelastung des Menschen in mSv/a			
Ganzkörperbestrahlung	Bestrahlung von außen	Kosmische Strahlung	(hängt stark von der Höhe ab) 0.35 (in Heidelberg) 43.80 (in 10 km; Flugzeug)
		Umgebungs-Strahlung	0.30 - 12.00 0.40 (in Heidelberg)
	Bestrahlung von innen	^{40}K ^{14}C	0.20 0.015
Teilkörperbestrahlung		^{226}Ra (Knochen) ^{222}Rn (Lunge)	0.50 0.25 - 2.5
Insgesamt			1.6 - 5.0

Tabelle IV:

1) Aufnahme für diagnostische Zwecke

Strahlenbelastung in der Medizin	
Oberflächendosis pro Aufnahme	
Objekt	Dosis in mSv
Hände	0.6
Schädel, seitlich	8 - 12
Wirbelsäule v. vorn	16 - 25
Becken	20 - 25
Zähne	30 - 50
Stirnhöhle	bis zu 75
Lungen, großer Abstand	0.4 - 2
Lungen, Schicht-Aufnahme	5
Herz	20
Magen	25 - 30

2) Strahlenbelastung bei Durchleuchtung.

Durchschnittliche Oberflächenbelastung bei Fokus-Haut-Abstand 35 cm, pulsierender Spannung und hinter einem 1,5 mm dicken Aluminium Absorber:

Röhrenspannung	mSv/Min
60 kV	70
80 kV	140
100 kV	200

Strahlenbelastung durch die Röntgenröhre des Praktikums

Die Röntgenröhren des Praktikums werden in regelmäßigen Abständen durch den TÜV überprüft. Die gemessene Dosisleistung liegt unterhalb der Messgrenze (s. Prüfbericht des TÜV).

2.5.1 Literatur zum Strahlenschutz:

- 1) H. Krieger, Grundlagen der Strahlungsphysik und des Strahlenschutzes, Teubner, Wiesbaden (2007)
- 2) C. Grupen, Grundkurs Strahlenschutz, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2008)
- 3) Strahlenschutzverordnung vom 20.7.2001
- 4) Röntgenverordnung vom 30.4.2003

2.6 Strahlenschutzbelehrung

Der Besuch der Strahlenschutzbelehrung ist verbindlich und muss durch Unterschrift bestätigt werden. Wenn Sie nicht an einer Strahlenschutzbelehrung teilgenommen haben, dürfen Sie die Versuche 17 und 18 nicht durchführen.

Der Umgang mit radioaktiven Quellen und mit Röntgenstrahlung wird durch die Strahlenschutzverordnung bzw. die Röntgenverordnung geregelt. Beide Verordnungen schreiben vor, dass Personen, die mit solchen Dingen umgehen, über die möglichen Gefahren belehrt werden. Dies geschieht durch den Text in Ihrer Anleitung und durch die mündliche Belehrung im Rahmen der Vorbesprechung. Beide Verordnungen legen in übereinstimmender Weise die Dosis-Grenzwerte für beruflich strahlenexponierte Personen fest. (siehe Tabelle II der Anleitung).

Wenn die tätigkeitsbedingte Jahresdosis unter 5 mSv (Ganzkörperbestrahlung, 50 mSv Hände usw., also 1/10 der Zeile "Kategorie A") bleibt, ist man im Sinne der Verordnungen nicht beruflich strahlenexponiert. Dies ist im Praktikum der Fall. Diese Grenze wurde im Hinblick auf die mittlere Belastung der Menschen in der Bundesrepublik von ca. 4 mSv/Jahr aus natürlichen Ursachen gewählt.

Beide Verordnungen legen auch die sog. Strahlenschutzbereiche fest, wovon im Praktikum nur der "Betriebliche Überwachungsbereich" eine Rolle spielt: Ein solcher liegt vor, wenn dort bei einem permanenten Aufenthalt (=24 Stunden pro Tag, 7 Tage pro Woche, 52 Wochen pro Jahr) durch die Tätigkeit zusätzlich eine höhere Dosis als die schon oben erwähnten 5 mSv/Jahr auftreten kann. Diese Grenze entspricht 0,67 $\mu\text{Sv/h}$, was z.B. von den ^{137}Cs -Quellen in 10 cm Abstand ohne den Bleikollimator um den Faktor 20 überschritten würde; der Bleikollimator schirmt das dann - in diesem Abstand - auf ca 2 $\mu\text{Sv/h}$ ab (zum Vergleich: Die Höhenstrahlung, der man bei einem Flug unterworfen ist, hat in 12 km Höhe in mittlerer Geographischer Breite eine Dosisleistung von 5 $\mu\text{Sv/h}$).

In der Strahlenschutzverordnung sind auch die sog. Freigrenzen für jedes Isotop festgelegt, d.h. die Quellstärken oberhalb deren der "Besitz" dem Gewerbeaufsichtsamt angezeigt werden muß bzw. einer Genehmigung bedarf (oberhalb des zehnfachen Wertes der Freigrenze). Die Cäsium-Quellen haben 1.5 MBq, die Freigrenze für ^{137}Cs ist 0.5 MBq, d.h. sie wären nicht anzeigepflichtig. Wegen anderer Quellen in den Praktika liegt aber für das Gebäude eine sog. Umgangsgenehmigung vor.

Wegen der besonderen Bedeutung für die Medizin möchten wir - unabhängig von dem Zwecke der Belehrung - auf die Werte in der Tabelle IV, Teil 2 der Anleitung hinweisen: Die Zahlen dort sind Millisievert pro Minute; die Dosis-Schwelle für akute Schäden (Hautrötung u.ä.) liegt bei 0.5 bis 1 Sv, wäre also in 10 - 15 Min. bereits überschritten. Im Gegensatz zu der höherenergetischen Gammastrahlung kann man Röntgenstrahlung jedoch gut abschirmen und so reduzieren die 3 mm Blei für die Streustrahlung (in Strahlrichtung sind unsere Apparaturen sogar mit 1 cm abgeschirmt!) diese selbst bei 100 kV Betriebsspannung um den Faktor 10^4 . Man kann also außerhalb der Apparatur keine Strahlung mehr nachweisen.

3 Regeln für das Praktikum

3.1 Organisation

Das Physikalische Praktikum für Studierende der Medizin und Zahnmedizin in Heidelberg besteht aus:

- dem praktischen Teil
- den begleitenden Übungen
- der Abschlussklausur

1) Praktischer Teil

Vorbereitung

Zu jedem Versuch gehört eine entsprechende Vorbereitung (s. Abschnitt B). Diese wird vor Versuchsbeginn von den Assistenten überprüft und ist *Voraussetzung* für die Teilnahme an dem entsprechenden Praktikumstag.

Vortestat

Das Vortestat wird vom Assistenten nach der Ausführung des Versuches eingetragen.

Auswertung

Jeder Versuch ist entsprechend der Praktikumsanleitung auszuwerten. Messprotokolle sind einzukleben, soweit sie nicht direkt in die Protokolle eingetragen werden konnten.

Haupttestat

Um ihr Protokoll überprüfen zu lassen, beschriften sie es mit dem Namen des betreffenden Assistenten und werfen es in den für das Praktikum vorgesehen Briefkasten im Studentensekretariat der Medizin. Der Assistent wird dann eine Überprüfung vornehmen und auf dem Deckblatt vermerken, ob alles in Ordnung ist oder ob nachgearbeitet werden muss. Der Assistent gibt das kontrollierte Protokoll dann beim nächsten Praktikum zurück.

Bei korrekter und vollständiger Auswertung wird das Haupttestat eingetragen.

2) Übungen

In den Übungsstunden werden Aufgaben aus dem Stoff des Praktikums und der Vorlesung besprochen. Die Übungsaufgaben sollen in Hausarbeit bereits ausgearbeitet sein, so dass in den Übungsstunden Zeit für die weitere Besprechung besteht.

3) Abschlussklausur

Die Klausur findet gegen Ende der Vorlesungszeit, in der Regel an einem Samstag, statt. Ort und Termin werden den einzelnen Gruppen während des Praktikums und durch Aushang bekanntgegeben. Eine Anmeldung zur Klausur ist - auch für Nachholer - nicht erforderlich. Ein gültiger Ausweis mit Lichtbild ist zur Klausur mitzubringen.

Teilnahmeberechtigung

Teilnahmeberechtigt sind nur Praktikumsteilnehmer, die für *alle* Versuche das Haupttestat erhalten haben.

Klausuraufgaben

Aus den Stoffgebieten, die im Praktikum bzw. in der Vorlesung behandelt wurden, werden 10 Aufgaben gestellt, die zusätzlich in Teilaufgaben untergliedert sein können. Für jede Teilaufgabe sind mehrere Möglichkeiten für das Ergebnis vorgegeben; das richtige Ergebnis ist *eindeutig* zu kennzeichnen (einzukreisen). Der Rechenweg ist anzugeben.

Bewertung

Die Aufgaben werden nach einem Punktsystem bewertet. Die für eine Teilaufgabe vorgesehene Punktzahl wird gegeben, wenn

- a) das richtige Ergebnis eingekreist ist *und*
- b) in einer separaten Ausarbeitung, die auf das entsprechende Aufgabenblatt geschrieben werden muss, dieses Ergebnis auf korrekte Weise hergeleitet wurde.

Für das Bestehen der Klausur sind mindestens 36 von 60 möglichen Punkten erforderlich.

Hilfsmittel

Ein Taschenrechner (mit \exp , \log , $\sqrt{\quad}$, \sin , \cos , x^y) ist als Arbeitsmittel unerlässlich. Sonst ist nur die Praktikumsanleitung zugelassen. Physikalische Konstanten sind den jeweiligen Aufgabentexten bzw. den Tabellen dieser Praktikumsanleitung zu entnehmen.

Wiederholbarkeit

Gemäß Studienordnung für den vorklinischen Teil des Studiengangs Medizin vom 23. Mai 1997 gilt ab Wintersemester 1997/98:

An der Abschlussklausur kann einschließlich Wiederholungsmöglichkeit nur insgesamt **dreimal** innerhalb eines Zeitraums von 18 Monaten nach Praktikumsbeginn teilgenommen werden.

3) Praktikumsschein

Der Praktikumsschein wird vergeben, wenn alle Versuche testiert *und* die Abschlussklausur bestanden wurden.

Wer spätestens am Ende des letzten Praktikums (Rückgabetag) nicht alle Haupttestate erhalten hat, hat den experimentellen Teil des Praktikums nicht abgeschlossen und muss das ganze Praktikum in einem späteren Semester wiederholen.

3.2 Versuchsvorbereitung und -durchführung

Voraussetzung für die Durchführung der Versuche und deren Auswertung ist eine gründliche Vorbereitung. Die experimentellen und theoretischen Grundlagen sowie die einzelnen Versuchsetappen sind anhand der Versuchsanleitung und der angegebenen Literatur in kurzer Form ins Protokoll einzutragen. Dies ist, zusammen mit der schriftlichen Bearbeitung der einfachen Aufgaben als Teil der Vorbereitung (ebenfalls ins Protokoll eintragen), Voraussetzung für die Teilnahme am jeweiligen Versuch. Ist diese Vorbereitung nicht oder nicht vollständig vorhanden, muss der entsprechende Versuch zu einem späteren Termin nachgeholt werden.

3.3 Auswertung und Protokollführung

Ein Protokoll ist eine dokumentarische Darstellung des gesamten Versuchsablaufs: Versuchsaufbau, Versuchsdurchführung, Erfassung und Auswertung von Messdaten, Diskussion der Ergebnisse. Die Qualität der bei einem Praktikumsversuch erzielten Ergebnisse hängt nicht nur vom Messverfahren und der Genauigkeit der Messgeräte ab, sondern auch vom exakten experimentellen Arbeiten und der korrekten Protokollführung.

Notieren Sie *alle* Parameter, die Sie für die Auswertung brauchen, während der Versuchsdurchführung. Ein sauberes Protokoll muss lesbar und klar sein; Schönschrift ist nicht erforderlich.

Informieren Sie sich anhand der Praktikumsanleitung über das Ziel des Versuchs und die Reihenfolge der Messungen. Überlegen Sie sich, welche Größen besonders genau gemessen werden müssen, um den Fehler auf die zu bestimmende Größe möglichst klein zu halten. Formen Sie dazu die entsprechenden Formeln so um, wie sie für den Versuch gebraucht werden.

Bereiten Sie soweit wie möglich das Messprotokoll vor, indem Sie die Formeln und das Protokollschema aufschreiben. Das für den Versuch benötigte Millimeterpapier wird im Praktikum verteilt.

Bei allen Formeln sollte erkennbar sein, welcher Zahlenwert und welche Maßeinheit jeweils eingesetzt wurden.

a) Numerische Daten

- 1) Messdaten und daraus errechnete Ergebnisse sind stets mit Fehlern behaftet. Ohne Fehlerangabe sind die zwei Ergebnisse $x=2$ m und $x=2.000$ m *verschieden zu interpretieren*, nämlich im ersten Fall ist der Wert zwischen 1.5 und 2.5 m, im zweiten Fall liegt ein sehr viel genauerer Wert zwischen 1.9995 und 2.0005 m vor.
- 2) Wenn die **Fehler bekannt** sind, sollte das Ergebnis z.B. als:

$$x = (2.0 \pm 0.5) \text{ m bzw. } I = (3.718 \pm 0.012) \text{ A}$$

niedergeschrieben werden.

- 3) Bei Endergebnissen sollten soviele Stellen angegeben werden, wie es der erzielten Genauigkeit entspricht. *Es ist unsinnig, zu viele Stellen vom Taschenrechner abzuschreiben.*
- 4) Zwischenergebnisse sollten hingegen für die weitere Berechnung so genau wie nötig verwendet werden, um *Rundungsfehler beim Rechnen* zu vermeiden. Wenn Stellen nicht weiterverwendet oder aufgeschrieben werden, wird immer auf- oder abgerundet.
- 5) Bei keinem Ergebnis darf die zugehörige *Maßeinheit* fehlen. Es ist wichtig, auch in den Zwischenrechnungen die Maßeinheiten mitzuführen. Man hat dann eine zusätzliche Kontrolle für die Richtigkeit der verwendeten Formeln, da das Ergebnis in der richtigen Einheit herauskommen muss, und man erkennt außerdem, wann Maßeinheiten in andere umgerechnet werden müssen.

b) Diagramme

- 1) Die Diagramme sollen übersichtlich die funktionalen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen darstellen. Um eine möglichst einfache Darstellung zu erhalten, sind die Achsen geeignet (linear bzw. logarithmisch) zu wählen.
- 2) Diagramme sind stets auf *Millimeter- bzw. Logarithmenpapier* zu zeichnen, das ins Protokoll eingeklebt wird.
- 3) Beide Achsen sind zu beschriften mit Bezeichnung, Werten (Skala) und Maßeinheit der entsprechenden Messgrößen. Maßstäbe sind so zu wählen, dass die darzustellende Kurve nicht zu steil und nicht zu flach verläuft und alle gemessenen Werte dargestellt werden können.
- 4) Zur Unterscheidung mehrerer Messreihen in einem Diagramm sollten verschiedene Farben oder Symbole verwendet werden.
- 5) Messdaten enthalten Messunsicherheiten; deshalb sind die Messpunkte mit Fehlerbalken oder Fehlerkreuzen einzuzichnen, die die Messunsicherheiten darstellen.
- 6) Für eine subjektive Auswertung einer linearen Abhängigkeit zeichnet man eine Ausgleichsgerade so durch die Messpunkte, dass die Summe der Abweichungsquadrate der Messpunkte zur Geraden möglichst klein wird (Gaußsches Prinzip). Dafür gibt es in vielen Taschenrechnern geeignete Programme. Eine derartige Ausgleichsgerade kann man auch ungefähr per Augenschein einzeichnen; am besten mit durchsichtigem Lineal. Eine gute Ausgleichsgerade geht durch ca. 70% aller Fehlerbalken. Es sollten etwa gleichviele Messpunkte oberhalb und unterhalb der Geraden liegen.
- 7) Die Steigung der Ausgleichsgeraden wird mit Hilfe zweier *weit auseinanderliegender* Punkte (A, B) **auf** dieser Geraden berechnet. A und B werden i.a. keine Messpunkte sein, da diese meist etwas neben der Geraden liegen.

Gleichung	$y = mx + b$	$y = ke^{mx}$
Millimeterpapier	normal	halblogarithmisch
Steigung	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	$m = \frac{\ln y_B - \ln y_A}{x_B - x_A} = \frac{\ln(y_B / y_A)}{(x_B - x_A)}$

- 8) Die Messungenauigkeit der Steigung m lässt sich *subjektiv* abschätzen, indem man durch den Schwerpunkt der Wertepaare (\bar{x}, \bar{y}) die beiden Geraden mit der größten bzw. kleinsten Steigung (m_1 bzw. m_2) zeichnet, die mit den Messwerten noch verträglich sind. Der Fehler der Steigung ergibt sich dann zu $\Delta m = (m_1 - m_2)/2$.

Das Protokoll eines jeden Versuchs wird ein eigenständiges Schriftstück. *Sie erhalten zu diesem Zweck zusammen mit der Versuchsanleitung einen Satz standardisierter Deckblätter.*

Bitte füllen Sie sofort bei Versuchsbeginn ein Deckblatt vollständig aus. Vergessen Sie auf keinen Fall den Namen des Assistenten und die Versuchsnummer, einschließlich des Platzes (a, b, ...).

Für die Niederschrift von Vorbereitung, Messprotokoll und Auswertung verwenden Sie die mitgelieferten Papierbögen. Alle graphischen Darstellungen etc. werden, falls sie kleiner als DIN-A4 sind, auf ein eben solches Blatt geklebt. Verwenden Sie für jeden Versuch nur soviel Papierbögen wie nötig, beschreiben Sie jedoch jedes Blatt nur einseitig.

Das Werk heften Sie dann zusammen, so dass sie für jeden Versuch einen eigenen Schriftsatz erhalten. (Ein Hefter befindet sich im Praktikum).

Generell sind die Versuchsprotokolle und -auswertungen handschriftlich vorzulegen. Lassen Sie sich Ihre Messwerte nach jedem Versuch vom Assistenten unterschreiben. Für das Erstellen von Tabellen und Graphen können neben der manuellen Ausarbeitung auch Ausdrucke mit entsprechenden Computerprogrammen erstellt werden (z.B. Excel). Beachten Sie: Bei Graphen, die mit Computer erstellt werden, müssen die Kurven ebenfalls in die Messwerte unter Berücksichtigung der Fehler glatt eingepasst werden. Ein reines Verbinden von Messwerten ist keine Messkurve und daher falsch.

Protokollmuster

Versuch Nr.: Name des Versuchs

Datum:

Assistent:

Messplatz:

I) Grundlagen (Teil der Vorbereitung) (ca. 1 - 2 Seiten)

- Aufgabenstellung des Versuchs
- Skizze der Versuchsanordnung (schematisch); Schaltplan bei elektrischen Schaltungen.
- Formeln, die für den Versuch benötigt werden, und zwar zunächst in der Form, in der man sie als allgemein bekannt voraussetzen kann; dann die für den Versuch nötigen Umformungen.
- Erklärung der in den Formeln verwendeten Variablen.
- Knappe Angaben über das Messverfahren.

II) Messprotokoll (je nach Umfang der Messung)

- **Alle** direkt gemessenen (= abgelesenen) Daten werden in Tabellen und/oder Diagrammen eingetragen, **die klar und ausreichend (Spalten, Achsen)** beschriftet sein müssen.
- Gemessen und im Messprotokoll festgehalten werden auch solche physikalischen Größen, die einen Einfluss auf das Versuchsergebnis haben, auch wenn sie nicht direkt in die Formeln eingehen (z.B. Druck, Temperatur).
- Fehler der Messgeräte festhalten.

III) Auswertung (Hauptteil des Protokolls, auch im Umfang)

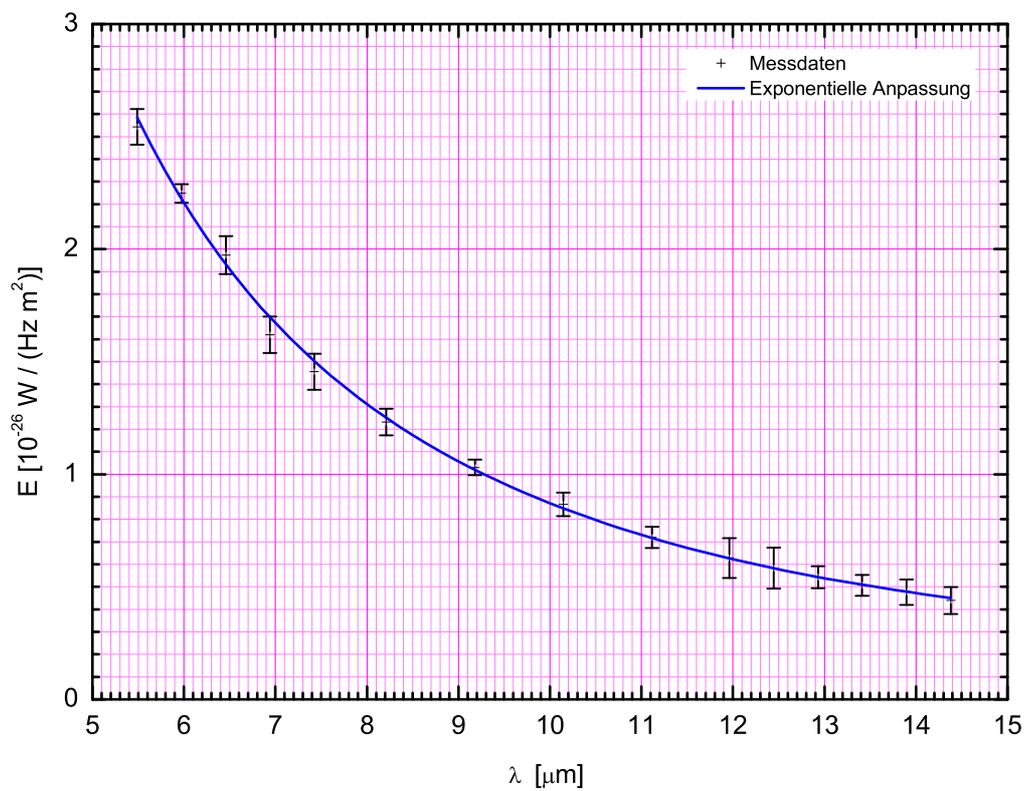
- Nach Möglichkeit sollten Sie die Messdaten schon während der Messung vorläufig auswerten. Tragen Sie die Messpunkte während der Messreihe graphisch auf, damit Sie den Verlauf der Kurve schon bei der Messung verfolgen und Falschmessungen erkennen können.
- Wesentliche Zwischenergebnisse.
- Fertigstellung der Ergebnistabellen und Diagramme (siehe Beispiele nächste Seite)
- Endergebnisse.

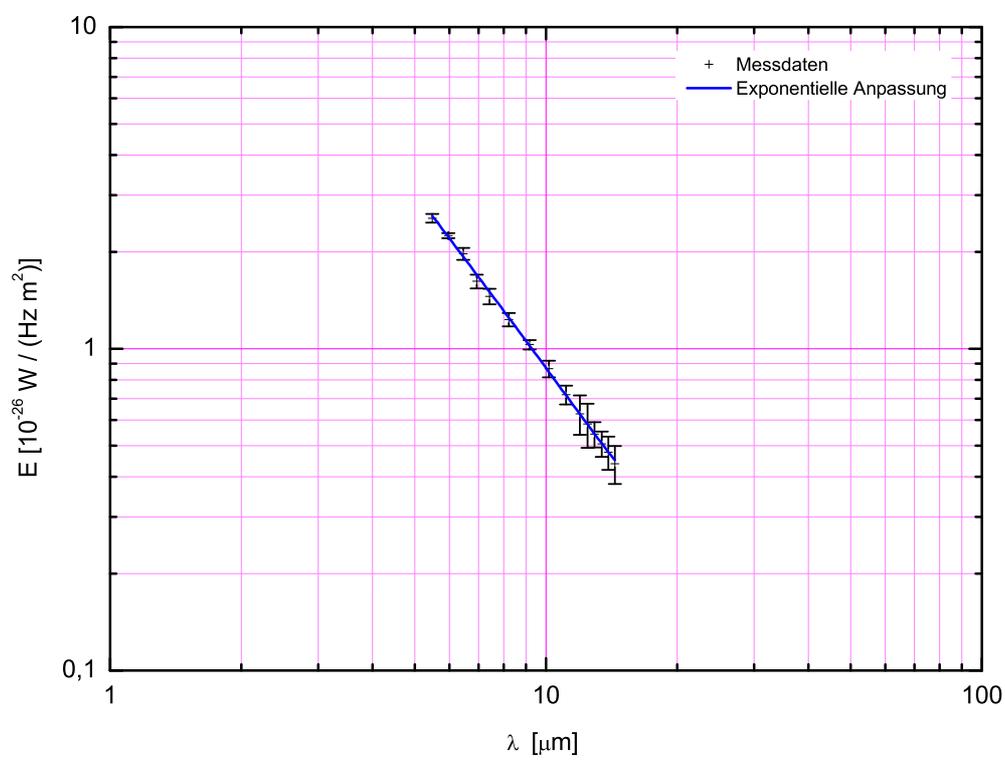
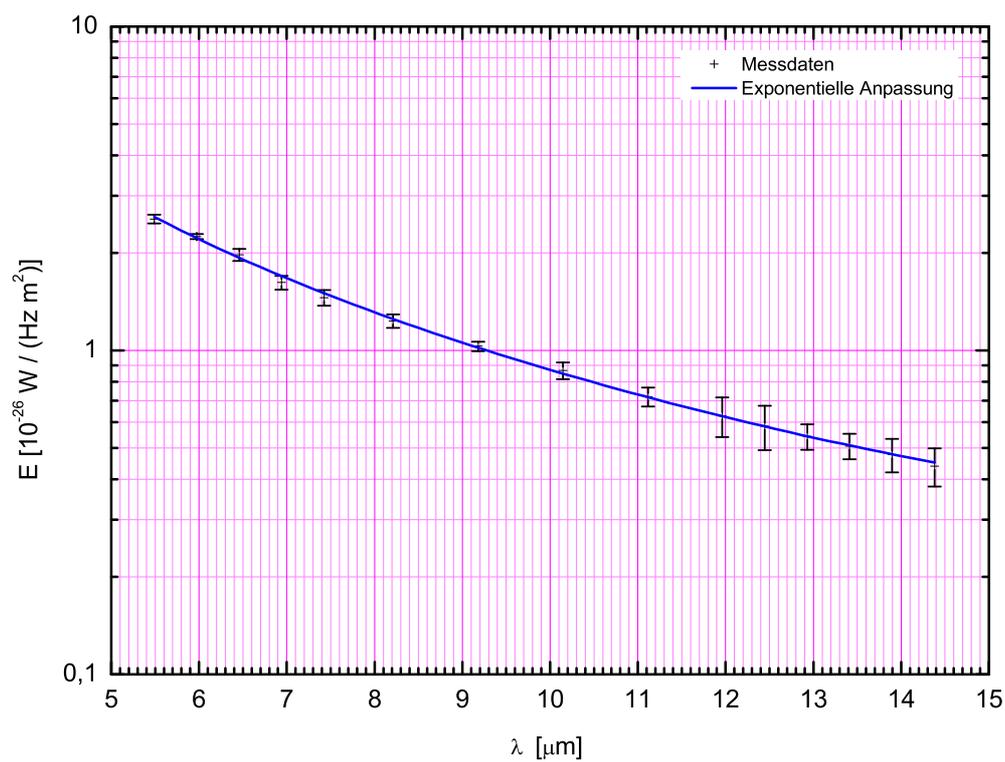
IV) Fehlerbetrachtung

- Diskussion der Genauigkeit der Messung. Wo liegen die Vorteile und wo sind die Nachteile der angewendeten Methoden.
- Explizite Fehlerrechnung.

Beispiel einer Tabelle und eines Graphen dargestellt auf Millimeterpapier und Logarithmenpapier (einfachlogarithmisch und doppeltlogarithmisch). Dargestellt ist die typische spektrale Energieverteilung eines Sterns (Gliese 1) aufgetragen gegen die Wellenlänge λ , gemessen mit einem Infrarot-Spektrometer.

λ [μm]	E [$10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{Hz m}^2}$]	ΔE [$10^{-26} \frac{\text{W}}{\text{Hz m}^2}$]
5.49	2.54	0.08
5.97	2.25	0.04
6.46	1.97	0.08
6.94	1.62	0.08
7.42	1.46	0.08
8.21	1.23	0.06
9.18	1.03	0.03
10.15	0.87	0.05
11.11	0.72	0.05
11.96	0.63	0.03
12.45	0.58	0.03
12.93	0.54	0.05
13.41	0.51	0.05
13.90	0.48	0.06
14.38	0.44	0.06





4 Die Versuche

4.1 Versuch 11: Federpendel (Einführungsversuch)¹

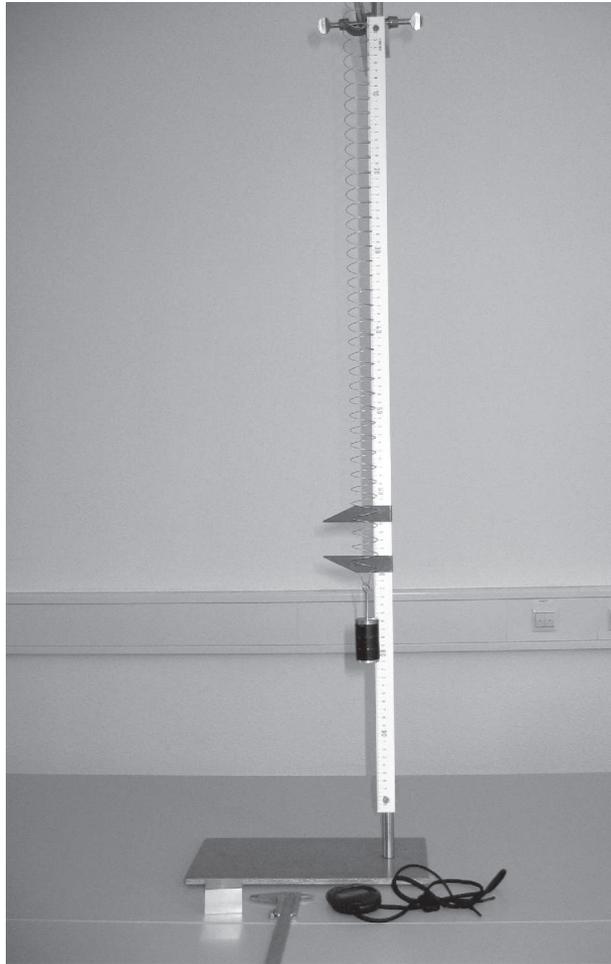


Abbildung 1: Versuchsaufbau.

4.1.1 Vorbemerkung

Ziel der Einführungsveranstaltung ist es Sie mit grundlegenden Techniken des Experimentierens und der Auswertung der Messdaten vertraut zu machen. Diese Grundkenntnisse sind für eine erfolgreiche Durchführung des Praktikums notwendig.

Bei diesem Versuch werden Sie Messungen am Federpendel durchführen. Zunächst wird die Federkonstante gemessen. Das Ergebnis dieser Messung wird verwendet um in einer zweiten Messung die Erdbeschleunigung zu bestimmen. Sie werden in diesem Versuchsteil den statistischen Fehler bei der Bestimmung der Schwingungsdauer des Federpendels kennen lernen. Es soll auch gezeigt werden, dass zwei scheinbar identische Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer unterschiedliche Messgenauigkeiten besitzen. Um aus den Messdaten die Federkonstante und die Erdbeschleunigung zu extrahieren ist es notwendig die Ergebnisse graphisch darzustellen. Aus den Diagrammen die erstellt werden, kann man die zu bestimmenden Größen einschließlich des Messfehlers ablesen.

¹© Dr. J.Wagner - Physikalisches Physikpraktikum für Mediziner - Stand 01/2011, V. 1.0

Ziel des Versuches:

Zunächst wird die Federkonstante eines Federpendels gemessen. Danach wird unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses die Erdbeschleunigung ermittelt.

Lernziele:

- Bestimmung des Messfehlers bei einer Zeitmessung.
- Vergleich von zwei unterschiedlichen Messmethoden.
- Graphische Darstellung von Messwerten.
- Ablesen von Messgrößen und -fehlern aus der graphischen Darstellung.

Messmethode:

Die Differentialgleichung für ein Federpendel lautet:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad (1)$$

Wenn man das Federpendel zur Zeit $t = 0$ um x_0 auslenkt und loslässt, so lautet die Lösung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2)$$

mit

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}. \quad (3)$$

Die Periodendauer T ist mit ω über

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

verknüpft. Somit ergibt sich für die Periodendauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad (5)$$

Misst man die Periodendauer T als Funktion der Masse m so kann man hieraus die Federkonstante D bestimmen. Wird das Federpendel mit einer Masse m belastet, so gilt:

$$mg = Dx \quad (6)$$

Da der Wert der Federkonstante D aus der vorhergehenden Messung bereits bekannt ist, kann man hieraus den Wert der Erdbeschleunigung bestimmen.

Durchführung des Versuchs:

Belasten Sie zunächst das Federpendel mit einer Masse von 200g. Messen Sie dann je 10 mal 3 Pendelschwingungen um die Schwingungsdauer des Pendels zu bestimmen. Starten und stoppen sie dabei die Messungen beim Maximalausschlag des Pendels. In einer zweiten Messung von 10 mal 3 Pendelschwingungen soll die Schwingungsdauer bestimmt werden, indem die Messung beim Nulldurchgang des Pendels gestartet und gestoppt wird. Bestimmen Sie für beide Messreihen die mittlere Schwingungsdauer und den mittleren Fehler des Mittelwertes². Verwenden Sie für die folgenden Messungen die genauere der beiden

²Für eine Messreihe mit n Messungen x_1, x_2, \dots, x_n und dem Mittelwert \bar{x} ist der mittlere Fehler der Einzelmessung (auch Standardabweichung) durch $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ definiert. Der mittlere Fehler des Mittelwertes ist durch $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$ gegeben.

Methoden. Messen Sie nun die Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Beschweren Sie hierzu das Federpendel mit Massen zwischen 50 g und 250 g in Schritten von 50 g. Für jede Masse werden dreimal drei Pendelschwingungen ausgemessen. Diese Messreihe wird dazu benutzt die Federkonstante des Pendels zu bestimmen.

Für die Messung der Erdbeschleunigung wird die Auslenkung des Federpendels als Funktion der Masse bestimmt. Das Federpendel wird hierzu mit den Massen 0g, 50g, 100g, 150g, 200g und 250g beschwert und die Auslenkung wird abgelesen. Notieren Sie die Ablesegenauigkeit für die Auslenkung!

Hinweise zur Auswertung:

Tragen Sie zunächst die Ergebnisse der Vergleichsmessungen der Schwingungsdauer in ein Histogramm ein. Die Abbildung zeigt beispielhaft ein Histogramm für eine Messreihe. Berechnen Sie für beide Methoden den Mittelwert und den mittleren Fehler des Mittelwertes. Welche Methode ist genauer? Was ist der Grund?

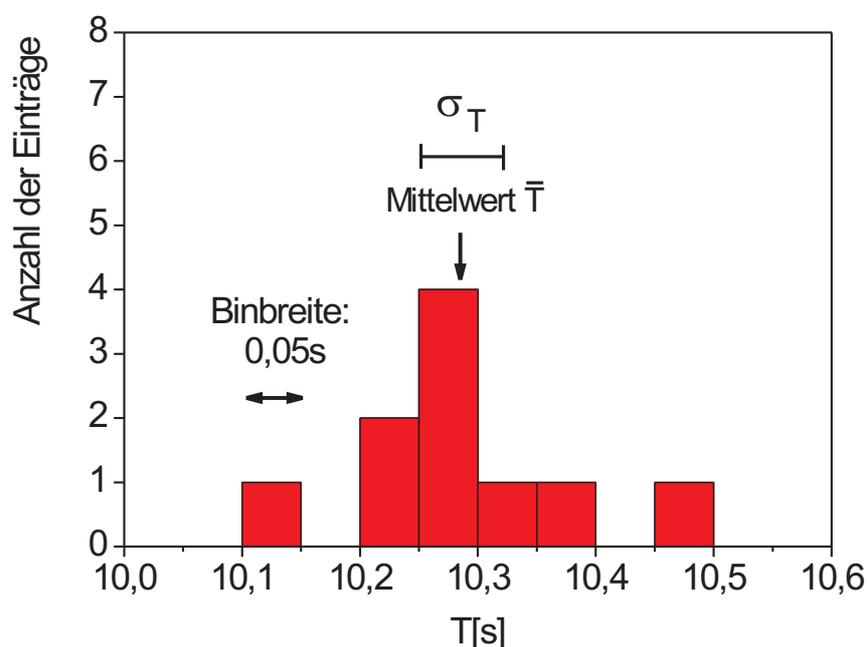


Abbildung 2: Histogramm der Messreihe.

Messung	T [s]	T [s]	σ_T [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	10,11	10,285	0,094	0,03
2	10,23			
3	10,34			
4	10,28			
5	10,26			
6	10,24			
7	10,28			
8	10,46			
9	10,27			
10	10,38			

Um die Federkonstante aus der Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse zu bestimmen

wird eine graphische Methode verwendet. Hierzu wird Gleichung (5) geschrieben als

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} \cdot m \quad (7)$$

Dies lässt sich als Geradengleichung

$$y = ax + b \quad (8)$$

interpretieren wenn man

$$\begin{aligned} x &= m \\ y &= T^2 \\ a &= \frac{4\pi^2}{D} \\ b &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

setzt. Daher wird im Diagramm das Quadrat der gemessenen Schwingungsdauer T gegen die Masse m aufgetragen. Der Wert von T^2 und von m sind fehlerbehaftet und es müssen Fehlerbalken in das Diagramm eingezeichnet werden. Der Fehler wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den mittleren Fehlern der Mittelwerte der Schwingungsdauern bestimmt. Der statistische Fehler der Masse eines Gewichtstücks liegt bei 3%. Als nächstes wird die Steigung aus dem Diagramm bestimmt in dem eine Gerade so in das Diagramm gelegt wird, dass die Gerade die Messwerte möglichst gut beschreibt. Die Steigung dieser Geraden kann nun aus dem Diagramm nach

$$a = \frac{\Delta T^2}{\Delta m} \quad (10)$$

abgelesen werden. Um den Fehler von a zu erhalten werden in das Diagramm zusätzlich Fehlergeraden eingezeichnet. Die Fehlergeraden werden so gelegt, dass sie noch gerade die Messungen unter Berücksichtigung des Messfehlers beschreiben könnten. Die Differenz der Steigungen der optimierten Geraden und der Fehlergeraden wird als Fehler der Steigung σ_a verwendet. Nach Gleichung (9) kann nun die Federkonstante und mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz der Messfehler der Federkonstanten berechnet werden.

Nach Gleichung (7) sollte man erwarten, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung geht. Dies ist aber nicht der Fall. Überlegen Sie sich die Ursache hierfür. Aus dem selben Grund ist es übrigens auch nicht möglich die Federkonstante für einzelne Messungen direkt aus Gleichung (5) zu bestimmen. Die graphische Bestimmung der Federkonstante ist in diesem Fall unerlässlich! Um die Erdbeschleunigung zu bestimmen wird nun in einem zweiten Diagramm die Auslenkung des Federpendels gegen die Masse aufgetragen. Aus der Steigung der Geraden kann die Erdbeschleunigung bestimmt werden, da Gleichung (6) wieder als Geradengleichung der Form

$$x = \frac{g}{D} m \quad (11)$$

dargestellt werden kann. Die Steigung

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta m} \quad (12)$$

und ihr experimenteller Fehler können nun nach dem oben beschriebenen Verfahren aus dem Diagramm abgelesen werden. Die Erdbeschleunigung wird nach

$$g = D \cdot a \quad (13)$$

berechnet. Um den Fehler der Erdbeschleunigung zu bestimmen muss die Fehlerfortpflanzung angewendet werden, da sowohl der Wert von D als auch der Wert von a fehlerbehaftet sind.

4.1.2 Messprotokoll

Vergleich der Methoden zur Bestimmung der Schwingungsdauer:

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Maximalauslenkung.

Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
1	3				
2	3				
3	3				
4	3				
5	3				
6	3				
7	3				
8	3				
9	3				
10	3				

Messung der Schwingungsdauer. Start/Stop bei Nulldurchgang

Ablesegenauigkeit der Stoppuhr:

Messung der Federkonstante:

m [g]	Nr.	Anzahl der Schwingungen n	Messzeit t [s]	Periodendauer T [s]	Mittelwert \bar{T} [s]	$\sigma_{\bar{T}}$ [s]
50	1	3				
	2	3				
	3	3				
100	1	3				
	2	3				
	3	3				
150	1	3				
	2	3				
	3	3				
200	1	3				
	2	3				
	3	3				
250	1	3				
	2	3				
	3	3				

Messung der Schwingungsdauer als Funktion der Masse. Start/Stop
bei

Messung der Erdbeschleunigung:

Δm [g]	Auslenkung x [mm]	Ablesefehler Δx [mm]

Messung der Auslenkung als Funktion der Masse

4.1.3 Beispiele für die Darstellung von Messergebnissen

Abschließend werden noch ein paar Beispiele dafür gegeben, wie Messdaten graphisch dargestellt werden sollen. Es werden auch einige Beispiele für typische Fehlerquellen beim Zeichnen von Diagrammen gezeigt.

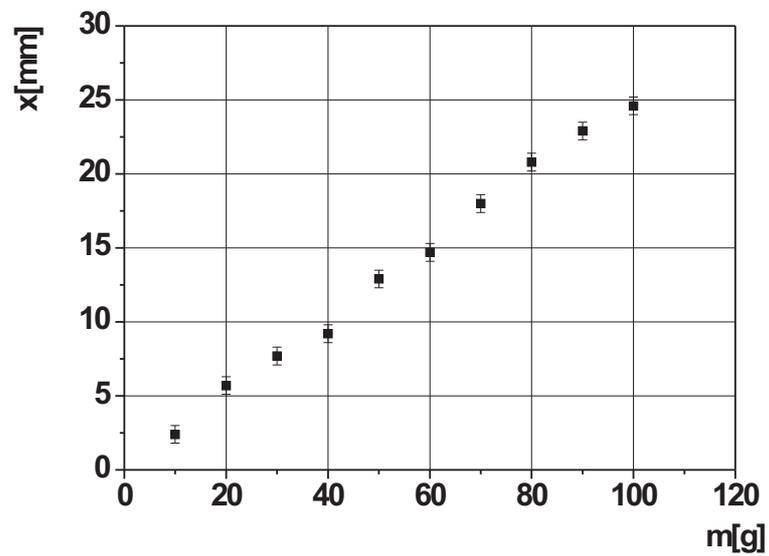


Abbildung 3: *Richtige Darstellung von Messwerten.*

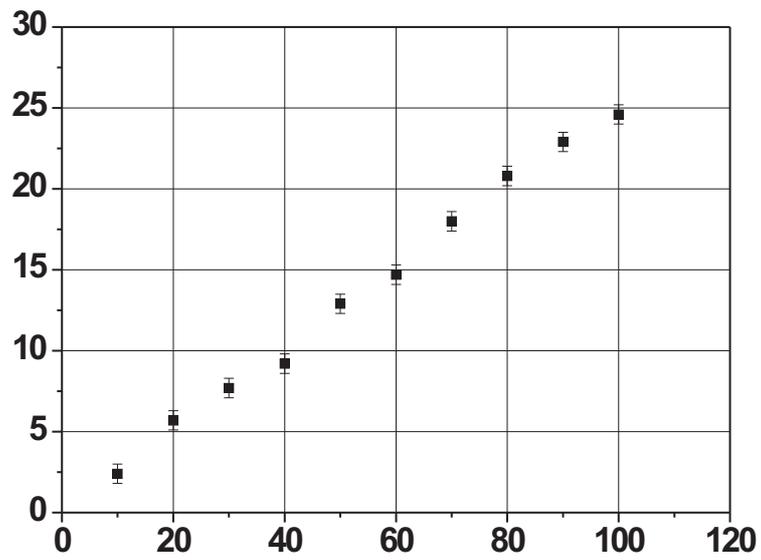


Abbildung 4: Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Achsenbeschriftungen fehlen.

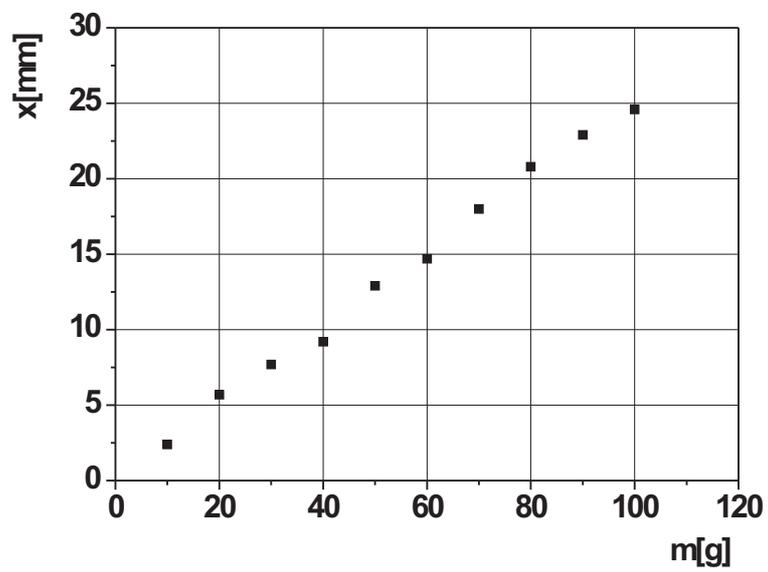


Abbildung 5: Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Fehlerbalken fehlen.

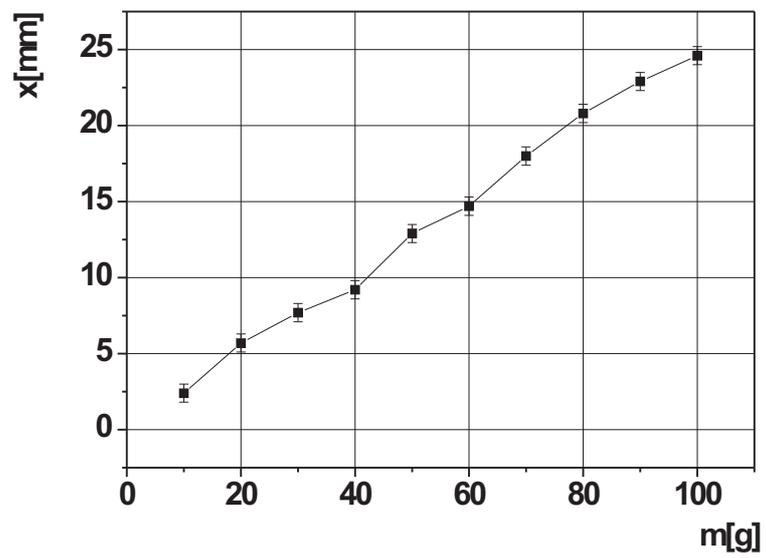


Abbildung 6: Fehlerhafte Darstellung von Messergebnissen: Messpunkte sind durch eine (unphysikalische) Zick-Zack-Linie verbunden.

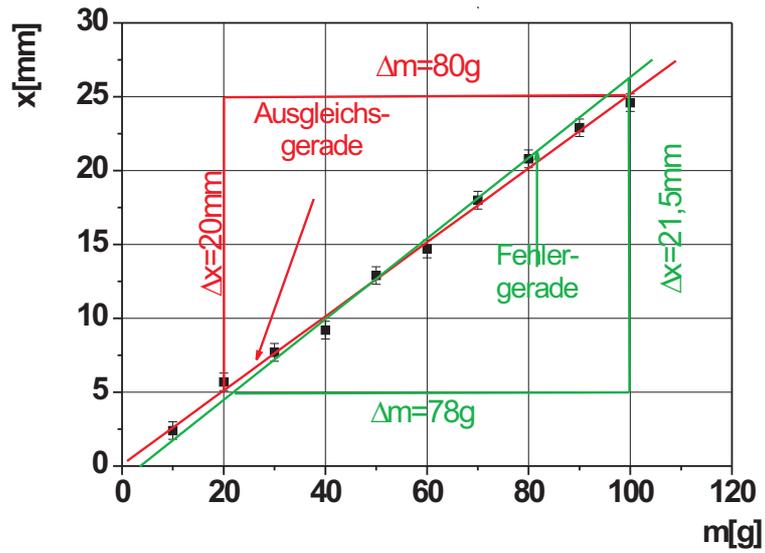


Abbildung 7: Richtiges Anpassen einer Ausgleichsgerade und Ermittlung der Geradensteigung.

Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt sich zu

$$a_{\text{Ausgleich}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{20\text{mm}}{80\text{g}} = 0,25 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

die der Fehlergeraden zu

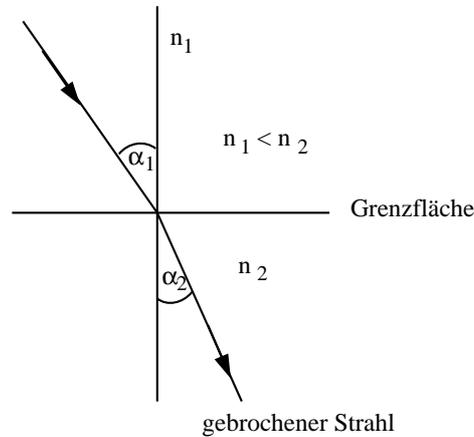
$$a_{\text{Fehler}} = \frac{\Delta x}{\Delta m} = \frac{21,5\text{mm}}{78\text{g}} = 0,276 \frac{\text{mm}}{\text{g}}$$

4.2 Versuch 12: Augenmodell

4.2.1 Relevante Begriffe und Gesetze

Snelliussches Brechungsgesetz

einfallender Strahl



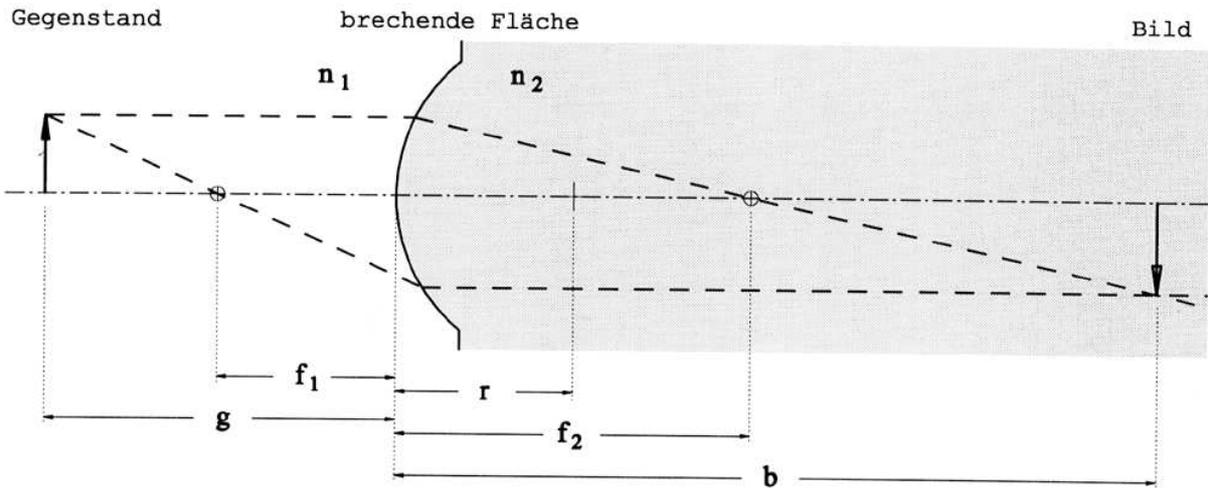
$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Grenzen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes aneinander, so wird ein Lichtstrahl gemäß obiger Gleichung gebrochen. Auf diesem Gesetz basiert die gesamte geometrische Optik.

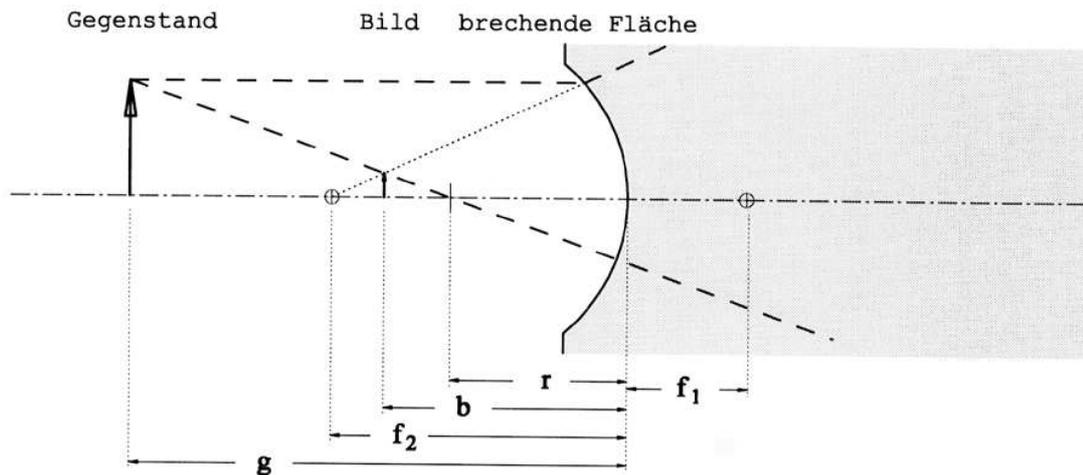
Abbildung durch eine einzelne sphärische (= kugelförmige) Grenzfläche

Zwei verschiedene optische Medien mit den Brechungsindizes n_1 bzw. n_2 seien durch eine sphärische Grenzfläche getrennt. Ein Lichtstrahlenbündel wird beim Durchgang durch diese Grenzfläche fokussiert oder defokussiert, es entsteht eine geometrisch optische Abbildung. Eine optische Abbildung ist durch folgende Größen (siehe Abbildung) gekennzeichnet:

Bildweite b , Gegenstandsweite g , Bildgröße B , Gegenstandsgröße G , Brennweiten f_1 und f_2 .



$r > 0$ (konvex) ; $b > 0$ (reelles Bild) ; - - - - = Lichtstrahlen
 $n_1 < n_2$; Zeichnung maßstabsgerecht für $r = 25$ mm ; $n_1 = 1$; $n_2 = 2$;



$r < 0$ (konkav) ; $b < 0$ (virtuelles Bild) ; Brennweiten negativ ;
 $n_1 < n_2$; Zeichnung maßstabsgerecht für $r = -25$ mm ; $n_1 = 1$; $n_2 = 2,5$;

Konventionen:

- (i) das Licht kommt von links
- (ii) Gegenstands- und Bildweiten werden ab dem Schnittpunkt der Grenzfläche mit der optischen Achse gezählt
- (iii) positive Gegenstandsweite g bedeutet: der Gegenstand befindet sich links von der Grenzfläche
- (iv) positive Bildweite b bedeutet: das Bild befindet sich rechts von der Grenzfläche, = reelles Bild
negative Bildweite bedeutet: das Bild befindet sich links von der Grenzfläche, = virtuelles Bild.
- (v) Der Abbildungsmaßstab β ist das Verhältnis von Bild- zu Gegenstandsgröße.
- (vi) Die Krümmung einer brechenden Fläche heißt konvex, wenn der Krümmungsmittelpunkt hinter der Grenzfläche liegt, konkav, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Seite liegt von der das Licht einfällt.

(vii) Für konvexe Flächen wird der Krümmungsradius positiv gerechnet, für konkave Flächen negativ.

Den Zusammenhang zwischen Gegenstands- und Bildweiten liefert die Abbildungsgleichung:

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = D$$

Leichter zu merken ist:

$$\frac{n_g}{g} + \frac{n_b}{b} = D$$

Als Brechkraft für eine einzelne Grenzfläche ergibt sich

$$D = \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{\Delta n}{r}$$

d.h., die Brechkraft einer Grenzfläche hängt von der Differenz der Brechungsindizes und vom Krümmungsradius (Vorzeichen!) ab.

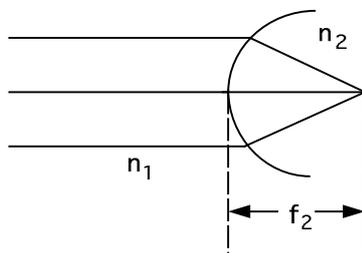
Die Einheit der Brechkraft ist die Dioptrie (dpt), $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$.

Abbildungsmaßstab

$$\beta = \frac{n_1}{n_2} \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$$

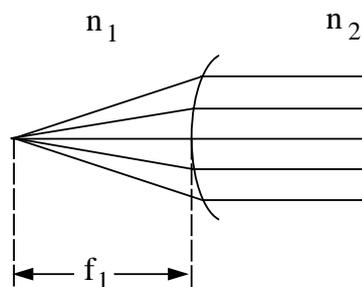
Liegt der Gegenstand im Unendlichen ($g = \rightarrow \infty$), bedeutet dies, daß paralleles Licht auf die Grenzfläche fällt. In diesem Fall ist die Bildweite die (bildseitige) Brennweite f_2 :

$$f_2 = \frac{n_2}{D}$$



Wird hinter der Grenzfläche ein paralleles Strahlenbündel erzeugt, liegt das Bild im Unendlichen und die Entfernung der Lichtquelle von der Grenzfläche ist die (gegenstandsseitige) Brennweite f_1 :

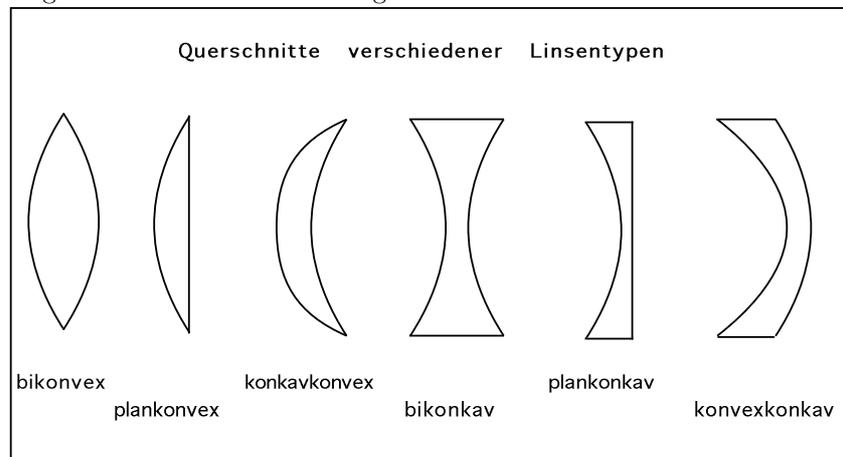
$$f_1 = \frac{n_1}{D}$$



Für eine sphärische Grenzfläche gilt also $D = \frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2}$

Abbildung durch ein optisch dünnes System, bestehend aus mehreren Grenzflächen

Eine Linse hat 2 Grenzflächen (Medium1 - Glas - Medium2). Gemäß ihrer geometrischen Form unterscheidet man 2 Grundtypen von Linsen. Linsen, die innen dicker sind als am Rand erhalten die Endung konvex. Die Endung konkav bezeichnet den umgekehrten Fall.



Beachten Sie:

- i) Die Namensgebung für Linsen lässt sich nicht aus der Namensgebung brechender Flächen herleiten.
- ii) Die üblicherweise als Sammellinse bezeichnete Bikonvexlinse wirkt in einem optisch dichteren Medium als Zerstreuungslinse.

Ein System ist als optisch dünn anzusehen, wenn der größte Abstand zweier brechender Flächen klein ist gegenüber den Brennweiten der enthaltenen Komponenten!

Für optisch dünne Systeme gilt weiterhin obige Abbildungsgleichung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = D$$

wobei g und b ab der Mitte des optischen Systems zu zählen sind.

Die Brechkraft des (optisch dünnen) Systems ist gleich der Summe der Brechkräfte der enthaltenen Komponenten:

$$D = D_I + D_{II} + \dots$$

Beispiel: Für eine bikonvexe Linse in Luft ($n_{Luft} = 1$) gilt:

$$D_{Luft} = \frac{n_G - 1}{r_1} + \frac{1 - n_G}{r_2}$$

n_G = Brechungsindex des Glases.

Der erste Summand entsteht durch die konvexe Grenzfläche Luft-Glas, der zweite durch die konkave Grenzfläche Glas-Luft. Für $r_1 = -r_2 = r > 0$ erhält man

$$D_{Luft} = \frac{n_G - 1}{r} - \frac{1 - n_G}{r} = 2 \frac{n_G - 1}{r}$$

Taucht man diese Linse in Wasser ein, gilt analog:

$$D_{Wasser} = 2 \frac{n_G - n_w}{r}$$

4.2.2 Versuchsvorbereitung

Was man wissen sollte:

Geometrische Optik, Abbildungsgleichung, Abbildungen durch Linsen und gekrümmte Flächen, Brechungsgesetz, Strahlengang bei verschiedenen Linsentypen, Linsenfehler (sphärische und chromatische Aberration, Astigmatismus), Physiologie des Auges, Korrektur von Fehlsichtigkeit.

Aufgaben als Teil der Vorbereitung:

Berechnen Sie die Brechkraft einer Glaslinse ($n = 1.6$) in Luft mit $r_1 = +180$ cm und $r_2 = +105$ cm. Fertigen Sie eine Skizze der Linse an und tragen Sie r_1, r_2, f_1 und f_2 ein. Um was für eine Linse handelt es sich dabei? Wie groß wäre die Brechkraft einer solchen Linse, wenn sie sich in einem Medium mit $n = 1.6$ befände?

4.2.3 Versuchsbeschreibung

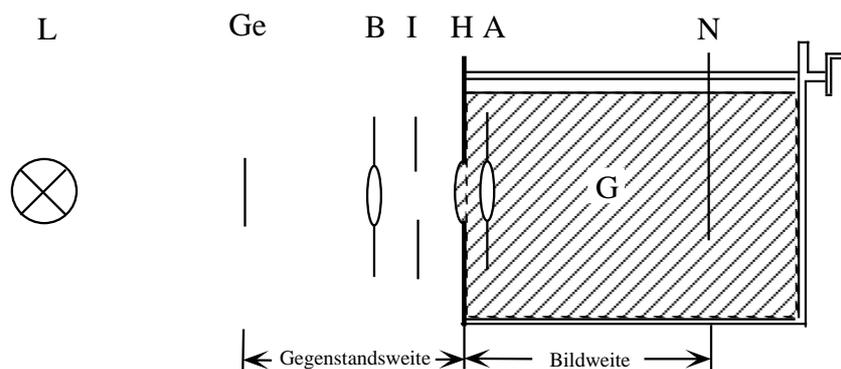
Zubehör:

- 1 Wasserkasten mit aufgeklebter Plankonvexlinse (Hornhaut) und beweglichem Schirm
- 1 Roter Einschub mit Augenlinse ($f = 30$ cm)
- 1 Bikonvexlinse $f = 100$ cm
- 1 Bikonkavlinse $f = -50$ cm
- 1 optische Bank
- 1 Lampe
- 1 Dia mit Pfeil (Gegenstand)
- 1 Irisblende
- 4 Reiter

Experimenteller Aufbau:

Dieser Versuch soll einerseits die grundsätzlichen physikalischen Vorgänge im Auge sowie die wichtigsten Augenfehler anschaulich und übersichtlich demonstrieren, andererseits in die geometrische Optik einführen.

Anordnung:



L	Lampe	A	Bikonvexlinse (Augenlinse)
Ge	Dia mit Pfeil (Gegenstand)	G	Dest. Wasser (Glaskörper)
B	Vorsatzlinse (Brille)	N	Schirm (Netzhaut)
I	Blende (Iris)	H	Plankonvexlinse (Hornhaut)

In diesem Versuch kann das Modell Hornhaut plus Augenlinse so betrachtet werden, dass sich die Gesamtbrechkraft des Systems als Summe der jeweiligen Brechkräfte ergibt:

$$D_{System} = D_{Hornhaut} + D_{Augenlinse}$$

Falls eine Vorsatzlinse (Brille) hinzukommt, ist auch noch deren Brechkraft zu addieren.

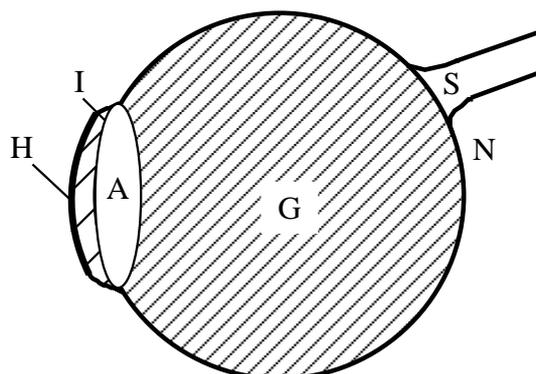
Menschliches Auge zum Vergleich

Das menschliche Auge ist ein optisches System, das aus zwei optischen Komponenten aufgebaut ist:

- einer Kugelfläche (Hornhaut; cornea), welche an zwei verschiedene Medien Luft und wässrige Flüssigkeit angrenzt und
- der Augenlinse (lens cristallina), die sich beidseitig in demselben Medium befindet.

Beim normalsichtigen Auge in Ruhestellung werden unendlich ferne Gegenstände auf der Netzhaut (retina) scharf abgebildet. Die Akkommodation auf kleine Entfernungen erfolgt durch die Änderung der Krümmung (Brechkraft) der Augenlinse.

Menschliches Auge:



H	Plankonvexlinse (Hornhaut)	G	Dest. Wasser (Glaskörper)
I	Blende (Iris)	S	Sehnerv
A	Bikonvexlinse (Augenlinse)	N	Schirm (Netzhaut)

4.2.4 Aufgabenstellung

a) Bestimmen Sie den Krümmungsradius der Hornhaut

Die Augenlinse und die Vorsatzlinse werden bei diesem Versuchsteil nicht benötigt. Der Gegenstand (Dia mit Pfeil) wird auf vier verschiedene Gegenstandsweiten ≥ 25 cm eingestellt. Dann werden mit Hilfe des verschiebbaren Schirms die dazugehörigen Bilder aufgesucht.

Protokollschemata:

g (m)	b (m)	D (dpt)
0,25		
0,30		
0,40		
0,50		

b) Bestimmen Sie die Brechkraft des Augenmodells (Hornhaut + Augenlinse)

Die Augenlinse wird eingesetzt. Die Halterung wird in die Nut in der Bodenplatte gesteckt, so dass sich die Augenlinse genau hinter der Hornhaut befindet.

c) Bestimmen Sie die Funktion einer Brille für Kurzsichtige (Brille + Hornhaut + Augenlinse)

Auf der optischen Bank wird möglichst nahe vor der Hornhaut die Bikonkavlinse ($f = -50$ cm) angebracht. Führen Sie die Messungen wie in Teil a und b durch, allerdings nur mit drei Gegenstandsweiten ≥ 30 cm.

d) Bestimmen Sie den Einfluss einer Staroperation (künstliche Augenlinse + Hornhaut)

Entfernen Sie die bikonkave Vorsatzlinse und die Augenlinse (abtrocknen!).

Setzen Sie die Bikonvexlinse ($f = 100$ cm) vor das Augenmodell und gehen Sie wie in c) vor (drei Gegenstandsweiten).

4.2.5 Zur Auswertung und Protokollierung

Vervollständigen Sie die Tabellen, indem Sie die jeweiligen Brechkräfte berechnen (falls Sie dies nicht bereits während der Versuchsdurchführung getan haben).

a) (Messung a))

Die Brechkraft der Hornhaut wird als Mittelwert aus den vier Einzelmessungen berechnet. Die Hornhaut wird dabei als eine gekrümmte Fläche betrachtet. Aus der Brechkraft und den Brechungsindizes für Luft ($n=1$) und Wasser ($n=1,33$) ist der Krümmungsradius der Hornhaut zu bestimmen.

b) (Messung b))

Wie vorher wird die Brechkraft des Augenmodells (Hornhaut + Augenlinse) als Mittelwert bestimmt. Unter Zuhilfenahme der Brechkraft der Hornhaut (Teil a)) ermitteln Sie den experimentellen Wert für die Brechkraft der Augenlinse in Wasser.

Stellen Sie diesem Wert den theoretisch berechneten Wert gegenüber. Den dazu nötigen Radius der Linse erhalten Sie aus ihrer Brechkraft in Luft ($D = 1/f$) und dem Brechungsindex des Glases ($n_{Linse} = 1,53$).

Geben Sie die relative Abweichung des Messwertes vom theoretischen Wert in Prozent an.

c) (Messung c))

Bestimmen Sie aus diesen Messwerten die Brechkraft des Gesamtsystems. Durch Differenzbildung mit dem Ergebnis von Teil b) ergibt sich die gemessene Brechkraft der Brille alleine.

Geben Sie die relative Abweichung des Messwertes vom theoretischen Wert in Prozent an.

d) (Messung d))

Auch hier ist die Brechkraft des Systems zu berechnen.

Reicht die Vorsatzlinse gerade aus, um den Verlust der Augenlinse zu kompensieren, oder müsste die Brennweite etwas größer oder etwas kleiner als 100 cm sein?

4.2.6 Anwendungsbeispiele aus der Medizin

- Funktionsweise des dioptischen Apparates des Auges. Für die Abbildungseigenschaften des Auges sind 3 Komponenten verantwortlich: Hornhaut, Linse und Pupille. Die Hornhaut stellt die Linse mit der größten Brechkraft dar (ca. 40 dpt). Dieser Wert wird nicht verändert. Dagegen stellt die Linse das optische Element mit variabler Brechkraft je nach Krümmung dar. Somit kann das Auge seine Abbildung bei unterschiedlichen Gegenstandsweiten jeweils scharf stellen. Die Pupille übernimmt die Funktion der Blende, d.h. das Auge ist eine "Lochkamera". Die Pupille bestimmt durch die Öffnung auch die Auflösung der Abbildung, d.h. den Abstand den zwei gleiche Objekte minimal haben können, dass sie noch getrennt gesehen werden. Zur Erklärung muss man die Welleneigenschaften von Licht berücksichtigen. Dadurch entsteht kein scharfes Bild der Öffnung sondern ein Intensitätsmuster aus mehreren, konzentrischen Wellen und dunklen Ringen (Beugungsscheibe).
- Behebung von Abbildungsfehlern des Auges (z.B. Korrektur von Refraktionsanomalien). Die wichtigsten Abbildungsfehler des Auges sind:
 - Myopie (Kurzsichtigkeit): Der Augapfel ist auf der optischen Achse verlängert. Dadurch liegt das Bild vor der Netzhaut. Eine Brille mit negativer Brechkraft (konkave Linse) wird zur Korrektur eingesetzt.
 - Hyperopie (Weitsichtigkeit): Der Augapfel ist auf der optischen Achse verkürzt. Das Bild liegt hinter der Netzhaut. Eine Brille mit positiver Brechkraft (konvexe Linse) wird zur Korrektur eingesetzt.
 - Presbyopie (Alterssichtigkeit): Im Alter lässt die Krümmungsfähigkeit der Linse nach, so dass die Brechkraft der Linse abnimmt. Dies kann bis zu 10 dpt. betragen. Diese fehlende Brechkraft muss durch eine zusätzliche konvexe Linse (Brille) ersetzt werden.

4.3 Versuch 13: Nervenleitungsmodell

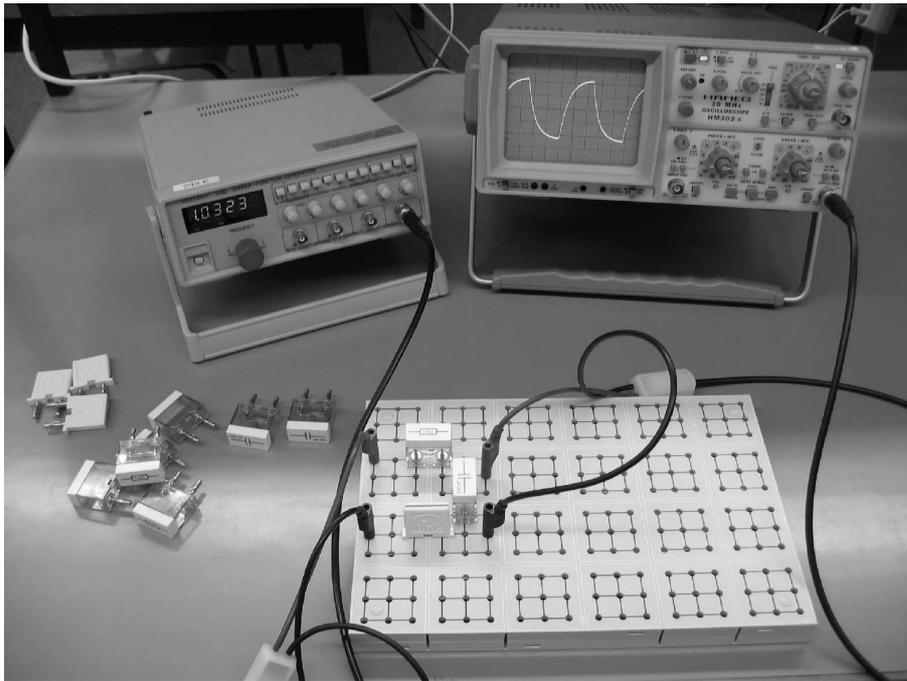


Abbildung 8: Versuchsaufbau: Nervenleitungsmodell

4.3.1 Messaufbau

- Oszilloskop
- Funktionsgenerator
- Verschiedene Widerstände und Kondensatoren im Steckgehäuse
- Steckbrett zum Verschalten der Bauelemente

4.3.2 Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- K.-H. Rohe, *Elektronik für Physiker*, Teubner Verlag.

4.3.3 Motivation

In diesem Versuch werden Sie die passiven Eigenschaften eines Axons mit Hilfe von RC-Gliedern (R: Resistor, Widerstand und C: capacitor, Kondensator) simulieren. Unter passiven Eigenschaften ist gemeint, dass wir ein Axon als eine Art Kabel betrachten. Verstärkende Mechanismen, die bei einem realen „Nerv“ zusätzlich vorhanden sind, werden hier nicht berücksichtigt³. Mit Hilfe einfacher Überlegungen sollen Sie Analogien zwischen einem realen Axon und entsprechenden elektrischen Schaltungen herstellen und so das elektrische Ersatzschaltbild modellieren. Anhand dieses Modells werden Sie erkennen, dass die Stärke eines Reizes sehr schnell entlang eines Axons abfällt und dass die Geschwindigkeit mit dem sich solch ein Signal ausbreitet, von elementaren elektrischen Größen wie Widerstand und Kapazität abhängt.

³Auch das wäre physikalisch möglich, würde aber den Rahmen dieses Versuchs sprengen.

4.3.4 Vorbereitung

Dieser Versuch setzt voraus, dass Sie mit den Begriffen Ladung, Strom, Spannung und Widerstand absolut vertraut sind. Informieren Sie sich zusätzlich über das Ohmsche- und die Kirchhoffschen Gesetze sowie über den Aufbau und die Kenngrößen (Kapazität, Impedanz) eines Kondensators. Da einzelne Aufgaben dieses Versuchs sehr nah an die Biologie angelehnt sind, sollten Sie Ihr Wissen bezüglich des biologischen Aufbaus einer Membran eines Neurons auffrischen.

Für das Verständnis eines RC-Glieds im Wechselstromkreis müssen Sie sich über die Eigenschaften von Wechselspannungen wie Frequenz, Periodendauer, Amplitude und Phase informieren.

4.3.5 Aufgaben

1. Untersuchung des Lade- und Entladevorgangs eines Kondensators und Bestimmung der Zeitkonstante.
2. Aufbau einer Schaltung aus RC-Gliedern zur Simulation der passiven elektrischen Eigenschaften der Membran eines Axons. Messung der Längskonstante.

4.3.6 Grundlagen

Verhalten eines RC-Glieds im Zeitbereich

Ein Kondensator C und ein Widerstand R werden über einen Schalter S an eine Gleichspannungsquelle U_E angeschlossen (Abbildung 9). Wir interessieren uns für den zeitlichen Verlauf der Spannung am Kondensator U_C : Wird der Schalter geschlossen, so fließt durch den Widerstand ein Strom zum Kondensator. Allerdings können die Ladungen nicht durch den Kondensator fließen, da die beiden Kondensatorelektroden durch ein nichtleitendes Dielektrikum getrennt sind. Es kommt daher zu einer Ansammlung von Ladungsträgern an den Kondensatorelektroden, wodurch sich über dem Kondensator die Spannung U_C aufbaut. Man spricht dabei auch vom „Aufladen eines Kondensators“. Mit zunehmender Aufladung wird der Ladestrom immer geringer, denn die sich am Kondensator aufbauende Spannung, wirkt der Gleichspannungsquelle entgegen, so dass sich pro Zeiteinheit immer weniger Ladungen an den Elektroden ansammeln können. Schließlich ist nach einer gewissen Zeit die Kondensatorspannung genau so groß wie U_E , d.h. der Kondensator ist aufgeladen.

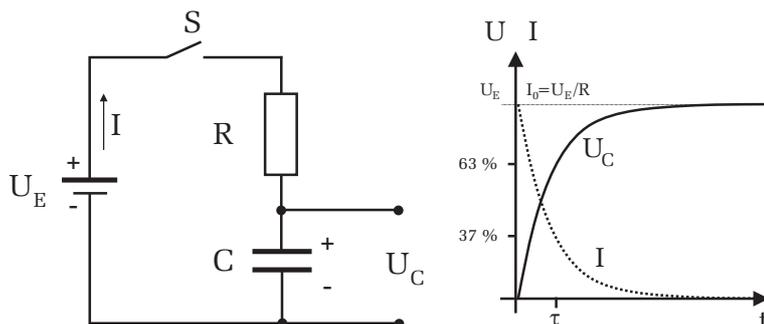


Abbildung 9: Links: Schaltbild. Rechts: Spannungs- und Stromverlauf beim Laden eines Kondensators. $I_0 = U_E/R$ entspricht dem Ladestrom direkt nach dem Schließen des Schalters und U_E ist die Spannung des aufgeladenen Kondensators die gerade der Eingangsspannung entspricht. Die Zeitkonstante τ entspricht der Zeit, bei der die Kondensatorspannung auf 63% des Endwerts U_E angestiegen, bzw. der Ladestrom auf 37% des Endwerts abgefallen ist.

Die Spannung am Kondensator erreicht demnach nur allmählich den Wert der Eingangsspannung U_E . Der Ladestrom verhält sich genau umgekehrt. Beim Einschalten fließt ein hoher Ladestrom der während des Aufladevorgangs immer geringer wird und schließlich auf Null zurückgeht (Abbildung 9).

Der Ladevorgang eines Kondensators gemäß dem Schaltbild in Abbildung 9 lässt sich mathematisch unter Zuhilfenahme des Ohmschen Gesetz einfach beschreiben⁴. Für den Ladestrom ergibt sich:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad (14)$$

wobei I_0 durch U_E/R gegeben ist und für $\tau = RC$ gilt. Ein ähnliches funktionales Verhalten gilt für die Kondensatorspannung U_C :

$$U_C(t) = U_E(1 - e^{-t/\tau}) \quad (15)$$

Direkt nach dem Einschalten fließt im RC-Kreis ein Maximalstrom I_0 , der den Kondensator auflädt und der mit der Zeitkonstante τ exponentiell auf Null abklingt. Entsprechend steigt die Spannung U_C des Kondensators exponentiell mit der Zeitkonstante τ an, bis schließlich der Endwert, die Eingangsspannung U_E , erreicht wird.

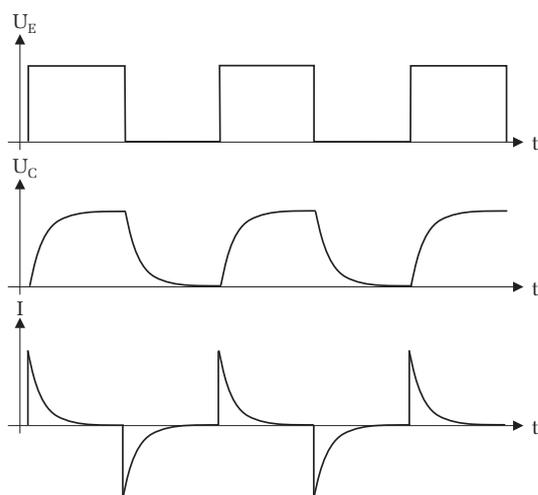


Abbildung 10: eine rechteckförmige Eingangsspannung U_E bewirkt ein kontinuierliches Laden und Entladen des Kondensators. Beachten Sie, dass sich die Richtung des Ladestroms I beim Entladen umkehrt.

Das zeitliche Verhalten des Ladevorgangs wird allein durch die Zeitkonstante $\tau = RC$ bestimmt. Je größer τ , desto länger dauert es bis der Kondensator aufgeladen ist. Dies ist leicht einzusehen, denn ein hochohmiger Widerstand R bewirkt, dass im Mittel nur ein kleiner Ladestrom fließt. Entsprechend lange dauert es bis der Kondensator vollständig aufgeladen ist. Zudem bedeutet eine große Kapazität ein hohes „Fassungsvermögen“ für Ladungen. Daher benötigt eine große Kapazität bei gegebenem Ladestrom eine längere Ladezeit als eine kleine Kapazität.

Die Zeitkonstante τ kann durch Messung der Halbwertszeit T_{12} der Kondensatorspannung experimentell bestimmt werden. Aus Gleichung (15) folgt für die Halbwertszeit

$$\frac{U_E}{2} = U_E(1 - e^{-T_{12}/\tau}) \quad (16)$$

und damit

$$\tau = \frac{T_{12}}{\ln 2}. \quad (17)$$

Statt einer Gleichspannungsquelle und einem Schalter wird das RC-Glied nun an eine Rechteckspannung mit der Periodendauer T angeschlossen. Steigt die Spannung von Null auf den Wert U_E , so wird der

⁴Die genaue Herleitung finden Sie in den meisten Lehrbüchern der Elektrodynamik

Kondensator wie zuvor diskutiert mit der Zeitkonstante τ aufgeladen. Fällt die Spannung dann wieder auf Null zurück, so wird der Kondensator über den Widerstand R entladen. Der Entladevorgang erfolgt mit der gleichen Zeitkonstante τ wie der Ladevorgang. Der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung und des Ladestroms ist in Abbildung 10 dargestellt.

Beschreibung der elektrischen Eigenschaften einer Membran eines Axons mit Hilfe von RC-Gliedern

Abbildung 11 zeigt den schematischen Aufbau eines Membranabschnitts eines Axons. Der Extrazellulärraum wird vom Intrazellulärraum durch eine elektrisch nicht leitende Doppellipidschicht getrennt. In dieser Schicht sind Ionenkanäle eingebettet. Sie arbeiten spezifisch, d.h. sie lassen beispielsweise nur Natrium- oder Kalium- Ionen durch. Zwischen Extra- und Intrazellulärraum besteht ein Membranruhespannung U_0 von typischerweise 70 mV. Die Ursache dieser Spannung ist auf die unterschiedliche Verteilung der Ionen zurückzuführen. Aufgrund der Diffusion wandern nun die einzelnen Ionen in Richtung des Konzentrationsgradienten durch die spezifischen Ionenkanäle auf die andere Seite der Membran. Dadurch würde sich der Konzentrationsunterschied mit der Zeit ausgleichen und die Membranruhespannung würde auf Null absinken. Um dies zu verhindern, befinden sich in der Doppellipidschicht zusätzlich noch Ionenpumpen, die kontinuierlich Ionen entgegen dem Konzentrationsgradienten befördern.

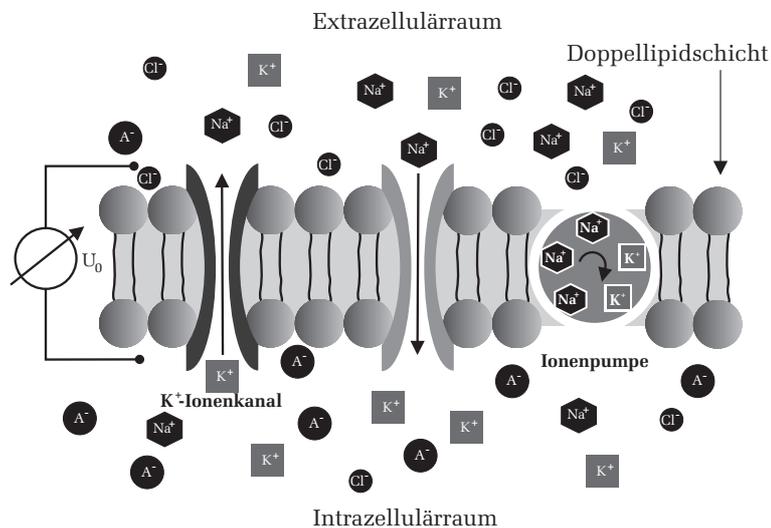


Abbildung 11: Schematischer Aufbau der Membran eines Axons.

Die elektrischen Eigenschaften solch einer Membran lassen sich mit Hilfe einfacher elektrischer Bauelemente wie Widerstand, Kondensator, Spannungs- und Stromquelle sehr gut modellieren. Betrachten wir dazu zunächst die unterschiedlichen Ionenkonzentrationen (Abbildung 12a). Im Inneren der Membran ist die Konzentration von Kaliumionen höher als im Außenbereich. Die damit verbundene Potentialdifferenz kann im Ersatzschaltbild durch eine Spannungsquelle U_K beschrieben werden. Diese Spannungsquelle ermöglicht ein Fluss von Kaliumionen durch die Membran (**Diffusionsstrom**). Die Ionen können aber nur durch den Ionenkanal die Membran durchqueren. Der Kalium- Ionenkanal stellt somit einen elektrischen Leiter für Kalium dar. Da jeder Leiter, abgesehen von den Supraleitern, einen endlichen Widerstand besitzt, wird der Kalium- Ionenkanal im Ersatzschaltbild durch den Widerstand R_K dargestellt (Abbildung 12b).

Neben Kalium werden die elektrischen Eigenschaften der Membran noch von anderen Ionenarten bestimmt. Wir berücksichtigen dies indem wir die Potentialdifferenzen bezüglich aller Ionenarten durch verschiedene Spannungsquellen und die dazugehörigen Ionenkanäle durch unterschiedliche Widerstände darstellen. Dabei gilt es die richtige Polung der einzelnen Spannungsquellen zu beachten.

Da sich die Ionen auf der Oberfläche der Membran im Gegensatz zu deren Durchquerung vergleichbar gut bewegen können, dürfen wir die einzelnen Ersatzschaltbilder parallel schalten (Abbildung 12c).

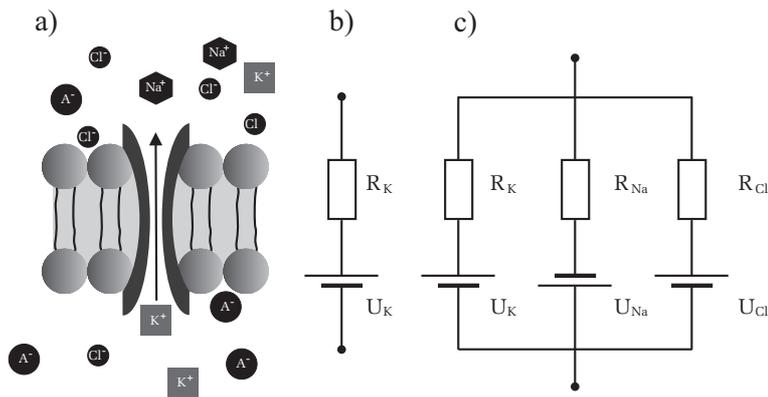


Abbildung 12: a) Doppellipidschicht mit einem Ionenkanal. b) Elektrisches Ersatzschaltbild einer Ionenart unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Ionenkonzentration und der Wirkungsweise des Ionenkanals. c) Ersatzschaltbild für drei verschiedene Ionenarten und Ionenkanäle.

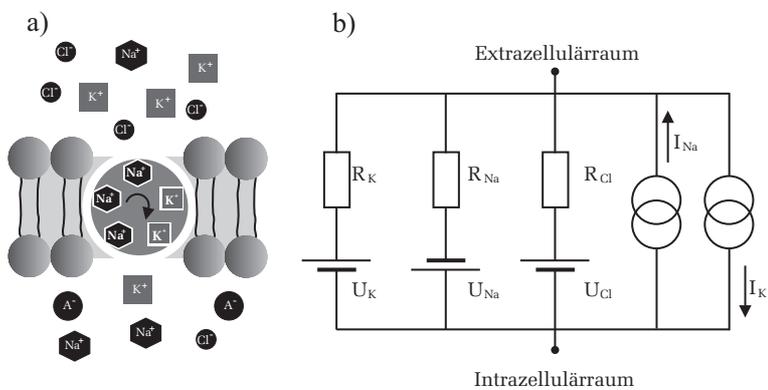


Abbildung 13: Berücksichtigung einer Ionenpumpe der Membran. Für jede Ionenart, die durch eine Ionenpumpe befördert wird, muss im Ersatzschaltbild eine Stromquelle (im Schaltbild zwei ineinander greifende Kreise) parallel hinzugefügt werden. Da die Förderrichtungen für K^+ - und Na^+ -Ionen entgegengesetzt verlaufen, fließen auch die einzelnen Ströme in entgegengesetzten Richtungen.

Dies gilt aber nur für einen kurzen Membranabschnitt. Für längere Abschnitte müssen zusätzlich noch Längswiderstände der Membran berücksichtigt werden. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Als nächstes müssen wir die Ionenpumpen in unser Ersatzschaltbild mit einbeziehen (Abbildung 13). Die Ionenpumpen sorgen dafür, dass stets ein ausreichender Ionenüberschuss einer Ionenart auf **einer** der Membranseiten vorhanden ist. Damit wirken sie dem konzentrationsabbauenden Diffusionsstrom durch die Ionenkanäle entgegen. Die Ionen, die durch Diffusion durch die Ionenkanäle, die Membran durchqueren, werden mit Hilfe der Ionenpumpe wieder zurück transportiert. Elektrisch gesehen stellt somit eine Ionenpumpe eine Stromquelle dar. In Abbildung 13 ist eine Ionenpumpe dargestellt, die zum einen K^+ -Ionen in den Intrazellulärraum transportiert und gleichzeitig Na^+ -Ionen in den Außenbereich der Zelle befördert. Wir berücksichtigen dies im Ersatzschaltbild, indem wir zwei Stromquellen einzeichnen, eine für K^+ -Ionen und eine für Na^+ -Ionen.

Schließlich müssen wir noch die elektrischen Eigenschaften der Doppellipidschicht untersuchen. Wie bereits angemerkt wurde, können sich die Ionen auf der Oberfläche der Doppellipidschicht gut bewegen. Die Doppellipidschicht selbst ist für die Ionen undurchlässig; sie stellt einen elektrischen Isolator dar. Solch eine Anordnung, aus zwei leitenden Elektroden (die Ober- und Unterseite der Doppellipidschicht), die

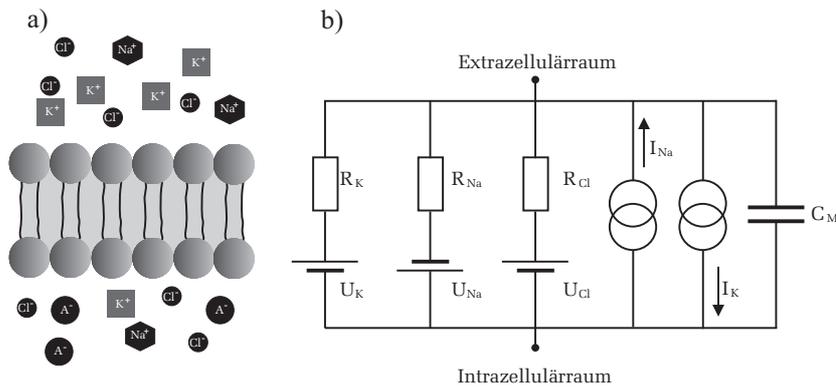


Abbildung 14: Der Membranbereich, der allein aus der nichtleitenden Doppelschicht besteht, wird im Ersatzschaltbild durch eine Kapazität beschrieben.

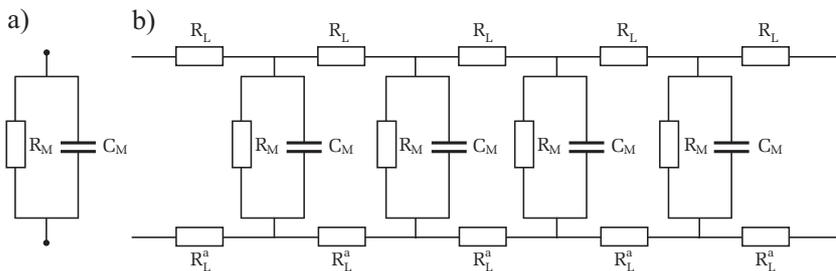


Abbildung 15: Links: Ersatzschaltbild zur Beschreibung der passiven Eigenschaften eines Membranabschnitts. Rechts: Für längere Membranabschnitte müssen zusätzlich noch Längswiderstände, die die Leitfähigkeit der Ionen entlang der Membran wiedergeben, berücksichtigt werden. Aus Symmetriegründen wurden hier Längswiderstände sowohl im Extra- als auch im Intrazellulärraum eingezeichnet.

durch einen Isolator getrennt sind, entspricht im Ersatzschaltbild einem Kondensator mit der Kapazität C_M . Typische Werte für die Membrankapazität C_M eines Neurons liegen bei etwa $1 \mu\text{F}/\text{cm}^2$.

In Abbildung 14 ist das gesamte Ersatzschaltbild eines Membranabschnitts dargestellt. Auf den ersten Blick scheint dieses recht kompliziert zu wirken. Allerdings kann dies durch weitere Überlegungen noch vereinfacht werden: Nach dem Theorem von Thévenin, auf das hier nicht näher eingegangen werden soll, kann eine Stromquelle auch durch eine Spannungsquelle und einen zusätzlichen Serienwiderstand beschrieben werden. Weiterhin können alle Spannungsquellen und Widerstände (und somit auch die Stromquellen) zu einer Gesamtspannungsquelle und einem Gesamtwiderstand zusammengefasst werden. Ist man zudem nur an den passiven Eigenschaften der Membran interessiert, so kann auch die Spannungsquelle vernachlässigt werden. Die Spannungsquelle hat nur Einfluss auf den Absolutwert der Membranruhespannung. Diese ist aber für die passiven Eigenschaften völlig belanglos. Die passiven Eigenschaften eines Membranabschnitts können also allein durch einen Widerstand R_M und einen parallel geschalteten Kondensator C_M beschrieben werden (Abbildung 15a). Unsere bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf einen Membranabschnitt des Axons. Sollen größere Bereiche eines Axons untersucht werden, so müssen auch Längswiderstände berücksichtigt werden. Das Ersatzschaltbild eines längeren Membranabschnitts ist in Abbildung 15b dargestellt. Mehrere RC-Glieder sind durch Längswiderstände, die die Leitfähigkeit der Ionen berücksichtigen, parallel geschaltet. R_L^a stellt den Widerstand im extrazellulären Raum dar. Der Wert für R_L^a ist in der Regel sehr klein und kann daher vernachlässigt werden. Der Widerstand R_L des cytoplasmatischen Innenraums ist dagegen nicht zu vernachlässigen. Er hängt von der Querschnittsfläche des Axons und vom spezifischen Widerstand des Cytoplasmas ab.

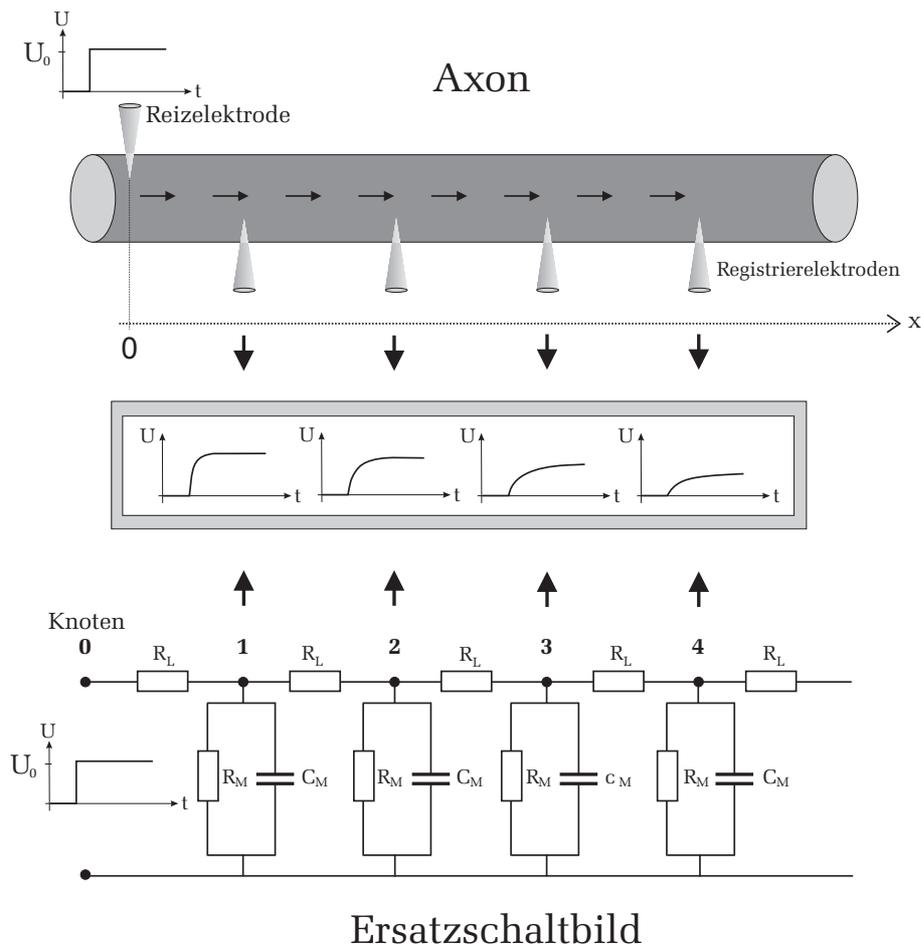


Abbildung 16: *Oben: Ausbreitung eines Reizes entlang eines Axons. Bei $x = 0$ wird ein rechteckförmiges Reizsignal in den Axon eingespeist. Die Ausbreitung dieses Signals wird mit Hilfe von Registrierelektroden gemessen. Unten: Elektrisches Ersatzschaltbild. Das Reizsignal wird hier am Eingang (Knoten 0) eingekoppelt. Der zeitliche Verlauf des sich ausbreitenden Signals wird an den verschiedenen Knoten untersucht. Mitte: Qualitativer Signalverlauf an unterschiedlichen Orten als Funktion der Zeit.*

Ausbreitung eines Signals entlang eines Axons

Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich das Membranpotential $U(x, t)$ entlang eines Axons mit der Entfernung und der Zeit ändert, wenn man an einer Stelle einen Strom injiziert. Dabei beschränken wir uns wieder auf die passiven Membraneigenschaften, d.h. signalverstärkende Mechanismen, wie z.B. spannungsgesteuerte Ionenkanäle werden nicht berücksichtigt.

Die Behandlung dieses Problems ist mathematisch sehr aufwendig und wird daher hier nicht analytisch durchgeführt. Wir wollen jedoch die Ergebnisse anhand einiger Grafiken diskutieren.

Nehmen wir zunächst an, dass am Anfang des Axons bei $x = 0$, bzw. am Eingang (Knoten 0) unseres Ersatzschaltbilds, eine rechteckförmige Reizspannung U_0 angelegt wird. Der Spannungsverlauf $U(x, t)$ entlang des Axons (bzw. analog an den Knotenpunkten im Ersatzschaltbild) ist im mittleren Teil in Abbildung 16 an vier unterschiedlichen Orten skizziert. Den Bildern kann man entnehmen, dass mit zunehmendem Abstand von der Einkopplungsstelle, die Signale immer stärker gedämpft werden und der Signalanstieg immer langsamer verläuft. Eine exakte Berechnung dieser Signalverläufe ist in Abbildung 17 zu sehen. Die linke Abbildung zeigt den Signalverlauf an unterschiedlichen Orten des Axons (oder analog an den Knoten im Ersatzschaltbild) als Funktion der Zeit. Die einzelnen Kurven zeigen alle ein ähnliches

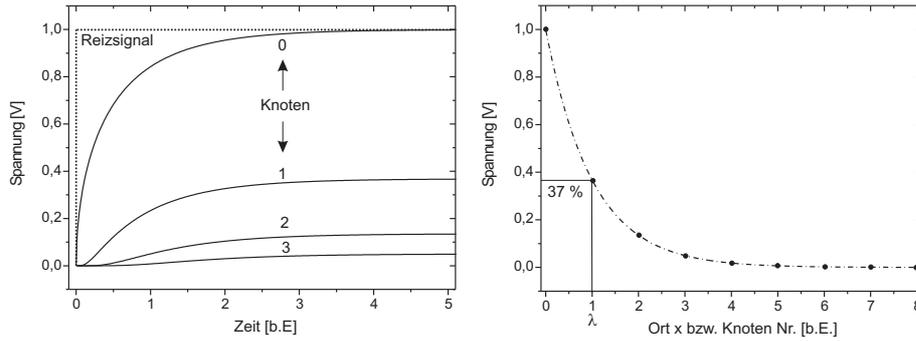


Abbildung 17: Links: Auf dem Ersatzschaltbild basierte Rechnungen des Spannungsverlaufs an unterschiedlichen Orten (Knoten). Für große Zeiten ändern sich die Spannungen nicht mehr. Diese zeitlich konstanten Spannungen werden im Folgenden als Gleichgewichtsspannungen \hat{U} bezeichnet. Die Abkürzung b.E. steht für „beliebige Einheit“. Rechts: Die Gleichgewichtsspannung fällt mit zunehmendem Abstand exponentiell ab. Der Ort λ , bei dem die Spannung auf 37% des Ursprungswertes abgesunken ist, heißt Längskonstante (hier zufällig am Knoten 1).

Verhalten. Beim Einschalten des rechteckförmigen Reizes zum Zeitpunkt $t = 0$ (gepunktete Kurve), steigen auch die an den verschiedenen Orten anliegenden Spannungen an. Mit zunehmender Zeit wird die Steigung der Signale immer geringer bis schließlich ein zeitlich konstantes Spannungsniveau \hat{U} (Gleichgewichtsspannung) erreicht wird. Diese Gleichgewichtsspannung fällt mit zunehmendem Abstand vom Ort der Anregung rasch ab. Eine genauere Analyse zeigt, dass die Gleichgewichtsspannung exponentiell mit dem Abstand x abfällt (Abbildung 17 Rechts):

$$\hat{U}(x) = U_0 e^{-x/\lambda}, \quad (18)$$

wobei hier \hat{U} die Gleichgewichtsspannung bezeichnet und λ die sogenannte Längskonstante darstellt. Die Längskonstante ist die Entfernung von der Strominjektionsstelle zu dem Ort auf dem Axon, an dem \hat{U} auf den 1/e-ten Teil bzw. auf 37 % seines Ursprungswertes abgefallen ist. Sie hängt nur von den Längs- und Membranwiderständen ab. Eine genaue Rechnung für λ ergibt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\tilde{R}_M}{\tilde{R}_L}}. \quad (19)$$

Die beiden Widerstände \tilde{R}_L und \tilde{R}_M wurden hier mit einer Tilde gekennzeichnet, da diese bei einem realen Axon von dessen Geometrie abhängen. \tilde{R}_M und \tilde{R}_L sind daher längenspezifische Widerstände: \tilde{R}_M ist der Membranwiderstand einer Längeneinheit des Axons und \tilde{R}_L der Längswiderstand des cytoplasmatischen Innenraums pro Längeneinheit. Im Ersatzschaltbild sind die Widerstände \tilde{R}_L und R_L bzw. \tilde{R}_M und R_M vom Betrag her aber identisch.

Die Längskonstante entspricht der Wurzel aus dem Verhältnis von Membranwiderstand und Längswiderstand. Je größer λ desto geringer ist die Dämpfung eines sich ausbreitenden Reizsignals. Typische Werte für λ sind einige Millimeter, wobei dickere Nerven in der Regel eine größere Längskonstante aufweisen als dünne Axone.

Wie wir gesehen haben, hängt die Signaldämpfung nur von den beiden Widerständen \tilde{R}_L und \tilde{R}_M ab, nicht aber von der Membrankapazität C_M . Die Membrankapazität hat aber ebenfalls großen Einfluss auf die Reizweiterleitung. Ihnen ist wahrscheinlich schon in der linken Abbildung 17 aufgefallen, dass neben der Gleichgewichtsspannung auch der Anstieg der Signale (also die Steigung) mit zunehmendem Abstand vom Ort der Einkoppelung immer geringer wird. Allerdings ist dies wegen des exponentiellen Abfalls der Gleichgewichtsspannung nur qualitativ zu erkennen. Für eine quantitative Untersuchung ist es günstiger die einzelnen Spannungsverläufe auf die jeweilige Gleichgewichtsspannung zu normieren (d.h.

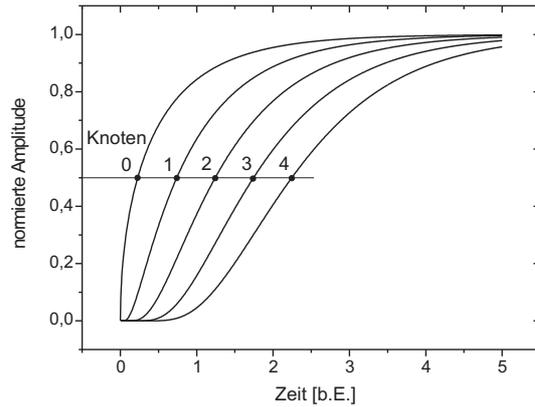


Abbildung 18: *Normierter Spannungsverlauf an unterschiedlichen Orten des Axons (bzw. unterschiedliche Knoten im Ersatzschaltbild).*

wir skalieren die einzelnen Kurven so, dass sie den gleichen relativen Spannungsbereich überdecken). Das Gleiche machen Sie übrigens auch, wenn Sie die Spannungsverläufe mit dem Oszilloskop messen. Durch Variierung der y-Ablenkung werden die Signale so eingestellt, dass sie möglichst den ganzen vertikalen Bildschirm ausnutzen. Damit normieren Sie die Signale auf den Schirmbereich des Oszilloskops. Wie Sie Abbildung 18 entnehmen können, erfolgt der Spannungsanstieg an weiter vom Ort der Reizeinkopplung gelegenen Punkten später als an nähergelegenen. Dieser Sachverhalt unterliegt sogar einer einfachen Gesetzmäßigkeit: Misst man die Zeit an einem Ort des Axons (bzw. an einem Knoten im Ersatzschaltbild), die vergeht, bis die dort anliegende Spannung gerade die Hälfte der Gleichgewichtsspannung erreicht hat und trägt darüber den Ort bzw. die Knoten- Nummer auf, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung v . Zu Erkennen ist dies in Abbildung 18 darin, dass die Halbwertszeiten der Signale benachbarter Knoten den gleichen Abstand voneinander aufweisen. Mit Hilfe einiger mathematischen Überlegungen kann man eine Art Leitungsgeschwindigkeit v einführen:

$$v = \frac{\lambda}{\tau_M} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{R}_L \tilde{R}_M C_M^2}}, \quad (20)$$

wobei für die Zeitkonstante $\tau_M = \tilde{R}_M C_M$ gilt. Die Leitungsgeschwindigkeit eines Reizes hängt demnach von beiden Widerständen und von der Membrankapazität ab. Um eine hohe Geschwindigkeit der Signalausbreitung zu erzielen, muss demnach die Längskonstante λ möglichst groß und die Zeitkonstante τ möglichst klein sein.

4.3.7 Durchführung des Versuchs

1. Lade- und Entladeverhalten eines RC-Glieds

Bauen Sie mit Hilfe der Steckelemente (Widerstände, Kondensatoren und Verbindungsleitungen) die Schaltung nach Abbildung 19 auf dem Steckbrett auf. Einige Buchsen des Steckbretts sind bereits intern miteinander elektrisch verbunden. Diese Verbindungen sind auf der Oberfläche des Gehäuses durch schwarze Linien zwischen den Buchsen markiert.

Verbinden Sie nun den Ausgang des Funktionsgenerators mit Ihrer Schaltung. Beachten Sie dabei, dass das schwarze Kabel an Masse (Symbol \perp im Schaltbild) angeschlossen wird und das rote an den Widerstand. Zur Darstellung der Signale verwenden wir ein Oszilloskop. Schließen Sie den Ausgang U_C Ihrer Schaltung an Kanal 2 und das Eingangssignal U_E an Kanal 1 an. Beachten Sie auch hier wieder, dass das schwarze Kabel an Masse angeschlossen wird.

Drücken Sie am Funktionsgenerator die Taste für die Signalform „Rechteck“. Die Frequenz müssen Sie bei jeder Messung so einstellen, dass Sie am Oszilloskop den gesamten Lade- bzw. Entladevorgang beobachten können ($f \ll \tau$).

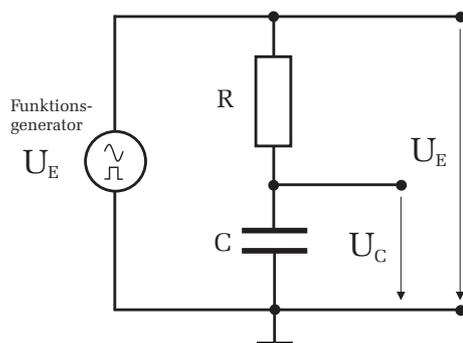


Abbildung 19: Schaltung zum Lade- und Entladeverhalten eines RC-Glieds.

Messen Sie für die folgenden drei RC-Kombinationen die Halbwertszeit $T_{1/2}$ des Lade- oder Entladevorgangs und skizzieren Sie für eine RC-Kombination den Spannungsverlauf des Lade- **und** Entladevorgangs:

- C=100 nF, R=4,7 k Ω
- C=10 nF, R=4,7 k Ω
- C=10 nF, R=47 k Ω .

Vertauschen Sie für eine RC- Kombination den Kondensator mit dem Widerstand und skizzieren Sie den Spannungsverlauf U_R über dem Widerstand der beim Laden **und** Entladen des Kondensators auftritt.

2. Ersatzschaltbild der Membran eines Axons

Bauen Sie die Schaltung nach Abbildung 20 auf dem Steckbrett auf. Wählen Sie für die Membrankapazität $C_M=100$ nF und für die Längswiderstände $R_L=1$ k Ω . Die Membranwiderstände sind durch R_{M1} gekennzeichnet. Wählen Sie hierfür zunächst die Widerstände R_{M1} . Dem letzten Membranwiderstand muss eine besondere Beachtung geschenkt werden: Bei der Behandlung der elektrischen Eigenschaften eines Axons im Kapitel Grundlagen sind wir davon ausgegangen, dass der Axon sehr lang ist. In unserem Ersatzschaltbild besteht dieser aber nur aus sechs Abschnitten. Da die Schaltung abrupt endet und somit keine weitere Signalleitung mehr möglich ist, würden sich die Messungen am letzten Knoten erheblich verfälschen. Wir können dies kompensieren, indem wir annehmen, dass hinter dem letzten Knoten noch viele weitere Membranabschnitte vorhanden sind. Berechnet man von diesen fiktiven Abschnitten den Gesamtwiderstand R_{M1}^∞ und benutzt diesen Wert am letzten Knoten für den Membranwiderstand, so verhält sich die Schaltung an allen Knoten wie ein unendlich langer Axon. Für den letzten Widerstand am Knoten 5 müssen Sie daher den Widerstand R_{M1}^∞ einsetzen.

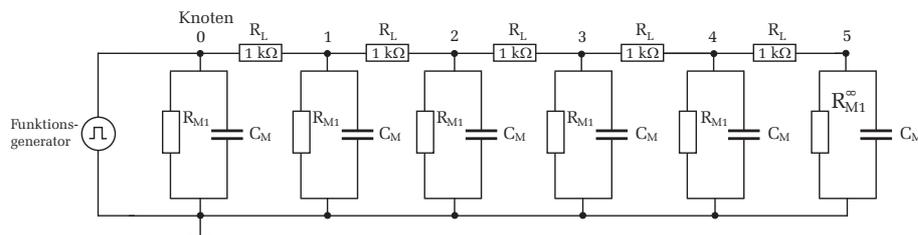


Abbildung 20: Ersatzschaltbild der Membran eines Neurons.

Messung der Längskonstante λ :

Schließen Sie dazu den Funktionsgenerator an den Eingang am Knoten 0 Ihrer Schaltung an. Beachten Sie dabei, dass das schwarze Kabel wieder an Masse angeschlossen wird. Im Folgenden sind alle Messungen massebezogen, d.h. wenn Sie den Spannungsverlauf an einem Knoten mit dem Oszilloskop

messen, so muss das rote Kabel mit dem entsprechenden Knoten und das schwarze Kabel mit Masse verbunden werden.

Überprüfen Sie, ob am Funktionsgenerator die Signalform noch auf Rechteck eingestellt ist. Die Frequenz und Amplitude müssen Sie am Funktionsgenerator so einstellen, dass Sie zum einen die Signalamplitude am **letzten** Knoten noch gut messen können und zum anderen den gesamten Ladevorgang bis zum Erreichen der Gleichgewichtsspannung (vergleiche Abbildung 17) auf dem Oszilloskopschirm darstellen können. Verbinden Sie dazu den letzten Knoten 5 an Kanal 2 des Oszilloskops und stellen Sie entsprechend die Amplitude und Frequenz ein. An Kanal 1 des Oszilloskops sollten Sie zusätzlich noch das vom Funktionsgenerator kommende Eingangssignal darstellen.

Messen Sie nun ausgehend vom letzten Knoten die Gleichgewichtsspannung an allen Knoten Ihrer Schaltung (Knoten 5 bis Knoten 0). Nutzen Sie dabei, wenn möglich, den gesamten vertikalen Bildschirm des Oszilloskops aus und vergewissern Sie sich, dass der Einstellknopf für die y-Ablenkung auf „calibriert“ steht. Fertigen Sie in Ihr Protokollheft eine Skizze der Schaltung an und tragen Sie die Messwerte in eine Tabelle ein, die die Größen: Knoten-Nr., Frequenz am Funktionsgenerator, Gleichgewichtsspannung und den Ablesefehler der Gleichgewichtsspannung dokumentiert.

Abschließend sollen Sie noch qualitativ verifizieren, dass die Gleichgewichtsspannung nach Gleichung (18) und Gleichung (19) unabhängig von der Membrankapazität ist. Entfernen Sie alle Membrankapazitäten und vergleichen Sie die Gleichgewichtsspannung mit den zuvor gemessenen Werten. Dokumentieren Sie Ihre Ergebnisse mit einigen Sätzen in Ihrem Protokollheft.

4.3.8 Auswertung

Zu Aufgabe 1:

Berechnen Sie aus den gemessenen Halbwertszeiten die Zeitkonstante τ und tragen Sie die Ergebnisse in einer zusammenfassenden Tabelle ein. Die Tabelle soll die Größen C , R , f , $\tau_{\text{exp.}}$, $\tau_{\text{theo.}}$ enthalten.

Interpretieren Sie den Spannungsverlauf von U_R . Aus welchem Grund entspricht der Verlauf dem Ladestrom ?

Zu Aufgabe 2:

Tragen Sie die gemessenen Gleichgewichtsspannungen für die Membranwiderstände R_{M1} in ein halblogarithmisches Diagramm über die Knotennummer auf. Sie erhalten bei dieser Auftragung eine Gerade. Berechnen Sie aus der Steigung die Längskonstante λ unter Berücksichtigung der Fehler.

Bestimmen Sie mit Hilfe von λ den Wert des Membranwiderstands R_{M1} . Falls es Ihnen gelingt, können Sie auch noch die Widerstände R_{M1}^∞ und R_{M2}^∞ berechnen.

4.3.9 Anhang

Aufbau eines Elektronenstrahl- Oszilloskops

In Abbildung 21 ist der schematische Aufbau einer Elektronenstrahl- Röhre dargestellt. Am schlanken Ende einer evakuierten Glasröhre befindet sich eine beheizbare Kathode (Glühkathode), aus der durch thermische Emission Elektronen heraustreten. Diese Elektronen werden durch eine hohe elektrische Spannung U_B in Richtung Anode beschleunigt, durchlaufen anschließend die x- und y-Ablenkeinheiten und treffen schließlich auf die Fluoreszenzschicht des Leuchtschirms, an dessen Auftreffpunkt sie einen Leuchtfleck erzeugen. Die Helligkeit des Leuchtflecks kann zum einen durch die Beschleunigungsspannung, als auch mit Hilfe des Wehnelt- Zylinders eingestellt werden. Befindet sich der Wehnelt- Zylinder auf einem Potential U_W , das negativer ist als das Potential an der Kathode, so bewirkt dieses abstoßende Potential, dass ein Teil der Elektronen zur Kathode zurückgedrängt werden und somit weniger Elektronen den Leuchtschirm erreichen. Ab einem gewissen Sperrpotential können keine Elektronen den Wehnelt-Zylinder passieren. Dadurch ist ein sehr schnelles „Ausschalten“ (Dunkeltastung) und auch wieder „Einschalten“ des Elektronenstrahls möglich. Wir werden später noch darauf zurückkommen.

Zur Fokussierung des Elektronenstrahls befindet sich zwischen dem Wehnelt- Zylinder und der Anode eine zusätzliche zylinderförmige Fokussierelektrode. Liegt diese auf einem positiven Potential U_F , das kleiner ist als das Potential an der Anode, so wirkt die Fokussierelektrode zusammen mit der Anode wie eine elektrische „Sammellinse“, die die Glühkathode auf den Schirm abbildet. Durch Variierung des Potentials an der Fokussierelektrode mit dem Einstellregler FOCUS kann so ein scharfer Leuchtfleck erzeugt werden.

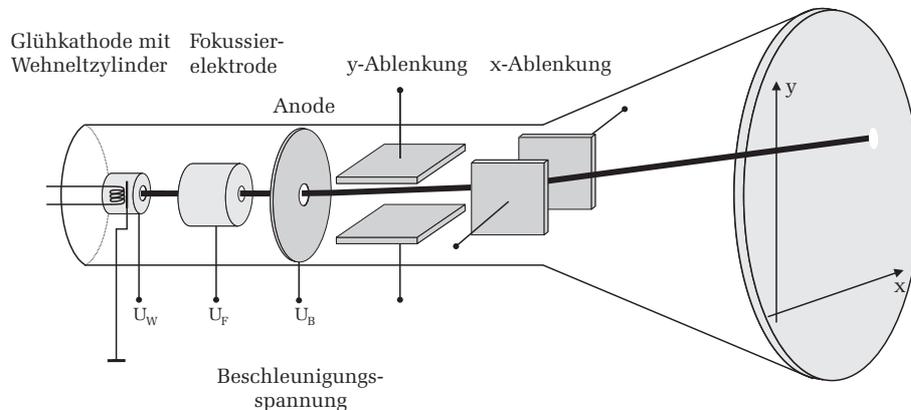


Abbildung 21: Schematischer Aufbau eines Elektronenstrahl- Oszilloskops.

Mit der bisher geschilderten Elektrodenanordnung lässt sich nur ein starrer Leuchtfleck erzeugen. Zwar kann die Helligkeit und die Schärfe des Leuchtflecks eingestellt werden, der Leuchtpunkt verharrt aber stets im Mittelpunkt des Schirms. Damit der Leuchtpunkt in der gesamten Bildelebene bewegt werden kann, benötigen wir zusätzlich die x- und y-Ablenkeinheiten. Diese Ablenkeinheiten bestehen jeweils aus zwei Metallplatten, die senkrecht zueinander angeordnet sind (Plattenkondensator). Betrachten wir zunächst die y-Ablenkeinheit: Legt man an diese eine Spannung U_y so wirkt auf ein Elektron beim Durchqueren eine elektrische Kraft, die proportional zur Spannung U_y ist und in y-Richtung wirkt. Befindet sich beispielsweise die obere Ablenkplatte auf einem positiven Potential, so wird der Elektronenstrahl und somit der Leuchtpunkt oberhalb der Schirmmitte abgelenkt. Bei umgekehrter Polung wird der Leuchtfleck entsprechend nach unten abgelenkt. Durch eine Steuerspannung an den y-Ablenkplatten ist also eine vertikale Verschiebung des Leuchtpunkts möglich. Der gleiche Effekt kann mit Hilfe der x-Ablenkeinheit und einer Steuerspannung U_x auch in horizontaler Richtung erzielt werden. Somit kann durch eine entsprechende Einstellung von U_x und U_y jeder Punkt auf dem Leuchtschirm erreicht werden.

Das Oszilloskop im yt-Betrieb

Bisher haben wir nur diskutiert, wie man einen einzelnen Punkt auf dem Leuchtschirm ansteuern kann. Im Allgemeinen wird aber ein Oszilloskop dazu benutzt, um ein Spannungssignal als Funktion der Zeit darzustellen. Man bezeichnet diesen Betriebsmodus auch als yt- Betrieb. Die y-Richtung des Bildschirms entspricht dabei der Spannungsachse und die x-Achse der Zeit. Das Grundprinzip ist in Abbildung 22 skizziert. Hier soll beispielsweise ein Sinussignal U_y als Funktion der Zeit auf dem Oszilloskop dargestellt werden. Hierfür wird das darzustellende Signal U_y auf die y-Ablenkplatten gelegt. Aufgrund der sinusförmigen sich ändernden Spannung U_y bewegt sich der Leuchtpunkt zunächst nur immer auf und ab (Abbildung 22a). Auf dem Oszilloskop erscheint eine senkrechte Linie mit der man natürlich noch nicht allzuviel anfangen kann. Um nun eine sinnvolle Zeitinformation zu erhalten muss der Leuchtpunkt **gleichzeitig** zur y-Ablenkung auch proportional zur Zeit in horizontaler Richtung abgelenkt werden. Damit dies zeitlich linear geschieht, besitzt ein Oszilloskop eine eingebaute Elektronik, die eine sogenannte Sägezahnspannung U_x an der x-Ablenkeinheit generiert (Abbildung 22b).

Diese Spannung steigt zunächst zeitlich linear an, so dass sich der Elektronenstrahl proportional zur Zeit in horizontaler Richtung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Erreicht der Leuchtpunkt den rechten Bildschirmrand, so soll der Schreibvorgang wieder am linken Rand des Leuchtschirms beginnen. Dies wird erreicht indem die x-Ablenkspannung sehr schnell auf das negative Maximum umgepolt wird. Da dieses

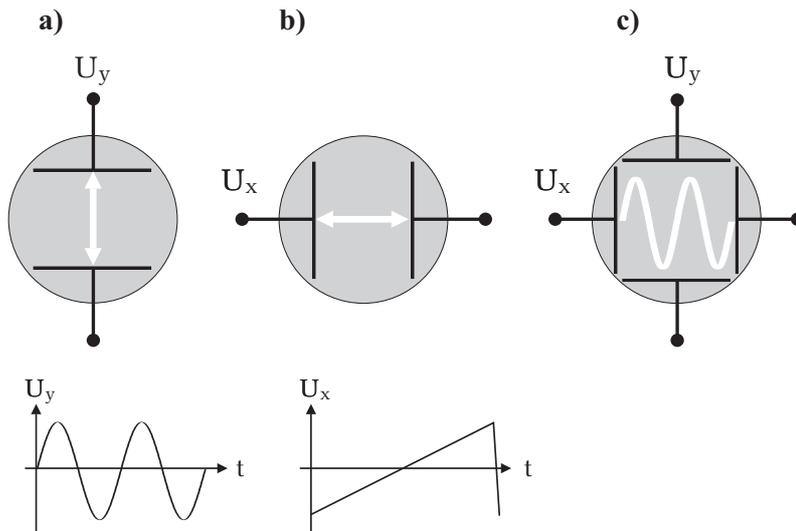


Abbildung 22: Wirkungsweise der x - und y -Ablenkeinheiten: a) Das darzustellende Spannungssignal U_y (hier ein Sinussignal) wird an die y -Ablenkeinheit angeschlossen. b) Gleichzeitig erzeugt das Oszilloskop intern eine Sägezahnspannung, an der x -Ablenkeinheit die den Elektronenstrahl proportional zur Zeit horizontal verschiebt. c) Das resultierende Oszilloskopbild bei dem gleichzeitig die Signalablenkung in y -Richtung, sowie die Sägezahnspannung in x -Richtung anliegt, liefert den Spannungsverlauf $U_y(t)$ als Funktion der Zeit.

Umpolen natürlich auch eine gewisse Zeit benötigt, erinnert die Form des Signalverlaufs, der Zahnung eines Sägeblatts. Die x -Ablenkspannung wird daher als Sägezahnspannung bezeichnet. Die langsame linear ansteigende Anstiegsflanke bedingt dabei den Vorlauf des Elektronenstrahls und die steil abfallende Flanke den Rücklauf. Gleichzeitig zum Sägezahnsignal folgt der Elektronenstrahl auch der Signalspannung, die an der y -Ablenkeinheit anliegt. Aufgrund der optische Trägheit unserer Augen und dem Nachleuchten des Schirmes entsteht so ein Bild, dass den Spannungsverlauf $U_y(t)$ darstellt (Abbildung 22c). Übrigens lässt sich die Nachleuchtdauer durch eine geeignete Wahl der Fluoreszenzschicht von etwa einer ms bei schnellen Oszilloskopen, bis mehreren Sekunden, wie es zum Beispiel bei analogen Radarschirmen erforderlich ist, einstellen.

Beim Rücklauf des Elektronenstrahls erzeugt dieser eine störende Leuchtspur auf dem Schirm (Abbildung 23). Um dies zu vermeiden wird für die Zeitdauer der Rücklaufzeit ein Impuls auf den Wehneltzylinder gegeben, der den Elektronenstrahl ausschaltet (Dunkeltastung). Auf dem Oszilloskop ist dann nur

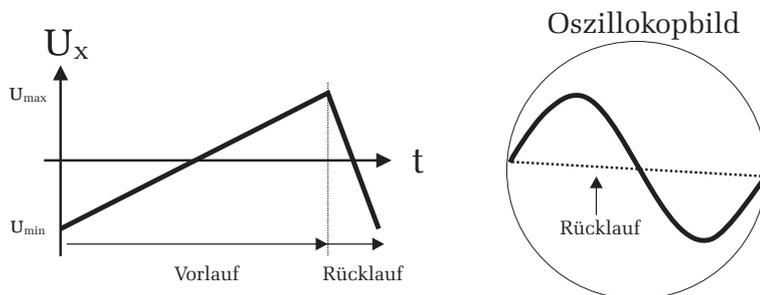


Abbildung 23: Links: Eine Periode der Sägezahnspannung die die Zeitablenkung des Elektronenstrahls für den Vor- und Rücklauf bestimmt. Rechts: Ohne Dunkeltastung würde der Elektronenstrahl beim Rücklauf eine störende Linie (in der rechten Abbildung gepunktet dargestellt) auf das Bild schreiben.

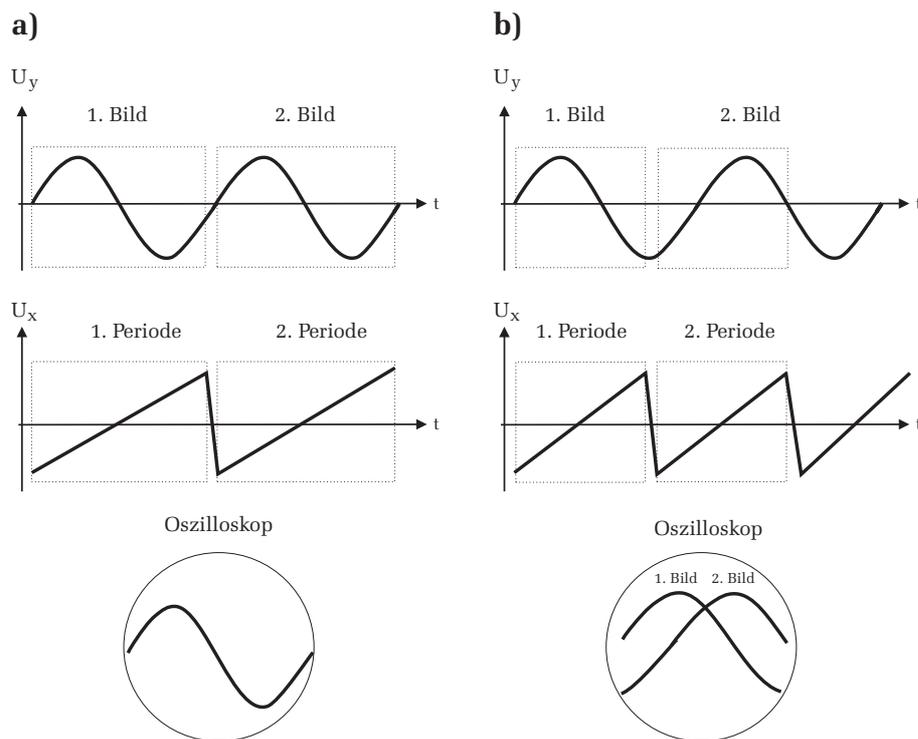


Abbildung 24: a) Das darzustellende Sinussignal U_y hat die gleiche Periodendauer wie die Sägezahnspannung. Dadurch wird bei jedem Strahlvorlauf der gleiche Signalbereich auf dem Oszilloskopschirm dargestellt und es entsteht ein stehendes Bild. b) Die Periode des Sinussignals stimmt nicht mit der Periodendauer des Sägezahns überein. Dies hat zur Folge, dass bei jedem Strahlvorlauf ein anderer Bereich des Sinussignals auf dem Schirm erfasst wird und so kein stehendes Oszilloskopbild möglich ist.

das Bild, das beim Signalvorlauf erzeugt wird, zu sehen.

Der Elektronenstrahl ist vergleichbar mit einem mechanischen Linienschreiber (yt-Schreiber), der den Spannungsverlauf auf ein Blatt Papier (Endlospapier) als Funktion der Zeit aufzeichnet. Dabei bewegt sich das Papier mit konstanter Geschwindigkeit unter einem Schreibstift. Gleichzeitig folgt der Stift aber auch dem zu messenden Spannungssignal in der zur Papiervorschubrichtung senkrechten Richtung. Es entsteht so eine lange Papierbahn, die den Spannungsverlauf kontinuierlich mit der Zeit bzw. mit der Papierlänge wiedergibt. Im Gegensatz zum mechanischen Linienschreiber steht beim Oszilloskop nur eine begrenzte Bildschirmbreite zur Verfügung. Da aber das Oszilloskopbild regeneriert wird, sobald der Strahl aussetzt und die Nachleuchtdauer des Bildschirms abgeklungen ist, verblasst das zuvor aufgezeichnete Bild und es kann erneut ein Spannungssignal im Bildschirmbereich aufgezeichnet werden.

Triggerung

Im Allgemeinen möchte man mit einem Oszilloskop periodische Signale darstellen. Legt man beispielsweise an den y-Eingang ein kontinuierliches Sinussignal, so soll auf dem Schirmbild stets ein zeitlich konstanter Ausschnitt dieses Signals angezeigt werden. Damit man auf dem Leuchtschirm ein stillstehendes Bild erhält, muss die Periodendauer der Sägezahnspannung gleich oder ein ganzzahliges Vielfaches von der Periodendauer des darzustellenden Sinussignals betragen. Andere asynchrone Einstellungen der Perioden führen zu einem flackernden, unregelmäßigen Bild, da bei jedem Strahlvorlauf immer ein anderer Signalbereich dargestellt wird (Abbildung 24).

Um stets ein stehendes Bild zu erhalten und unabhängig von den jeweiligen Periodendauern zu sein, muss das zu messende Signal $U_y(t)$ getriggert werden (Abbildung 25). Im Triggerbetrieb arbeitet das Oszillo-

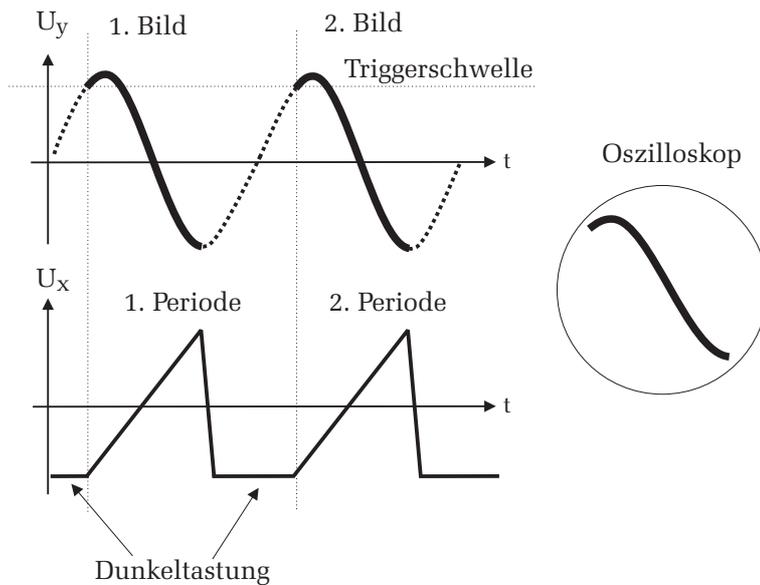


Abbildung 25: Prinzip der Triggerschaltung: Der Sägezahngenerator wird erst dann gestartet, wenn das darzustellende Eingangssignal die Triggerschwelle erreicht. Nach Ablauf einer Sägezahnperiode wird der Elektronenstrahl dunkelgetastet. Erst wenn das Eingangssignal wieder die Triggerschwelle erreicht, wird die nächste Sägezahnperiode gestartet. Durch den Triggerbetrieb erhält man stets ein stehendes Oszilloskopbild.

skop nicht mit ständig ablaufenden Zeitablenksignalen. Die Sägezahnspannung wird erst dann generiert, wenn die Eingangsspannung einen bestimmten Wert (Triggerschwelle) überschreitet. Erst dann startet das Sägezahnsignal und der Strahl wird horizontal abgelenkt. Nachdem eine Periode des Sägezahnsignals vollständig abgelaufen, d.h. die Sägezahnspannung wieder auf ihr Minimum zurückgesprungen ist, vergleicht die im Oszilloskop eingebaute Triggerelektronik ob die darzustellende Eingangsspannung U_y genauso groß ist wie die Triggerschwelle. Ist dies nicht der Fall, so wird der Elektronenstrahl mit Hilfe des Wehneltzylinders schlagartig ausgeschaltet. Erst wenn die Eingangsspannung die Triggerschwelle wieder erreicht, wird der Elektronenstrahl eingeschaltet und der Sägezahngenerator erneut gestartet, so dass ein neues Bild auf den Oszilloskopschirm geschrieben wird. Die Bilddarstellung beginnt demnach immer an der gleichen Stelle bzw. bei der gleichen Phasenlage des Eingangssignals. Bei einem kontinuierlich periodischen Eingangssignal ist somit immer der gleiche Signalauschnitt als stehendes Bild auf dem Oszilloskop zu sehen.

Wenn im Folgenden von „triggern“ gesprochen wird, ist damit das Starten des Sägezahngenerators und somit das Aufzeichnen eines **einzelnen** Oszilloskopbilds gemeint. Das Einsetzen der Triggerschaltung kann an den Einstellreglern des Oszilloskops beeinflusst werden. So kann beispielsweise der Triggerlevel stufenlos eingestellt werden. Desweiteren kann auch die Triggerschaltung zwischen steigender und fallender Flanke umgeschaltet werden. Wird die Einstellung „steigende Flanke“ gewählt, so erfolgt die Triggerschaltung nur dann, wenn das darzustellende Eingangssignal beim Erreichen der Triggerschwelle ansteigt. Wird auf die fallende Flanke getriggert, so erfolgt die Triggerschaltung wenn das Eingangssignal U_y die Triggerschwelle „von oben kommend“ durchläuft. In Abbildung 25 erfolgt die Triggerschaltung beispielsweise auf der steigenden Flanke der Eingangsspannung U_y . Auf die genaue Einstellung der Triggerparameter wird an späterer Stelle noch detailliert eingegangen.

Anhang: Kurzanleitung zur Bedienung des Oszilloskops Rigol DS1052E

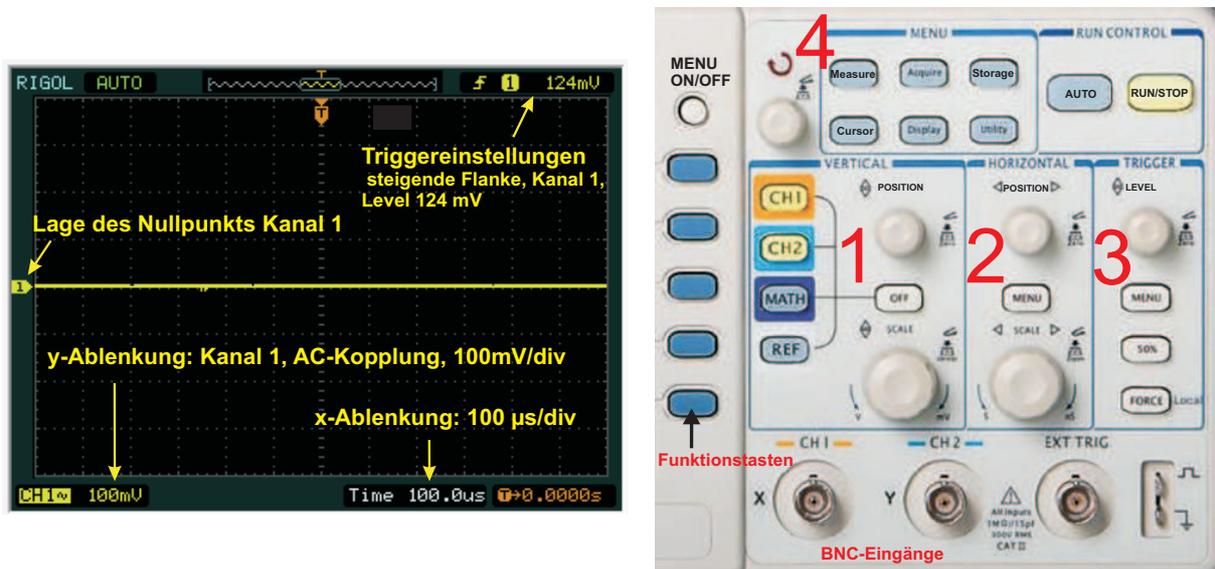


Abbildung 26: Links: Bildschirm des Rigol DS1052E. Wichtige Einstellungen werden an den Rändern eingeleuchtet. Rechts: Die wichtigsten Bedienelemente sind in Felder gegliedert und mit Zahlen markiert. 1: Vertikalablenkung, 2: Horizontalablenkung, 3: Trigger, 4: Menü.

Der Bildschirm des Oszilloskops (Abbildung 26) besitzt ein Koordinatensystem mit dem Sie die Signale leicht vermessen können. Zusätzlich befindet sich auf dem Bildschirm noch ein quadratisches Gitternetz bestehend aus acht mal zehn Kästchen. Die Breite und Höhe eines Kästchens wird im folgenden als DIV bezeichnet (DIV ist die englische Abkürzung für „division“ und bedeutet hier die Unterteilung des Koordinatensystems des Bildschirms). Die horizontale und vertikale Achse des Koordinatenkreuzes besitzen zusätzlich noch eine Feineinteilung von 0,2 DIV.

Die Frontplatte des Oszilloskops ist in mehrere Bereiche gegliedert:

Vertikalablenkung

Die Eingangssignale werden über BNC- Buchsen (Bayonet Neill Concelman) an das Oszilloskop angeschlossen. Die Beschriftung zwischen den Buchsen gibt den Eingangswiderstand, die Eingangskapazität und die maximal erlaubte Eingangsspannung an. Das Oszilloskop besitzt zwei Eingänge dessen Signale gleichzeitig auf dem Bildschirm dargestellt werden können

Die Kanalauswahl und Einstellungen zur Vertikalablenkung befinden sich im Bereich 1 in Abbildung 26. Mit den Tasten **CH1** bzw. **CH2** können Sie den jeweiligen Kanal einschalten. Ein Kanal ist aktiv, wenn die entsprechende Taste leuchtet. Durch nochmaliges Drücken der Taste können Sie den Kanal wieder ausschalten. Wenn Sie einen Kanal einschalten öffnet sich im Bildschirm ein Menü in dem Sie weitere Einstellungen vornehmen können. Hier ist der Unterpunkt **Kopplung** wichtig. Mit der Taste neben der Anzeige können Sie die gewünschte Option ändern. Nach Betätigung dieser Taste können Sie mit dem Drehregler links oben im Bedienfeld, die Optionen **DC** **AC** sowie **Erde** einstellen. Durch drücken auf den Drehreglerknopf wird die eingestellte Option übernommen.

Falls Sie die Option **Erde** wählen, wird die Eingangsbuchse geerdet geschaltet, so dass 0 V anliegen. Das Signal auf dem Bildschirm erfährt dann keine y-Ablenkung. Die **Erde**-Einstellung dient zur Eichung der Nulllinie. Mit dem Positionsregler **Position** im Feld 1 können Sie bei dieser Kopplung die Nulllinie so verschieben, dass diese im Ursprung des Koordinatenkreuzes liegt. Dies ist dann wichtig, wenn

Gleichspannungen gemessen werden sollen, da in diesem Fall eine exakte Ausrichtung des Nullpunkts erforderlich ist.

Mit den Optionen **AC** **DC** legen Sie die Eingangskopplung fest. Möchten Sie beispielsweise, wie in Abbildung 27 dargestellt, eine Sinusspannung messen, die einen Gleichspannungsanteil besitzt, so ist dies nur bei der direkten Kopplung **DC** möglich. Bei der DC- Kopplung wird das Eingangssignal direkt, ohne weitere Beeinflussung, wie z.B. Filterung, an die y-Ablenkung gelegt. Möchten Sie bei dieser Kopplung quantitative Messungen durchführen, müssen Sie aber zuvor den Nullpunkt mit Hilfe der Kopplung **Erde** einstellen. Die Lage des Nullpunkts wird auf dem Monitor durch einen Pfeil der mit der entsprechenden Kanalnummer angezeigt (Abbildung 26 links) . In den meisten Fällen ist man aber nur an den Änderungen eines Signals interessiert, d.h. am Wechselspannungsanteil. Um nur diesen Anteil darzustellen muss die Option **AC**⁵ eingestellt werden. Bei dieser Kopplung wird zusätzlich ein Hochpassfilter zugeschaltet, der etwaige Gleichspannungsanteile ausfiltert. Bei der AC- Kopplung wird auf dem Oszilloskopschirm dann nur das Sinussignal ohne den Gleichspannungsanteil dargestellt (Abbildung 27 Mitte). Die für den Kanal gewählte Kopplung wird links unten am Monitor bei der Kanalinformation durch die Symbole = für DC bzw. ~ für AC angezeigt.

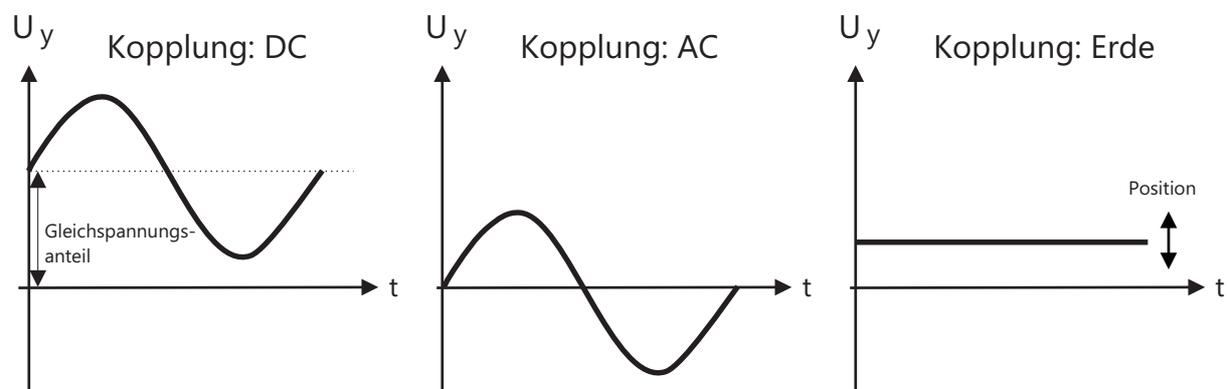


Abbildung 27: Auswirkungen der verschiedenen Eingangskopplungen. Bei der DC-Kopplung wird sowohl der Gleichspannungs- als auch der Wechselspannungsanteil auf dem Schirm angezeigt, während bei der AC-Kopplung nur der Wechselspannungsanteil des Eingangssignals dargestellt wird. In der GND-Einstellung wird die y-Ablenkung geerdet. Mit dem Positionsregler kann zur Festlegung des Nullpunkts die Nulllinie vertikal verschoben werden.

Mit dem Oszilloskop sollen Spannungspegel über mehrere Dekaden gemessen werden können. Sollen sehr kleine Spannungen dargestellt werden, so müssen diese verstärkt werden, damit der Spannungsverlauf möglichst den gesamten Bildschirm in y-Richtung ausfüllt. Bei der Darstellung von sehr hohen Spannungen müssen diese entsprechend abgeschwächt werden. Zu diesem Zweck ist nach der Eingangsbuchse eine interne Elektronik zwischengeschaltet, mit dessen Vorwahlschalter der y-Ablenkkoeffizient eingestellt werden kann. Diese Vorwahlschalter **SCALE** befinden sich im Bereich 1 in Abbildung 26 . Bei dem hier verwendeten Oszilloskop kann der Ablenkkoeffizient im Bereich von 2 mV/DIV bis 10 V/DIV eingestellt werden. Die aktuelle Einstellung wird am Bildschirm am unteren Rand angezeigt (Abbildung 26). Über dem Regler befindet sich ein weiterer Einstellregler **POSITION** mit dem Sie das Signal in vertikaler Richtung verschieben können.

Horizontalablenkung

Die Signallaufzeit in horizontaler Bildschirmrichtung kann mit dem Drehregler **Scale** im Feld 2 in Abbildung 26 eingestellt werden. Der Einstellbereich deckt einen Bereich von 5 ns bis 50 s ab. Der aktuell eingestellte Wert wird am Monitor am rechten unteren Rand angezeigt. Die Einstellung 50 μ s/DIV bedeutet, dass das Signal 50 μ s benötigt um ein Kästchen des Bildschirms in horizontaler Richtung zu durchlaufen.

⁵AC: alternating current (Wechselstrom), DC: direct current (Gleichstrom), ACDC: geniale Rockband.

Triggerung

Mit dem Einstellregler **LEVEL** im Feld 3 kann die Triggerschwelle stufenlos eingestellt werden. Beim Verändern der Schwelle wird die Triggerschwelle auf dem Bildschirm durch eine horizontale Linie angezeigt. Der aktuelle Wert ist zusätzlich rechts oben am Monitor zu sehen.

Mit der Taste **MENU** links unter dem Einstellregler der Triggerschwelle können Sie weitere Einstellungen der Triggerung auswählen. Im Menüeintrag **Zetablenkung** können Sie **Automatisch**, **Normal** oder **Einmalig** auswählen. Im Modus **Normal** erfolgt die Triggerung so wie es im Anhang des Versuchs 13 beschrieben wurde. Das Oszilloskop beginnt erst dann mit der Signalaufzeichnung, wenn das Eingangssignal eine bestimmte Schwelle, die Sie mit dem Einstellregler **LEVEL** einstellen können, überschreitet. Bei der automatischen Triggerung **Automatisch** stellt sich die Triggerschwelle automatisch auf die Spitze-Spitze-Amplitude des gerade angelegten Signals ein. Die automatische Triggerung funktioniert in vielen Fällen sehr zuverlässig und empfiehlt sich wegen der einfachen Bedienung bei allen unkomplizierten Messaufgaben.

Im Menüeintrag **Anstieg** können Sie die Triggerflanke einstellen (**steigend**, **fallend**).

Im Eintrag **Anstieg** wählen Sie die Triggerquelle aus. Sie können entweder auf Kanal 1, Kanal 2 oder auf ein externes Signal, welches an der zusätzlichen rechten Eingangsbuchse **EXT TRIG** anliegt, triggern.

Cursor

Im Bedienfeld 4 können Sie die Funktion **Cursor** aktivieren. Wählen Sie dazu im Untermenü **Modus** die Option **Manuell** aus. Im folgenden Feld **Typ** können Sie einstellen ob Sie das Signal horizontal, **X** oder vertikal, **Y** vermessen möchten. Durch betätigen des Drehreglers links oben im Bedienfeld, können Sie den Cursor verschieben. Durch drücken auf den Drehregler können Sie den anderen Cursor auswählen. Die Cursorwerte werden rechts oben im Bildschirm eingeblendet.

Storage

Im Bedienfeld 4 können Sie die Funktion **Storage** aktivieren um das Oszilloskopbild auf einen USB-Stick zu speichern. Stecken Sie den Speicherstick in die USB Buchse unterhalb des Bildschirms. Drücken Sie den Knopf **Storage** im Bedienfeld 4. Wählen Sie im Menü **Speicherung** mit dem Drehregler die Option **Bitmap** und bestätigen Sie dies durch drücken auf den Drehregler. Wählen Sie die Option **Extern** und anschliessend den Eintrag **Neue Datei**. Durch drücken auf **Speichern** wird das Bild als Bitmapdatei auf den Stick gespeichert.

Ausdruck

Die gespeicherten Daten können ausgedruckt werden. Beim Ausdrucken ist das **Bild zu invertieren**, da ansonsten der Hintergrund **vollständig schwarz** ist und die **Linie nicht mehr sichtbar**.

4.4 Versuch 14: Doppler-Sonographie

4.4.1 Relevante Begriffe und Gesetze

Als Hörschall bezeichnet man Schwingungen im Frequenzbereich zwischen 16 Hz und 20 kHz (> 20kHz: Ultraschall). Er pflanzt sich in Gasen und idealen Flüssigkeiten als *longitudinale Welle* fort. In festen Körpern sind auch *Transversalwellen* möglich.

Schallgeschwindigkeit

$$t = \frac{s}{c}$$

t	= Schalllaufzeit	: s
s	= Laufstrecke	: m
c	= Phasengeschwindigkeit der Schallwelle im Medium	: m/s

$$c = \lambda f$$

λ = Wellenlänge : m f = Frequenz : Hz = 1/s

Lautstärke, Lautstärkepegel

Die *Schallleistung*, gemessen in W, ist die gesamte von der Schallquelle (in alle Richtungen) abgestrahlte Leistung.

Die *Lautstärke I* (Schallintensität) beschreibt die Leistungsdichte einer auftreffenden Schallwelle und wird in W/m^2 gemessen.

Die *subjektive Empfindungsstärke* ist proportional dem dekadischen Logarithmus der objektiven Reizstärke (Gesetz von Weber-Fechner). Deshalb gibt man die Lautstärke häufig als relative Größe (Lautstärkepegel) an, gemessen in Phon. Phon ist keine Einheit. Es ist vielmehr die Bezeichnung für den dekadischen Logarithmus des Quotienten aus zwei Schallstärken. Der Nenner (I_0) ist ein Standardwert.

$$L[\text{phon}] = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

$$\text{mit } I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

Das Lautstärkenmaß Phon berücksichtigt, dass die Empfindlichkeit des Ohres frequenzabhängig ist. Die Lautstärke ist also frequenzabhängig, allerdings in keinem linearen Verhältnis. Bei 3 kHz ist das Ohr am empfindlichsten (Frequenz des Schreies eines Babys). So können 10 Phon bei niedrigen Frequenzen eine wesentliche höhere Schallintensität (absolut in W/m^2) sein als z.B. bei 3 kHz.

$$\text{Hörschwelle bei 1 kHz } I_h = 2.4 \cdot 10^{-12} \frac{W}{m^2} = 3.8 \text{ phon}$$

$$\text{Schmerzschwelle } I_s = 10 \frac{W}{m^2} = 130 \text{ phon}$$

Für den Vergleich der Lautstärke zweier Schallquellen benutzt man auch ihr Verhältnis in Dezibel (dB)

$$x[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1}$$

Abnahme der Intensität mit der Entfernung

Für Schallausbreitung im freien Raum (ohne Hindernisse, die zu Reflexion oder Beugung führen, und ohne Absorption) gilt $I \sim \frac{1}{r^2}$, d.h.

$$I_2 = \frac{I_1 r_1^2}{r_2^2}$$

I_1 = Intensität im Abstand r_1 von der Schallquelle

I_2 = Intensität im Abstand r_2

Achtung: Diese Beziehung gilt für die Schallintensität gemessen in W/m^2 , nicht für die Angabe in Phon oder dB!

Doppler-Effekt

Bewegen sich Sender und Empfänger einer Schallquelle in einem Medium relativ zueinander, so unterscheiden sich die Frequenzen von ausgesandter (f_S) und empfangener (f_E) Welle (*Doppler-Effekt*).

a) Sender in Ruhe:

Empfänger *nähert* sich mit der Geschwindigkeit v_E

$$f_E = f_S \left(1 + \frac{v_E}{c}\right)$$

Empfänger *entfernt* sich mit der Geschwindigkeit v_E

$$f_E = f_S \left(1 - \frac{v_E}{c}\right)$$

b) Empfänger in Ruhe:

Der Sender *nähert* sich mit der Geschwindigkeit v_S

$$f_E = \frac{f_S}{1 - \frac{v_S}{c}} = f_S \left(1 + \frac{v_S}{c} + \left(\frac{v_S}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_S}{c}\right)^3 + \dots\right)$$

Der Sender *entfernt* sich mit der Geschwindigkeit v_S

$$f_E = \frac{f_S}{1 + \frac{v_S}{c}} = f_S \left(1 - \frac{v_S}{c} + \left(\frac{v_S}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_S}{c}\right)^3 + \dots\right)$$

Anmerkung: Für kleine Geschwindigkeiten v_s können die quadratischen und höheren Glieder in der Reihenentwicklung vernachlässigt werden. Man erhält dann in beiden Fällen die gleichen Formeln $f_E = f_S(1 \pm \frac{v}{c})$, wobei v die Geschwindigkeit des in Bewegung befindlichen Senders (v_S) bzw. Empfängers (v_E) ist.

c) Reflexion an bewegter Grenzfläche:

Bei Ultraschalluntersuchungen sind Sender und Empfänger ortsfest, der Ultraschall wird jedoch an einer sich bewegenden Grenzfläche reflektiert. Dies benutzt man z.B. zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten im Blutkreislauf und von Bewegungen der Herzklappen. Dabei ist zu beachten, dass der Schall nicht senkrecht auf die Flussrichtung der Erythrozyten des Bluts trifft, an denen er reflektiert wird. Die beobachtete Frequenzänderung hat zwei Ursachen:

- i) Schall gelangt von einem Sender in Ruhe zu einem bewegten Empfänger
- ii) Das reflektierte Signal (Sender in Bewegung) gelangt zu einem ortsfesten Empfänger.

Insgesamt erhält man

$$v_{Blut} = \frac{f_S - f_E}{f_S + f_E} \frac{c}{\cos \beta}$$

für kleine Geschwindigkeiten ($v_{Blut} \ll c$) wird $f_S - f_E$ klein gegen f_S , so dass näherungsweise gilt:

$$v_{Blut} = (f_S - f_E) c / (2 f_S \cos \beta)$$

f_S = Frequenz des emittierten Ultraschalls

f_E = Frequenz des registrierten Ultraschalls

β = Winkel zwischen der Fließrichtung des Blutes und der Richtung des emittierten Ultraschalls.

4.4.2 Versuchsvorbereitung

Was man wissen sollte:

Wellen in verschiedenen Medien (longitudinale und transversale Wellen), Schallgeschwindigkeit, Schallausbreitung, stehende und fortschreitende Wellen, Reflexion von Wellen, Schallmessung (Intensität, Frequenz), Schallempfindung, Erzeugung und Nachweis von Ultraschall, Dopplereffekt, Funktionsweise eines Oszillographen, Lissajous-Figuren

Aufgaben als Teil der Vorbereitung:

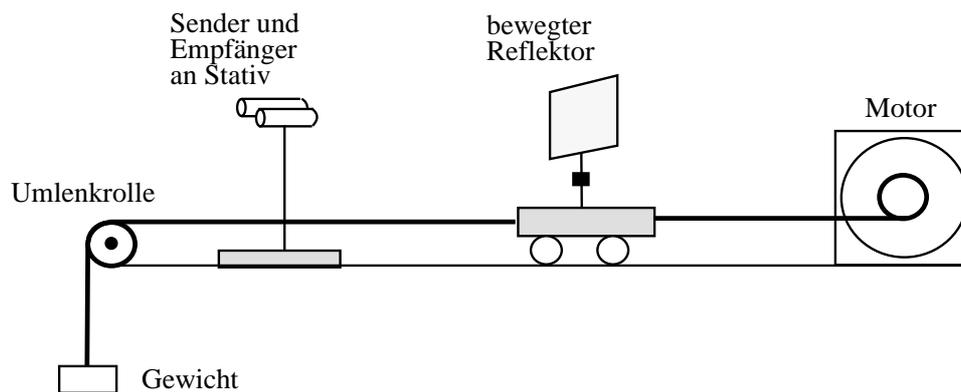
- Berechnen Sie die Schallintensität (W/m^2) und den Lautstärkepegel (Phon) von 15 Schallquellen mit einer Schalleistung von je 200 W im Abstand von 20 m. Dabei wird angenommen, dass sich der Schall kugelförmig ausbreitet und die 15 Schallquellen sich am selben Ort befinden.
- Eine Schallquelle ($f_s = 100\text{kHz}$) bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $v_s = 30\text{m}/\text{s}$ auf einen stationären Empfänger zu. Wie groß ist die Frequenzänderung in Luft von 30°C aufgrund des Doppler-Effekts?

4.4.3 Versuchsbeschreibung

Zubehör:

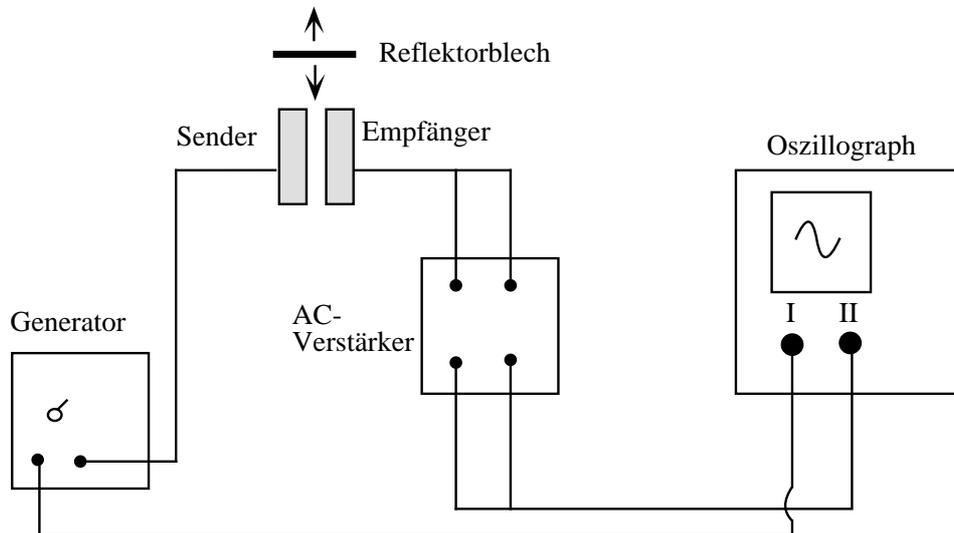
- 1 Oszillograph (siehe Versuch 13)
- 1 Sinusgenerator
- 2 Sende-/Empfangsköpfe auf Stativstangen montiert
- 1 Plexiglashalterung mit Bohrungen für die Ultraschallköpfe
- 1 AC-Verstärker
- 1 Getriebemotor mit Spannungsversorgung
- 1 Umlenkrolle, Schnur, Gewicht
- 1 Wagen mit aufgeschraubtem Reflektorblech
- 1 Stahllineal
- 1 Stoppuhr

Versuchsaufbau:



Eine von einem Frequenzgenerator erzeugte Wechselspannung wird auf einen Ultraschall Sende-/Empfängerkopf sowie auf Eingang CH1 eines Oszillographen gegeben. Der vom Sendekopf abgestrahlte Ultraschall wird von einem Reflektorblech, das auf einen Wagen montiert ist, reflektiert und von einem neben dem Sender befindlichen Empfängerkopf wieder in elektrische Schwingungen umgewandelt. Diese werden über

einen Verstärker auf den Eingang CH2 des Oszillographen geführt. Bewegt sich der Reflektor mit der Geschwindigkeit v_R gleichförmig entlang der Spiegelskala (also in oder entgegengesetzt zur Schallrichtung), so empfängt der Empfänger die dopplerverschobene Frequenz $f_s \pm \Delta f$. Berücksichtigt man Hin- und Rückweg des Schalls so gilt für kleine Geschwindigkeiten v näherungsweise: $\Delta f = \pm 2f_s v_R/c$ ($c =$ Schallgeschwindigkeit). Schaltet man den Oszillographen auf x-y Betrieb, so erscheint auf dem Schirm eine sogenannte Lissajous-Figur, die sich gerade mit der Frequenz Δf "dreht".



Versuchsdurchführung:

a) Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft

Bauen Sie die Schaltung nach obigem Schaltbild auf. Beobachten Sie nun zunächst, wie sich das Oszillographenbild verändert, wenn Sie den Abstand zwischen Reflektor und Sender/Empfänger verändern. Schieben Sie nun das Empfängersignal aus dem sichtbaren Bereich des Bildschirms. Bestimmen Sie an Hand der Schwingungen pro Zeitintervall die Frequenz des Frequenzgenerators. Holen Sie jetzt das Empfängersignal zurück und fahren Sie den Wagen mit dem Motor so, daß Sender- und Empfängersignal sich gerade überdecken, also Phasendifferenz Null haben, und notieren Sie die Position des Wagens. Machen Sie sich klar, dass eine Verschiebung des Empfängerbildes gegen das Senderbild um eine Periode gleichbedeutend mit einer Änderung des Abstandes Reflektor-Sender/Empfänger um eine halbe Wellenlänge $\lambda/2$ ist. Fahren Sie nun den Wagen entlang der Skala und notieren Sie seine Position, wenn sich der Empfänger um 10, 15, 20, 25 und 30 Perioden gegenüber dem Sender verschoben hat. Notieren Sie zusätzlich die Zimmertemperatur.

b) Bestimmung der Fahrgeschwindigkeit des Wagens mit Hilfe des Dopplereffekts

Stellen Sie nun den Oszillographen auf x-y Betrieb, indem Sie die Taste "Hor.ext" drücken und schalten Sie den Motor ein. Messen Sie 10x die Zeit für 20 Umdrehungen der Lissajous-Figur. Messen Sie zum Vergleich 10x die Zeit, die der Wagen braucht, um 10 cm zurückzulegen, so daß Sie seine Geschwindigkeit auch direkt ermitteln können.

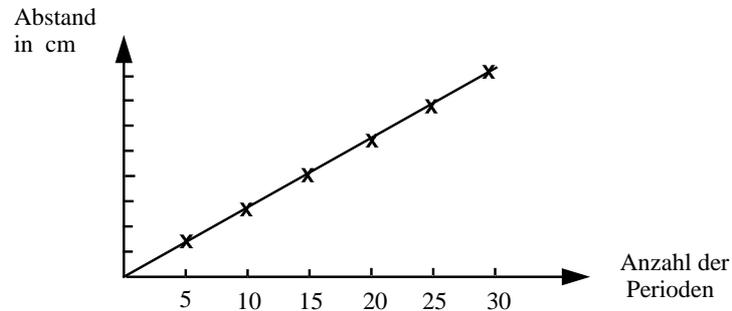
4.4.4 Aufgabenstellung

- Bestimmen Sie die Schallgeschwindigkeit in Luft durch einen Phasenvergleich von Empfängersignalen bei verschiedenen Schallaufstrecken.
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit eines Wagens mit Hilfe des Dopplereffekts.

4.4.5 Zur Auswertung und Protokollierung

Auswertung:

- a) Tragen Sie die Strecken, die Sie den Wagen bewegt haben, in einem Diagramm gegen die zugehörigen Vielfachen der Wellenlängen auf, wie es in der folgenden Figur dargestellt ist.



- b) Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Diagramms die Wellenlänge λ der Sinusschwingung.
c) Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Luft nach $c = \lambda f_S$, wobei f_S die von dem Sinusgenerator erzeugte Frequenz ist.
d) Vergleichen Sie Ihren Messwert mit dem erwarteten Wert der Schallgeschwindigkeit, für deren Temperaturabhängigkeit gilt:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

Dabei ist $c_0 = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ die Schallgeschwindigkeit bei 0°C .

- e) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Wagens aus der Drehfrequenz Δf der Lissajous-Figur mit Hilfe von:

$$\Delta f = \frac{N}{t} = 2f_S \frac{v_R}{c}$$

$$N = \text{Anzahl der Drehungen}$$

und aus der direkten Messung :

$$v = \frac{s}{t}$$

Benutzen Sie jeweils den Mittelwert Ihrer Messungen.

4.4.6 Anwendungsbeispiele aus der Medizin

- Hörvorgang: Der Hörvorgang ist ein kompliziertes System aus mechanischer Verstärkung und elektro-physiologischer Detektion. Eine Schallwelle trifft auf das Trommelfell. Die Trommelfellschwingung wird über die Gehörknöchelchen (Hebelgesetz) verstärkt. Die Flüssigkeit im Innenohr nimmt die Schwingung auf und trägt sie längs der Basiliarmembran. Hier findet eine Zerlegung in die Grundfrequenzen des Schallsignals statt (Fourier-Analyse).
- Subjektive Schallempfindung.
- Messung des Hörbereichs nach Frequenz und Hörschwelle (Audiometrie).
- Anwendung von Ultraschall in Diagnose und Therapie: Bei der Ultraschalldiagnose nutzt man aus, dass verschiedene Gewebe, Knochen, Blut usw. jeweils eine unterschiedliche Schallgeschwindigkeit für das Ausbreiten eines Schallsignals zeigen. An den Grenzflächen zwischen Körperorganen mit unterschiedlicher Schallgeschwindigkeit wird ein gewisser Anteil der Intensität des Schallsignals reflektiert. Aus der Laufzeit zwischen Senden des Ultraschallsignals und Empfangen des reflektierten Anteils wird dann der Grenzwert eines Bildpunktes berechnet, so dass ein Bild am Computermonitor entsteht.
- Doppler-Effekt: Messung von Strömungsgeschwindigkeit im Blutkreislauf. Kombiniert man Ultraschall mit Doppler-Effekt so kann man in der Doppler-Sonographie die Strömungsrichtung und -geschwindigkeit von Blut in Gefäßen oder dem Herz bestimmen. Ein sogenannter Farb-Doppler kodiert das Hin- oder Wegströmen des Bluts vom Sender in einer farbigen Darstellung.
- Resonanzphänomene beim Beklopfen der Körperfläche
- Richtungshören: Beim Richtungshören nutzt man die Laufzeitverschiebung eines Schallsignals beim unterschiedlichen Auftreffen auf beide Ohren aus.
- Umgang mit Oszillographen: Oszillographen dienen in der modernen Medizin bei vielfältigen Messgeräten, z.B. um die Schwingungsverläufe des Herzschlages zu messen.

Anhang

Funktionsweise eines Oszillographen

Der Oszillograph dient dazu, eine Spannung als Funktion der Zeit oder eine Spannung als Funktion einer anderen Spannung auf einem Bildschirm aufzuzeichnen. Sein Blockschaltbild, in dem die Braunsche Röhre, sowie die elektronischen Bestandteile schematisch dargestellt sind, ist in der Figur 1 wiedergegeben. Zu weiteren Erläuterungen sowie einer Beschreibung der Handhabung siehe Versuch 13.

4.5 Versuch 15: Strömungsgesetze des Blutkreislaufs

4.5.1 Motivation

Physikalische Phänomene bestimmen wesentlich das Funktionieren des Blutkreislaufs des Menschen. Blut besteht aus zellulären und flüssigen Bestandteilen, beschrieben durch den Hämatokrit-Wert. Genau genommen bezeichnet der Hämatokrit den Anteil der Erythrozyten am Volumen des Blutes. Da die Erythrozyten physiologisch 99% des Gesamtvolumens der Blutzellen darstellen, entspricht der Hämatokrit-Wert ungefähr dem Anteil des Zellvolumens am Blutvolumen. Blut ist keine Newtonsche Flüssigkeit (bei der die Viskosität nur durch innere Reibung bestimmt wird), sondern eine rheopexe Flüssigkeit, d.h. die Viskosität nimmt mit dem Druck bzw. der mechanischen Belastung zu. Dieses Verhalten führt bei Bluthochdruck zu einem negativen Regelkreis, bei dem der Blutdruck aufgrund der steigenden Viskosität immer weiter bis zur Herzüberlastung gesteigert werden kann.

Bei einem gesunden Menschen folgt die Strömung im Blutkreislauf, außer direkt hinter den Herzklappen, den Gesetzen der laminar strömenden Flüssigkeiten (Bernoulli-Gleichung, Hagen-Poiseuille-Gesetz). Dies bedeutet, dass idealerweise die Strömungsgeschwindigkeit am Rand gegen 0 geht, während sie im Zentrum des Stroms maximal ist. Über die Bernoulli-Gleichung stehen stets der Druck auf die Gefäßwand und die Strömungsgeschwindigkeit in einem festen Bezug zueinander. Verengt sich das Gefäß, steigt die Strömungsgeschwindigkeit an und der Druck auf die Gefäßwand nimmt ab. Dies kann bei Gefäßstenosen zu weiteren Verengungen bis zum Verschluss führen. Aufgrund des Hagen-Poiseuille-Gesetzes rufen bereits geringfügige Gefäßverengungen erhebliche Änderungen im Strömungswiderstand hervor, da der Gefäßradius hier mit der vierten Potenz eingeht. Der gesunde Organismus reguliert dieses Problem in dünnen Kapillaren, indem er durch Änderung der Zusammensetzung der Blutsuspension die Viskosität anpassen kann.

Bei pathologischen Veränderungen wie z.B. Thrombosen kann es an Engstellen durch den Anstieg der Strömungsgeschwindigkeit zu einem Übergang von laminarer Strömung zur turbulenten Strömung kommen. Durch die dabei entstehende Wirbelbildung kommt es zu einer zusätzlichen Herzbelastung, da das Herz durch Pumpen die zusätzlich Energie liefern muss, die die Wirbel zur Drehung benötigen. Diese Energie trägt dabei aber nicht zum linearen Transport des Blutes bei.

4.5.2 Relevante Begriffe und Gesetze

Der folgende Versuch beschäftigt sich mit stationäre Strömung, laminare und turbulente Strömung, Kontinuitätsgleichung, Bernoullische Gleichung, Gesetz von Hagen-Poiseuille, Strömungsgeschwindigkeit, Strömungswiderstand, statischer und dynamischer Druck, Druckskalen, Viskosität und Fluidität. Die Strömungsmessung wird mit Ultraschall unter Ausnutzung des Dopplereffekts durchgeführt.

Strömungsgesetze:

In einer stationären Strömung gilt die Kontinuitätsgleichung:

$$(1) \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q = \text{const.}$$

mit v_1, v_2 mittlere Geschwindigkeit in den Rohren 1 und 2. A_1, A_2 Querschnitt der Rohre 1 und 2.

Bernouillgleichung:

$$(2) \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = p_0 \quad (\text{allgemeine Form mit } p_0 = \text{const.})$$

bzw. für horizontales Rohr:

$$(2a) \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0,$$

d.h. die Summe von statischem Druck (p) und Staudruck (hydrodynamischen Druck) ist konstant.

Ohmsches Gesetz für strömende Medien (laminarer Fluss):

$$(3) \quad \Delta p = R Q$$

mit Δp dem Druckgefälle längs des durchströmten Rohrs der Länge l und der Flussrate $Q = A v$ (A = Querschnittsfläche des Rohrs, v = mittlere Strömungsgeschwindigkeit).

Aus dem Hagen-Poiseuille Gesetz für den Volumenfluss $\Delta V/\Delta t$:

$$(4a) \quad \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi \Delta p r^4}{8 \eta l}$$

ergibt sich R , der Strömungswiderstand eines Rohres der Länge l , des Radius r , welches von einer Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität η durchströmt wird:

$$(4b) \quad R = \frac{8 l}{\pi r^4} \eta$$

Die Grundaussage des Gesetzes von Hagen-Poiseuille ist die starke Abhängigkeit des Strömungswiderstandes vom Rohrdurchmesser:

$$(4c) \quad R \propto \frac{1}{r^4}$$

Bei der laminaren (Hagen-Poiseuilleschen) Strömung ist der Druckverlust proportional zur Strömungsgeschwindigkeit (Flussrate). Bei der turbulenten Strömung ist der Strömungswiderstand R von der Strömungsgeschwindigkeit abhängig und der Druckverlust in etwa proportional dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit.

Die Reynoldszahl gibt Auskunft über Laminarität oder Turbulenz:

$$(5) \quad \text{Re} = \frac{v_{\text{mean}} \rho d}{\eta}$$

Für die Rohrströmung ist die geometrische Größe d gleich dem Rohrdurchmesser. Die kritische Reynoldszahl für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung beträgt etwa 2320. Bei einem gesunden Menschen beträgt die Reynoldszahl in der Aorta ca. 350, in Arterien bis zu 500 und in Venen bis zu 1500.

Bei laminarer Rohrströmung ist das Verhältnis von mittlerer Strömungsgeschwindigkeit v_{mean} und maximaler Strömungsgeschwindigkeit v_{max} etwa 1:2. Für turbulente Strömung geht das Verhältnis auf ca. 1:1,25 zurück.

Zusammenhang der Druckeinheiten (Druckskalenmessung):

Der an der Druckskala abgelesene Wert in cm Flüssigkeit lässt sich über die Dichte der Flüssigkeit und die Erdbeschleunigung g in SI-Einheiten umrechnen.

$$(6) \quad \Delta p \text{ [Pa]} = \frac{\Delta p \text{ (mmFlüssigkeit)}}{1000} \rho_{Fl} g$$

Ultraschall-Doppler-Messung (siehe auch Versuch 14):

Trifft eine Ultraschallwelle der Frequenz f_0 auf ein sich bewegendes Objekt, verursacht diese eine Frequenzverschiebung $\Delta f = f_0 - f_E$ ($f_0 = f_S$ gesendete Frequenz, f_E empfangene Frequenz) entsprechend dem Doppler-Effekt. Für eine kleine Bewegungsgeschwindigkeit v des Objektes gegenüber der Schallgeschwindigkeit c im Medium gilt:

$$(7) \quad \Delta f = f_0 \frac{v}{c} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

Dabei sind α und β die Winkel zwischen v und der Ausbreitungsrichtung der Ultraschallwelle. Für ein Impuls-Echo-System mit einem Ultraschallsender=Empfänger in einem Schallkopf muss daher $\alpha = \beta$ und damit:

$$(8) \quad \Delta f = 2 f_0 \frac{v}{c} \cos \alpha$$

Aus dem Brechungsgesetz (siehe auch Versuch 16) $\frac{\sin \alpha_P}{\sin \alpha_L} = \frac{c_P}{c_L}$, das nicht nur für Lichtwellen sondern auch für Schallwellen gilt, ergibt sich der Dopplerwinkel bei der Messung mit dem Prisma zu:

$$(9) \quad \alpha = 90^\circ - \arcsin \left(\sin \alpha_P \frac{c_L}{c_P} \right) \quad \text{mit}$$

α_P – Einschallwinkel im Prisma, α_L – Einschallwinkel in der Flüssigkeit nach Brechung an der Grenzfläche zwischen Prisma und Flüssigkeit, c_P – Schallgeschwindigkeit im Prisma zur Einkopplung, c_L – Schallgeschwindigkeit in der Flüssigkeit

Damit und mit der Dopplergleichung (8) lässt sich die mittlere Geschwindigkeit der Strömung berechnen.

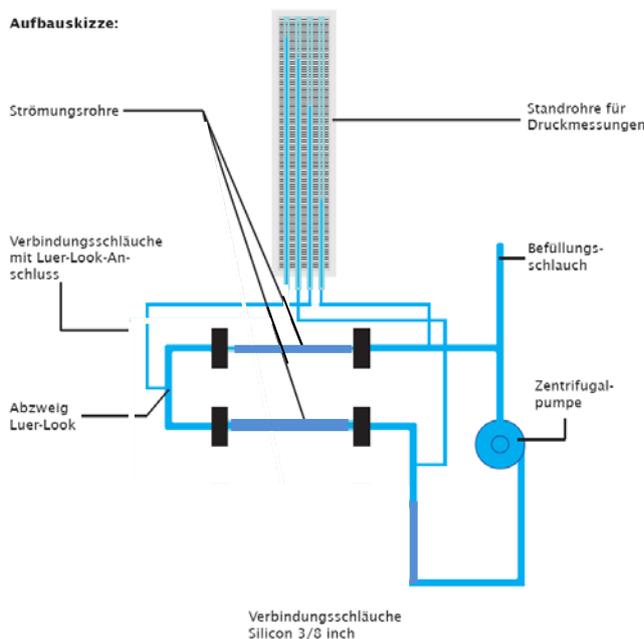
4.5.3 Versuchsprinzip und Aufgaben

Der Versuch nutzt eine Flüssigkeit („Blutersatz“), die eventuell Assoziationen zur Blaublütigkeit alter Adelsgeschlechter erweckt, was aber im weiteren nicht von Bedeutung sein soll. Wie Blut besteht die Flüssigkeit aus einer flüssigen Phase mit partikulären Bestandteilen, an denen wie bei den Zellen im Blut die Ultraschallwelle reflektiert wird. Der Ultraschall-Dopplereffekt wird benutzt, um die grundlegenden

Gesetzmäßigkeiten stationär laminar strömender Flüssigkeiten in einem Schlauchkreislauf zu untersuchen. Insbesondere wird der Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Schlauchfläche (Kontinuitätsbedingung) sowie des Strömungswiderstandes und Schlauchdurchmesser (Gesetz von Hagen-Poiseuille) experimentell überprüft. Aus beiden Gesetzmäßigkeiten kann bei bekannter Geometrie die dynamische Viskosität bzw. Fluidität bestimmt werden.

1. Bestimmen Sie die mittlere und maximale Dopplerfrequenzverschiebung (f_{mean} , f_{max}) für 4 verschiedene Pumpgeschwindigkeiten mit dem Ultraschall-Doppler-Gerät für die 2 verschiedenen Rohrdurchmesser. Vergleichen Sie hierbei das Verhalten der Dopplerfrequenzverschiebung bei Messung gegen und mit der Strömungsrichtung.
2. Berechnen Sie die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten nach dem Dopplergesetz und die Flussraten mit dem bekannten Rohrquerschnitt nach der Kontinuitätsgleichung.
3. Messen Sie mit Hilfe der Steigrohre den Druckabfall für die verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten und Rohrdurchmesser.
4. Berechnen Sie den Strömungswiderstand nach dem Ohmschen Gesetz aus Druckabfall und Flussrate. Untersuchen Sie die Abhängigkeit des Strömungswiderstandes vom Rohrdurchmesser (Gesetz von Hagen-Poiseuille).
5. Berechnen Sie die dynamische Viskosität aus dem Gesetz von Hagen-Poiseuille und den bekannten geometrischen Verhältnissen.
6. Berechnen Sie aus den Strömungsgeschwindigkeiten die Reynoldszahl für die verschiedenen Rohrdurchmesser und treffen Sie eine Aussage zum Strömungsverhalten in den einzelnen Rohren.

4.5.4 Versuchsaufbau und Durchführung



Aufbau des Strömungssystems:

Das Strömungssystem besteht aus 2 Strömungsrohren unterschiedlicher Durchmesser. Die Reihenfolge der Rohre ist in Flussrichtung gesehen: Rohr 1 (Außendurchmesser =15mm, Wandstärke =2,5mm) und Rohr 2 (Außendurchmesser =10mm, Wandstärke =1,5mm). Diese Rohre sind mit zwei Schlauchstücken (Länge 30cm, Innendurchmesser 10mm) untereinander verbunden. In der Mitte dieser Schlauchverbindungsstücke befinden sich die Abgänge zum Anschluss an die Steigrohre zur Druckmessung. Die Verbindung zur Pumpe erfolgt über zwei weitere Schlauchstücke (Innendurchmesser 10mm). Die drei Steigrohre sind von links nach rechts in der

Reihenfolge der Flussrichtung mit den Schläuchen verbunden (siehe Skizze). Das vierte Rohr ist unbenutzt. Die Hähne sollen normalerweise auf Durchlass stehen.

Achtung:

Schläuche so legen, dass sie nicht geknickt oder gedrückt werden, um zusätzliche Strömungswiderstände zu vermeiden. Achten Sie darauf, dass keine Luftblasen in der Flüssigkeit sind. Luftblasen verursachen ein sehr starkes Ultraschallsignal was zum Übersteuern des Doppler-Messgerätes und damit zur Verfälschung des Messergebnisses führen kann. Sollten sich Partikel in den Rohren abgelagert haben, bitten Sie den Assistenten die Rohre zu spülen.

*Vor dem Einschalten der Pumpe ist unbedingt darauf zu achten, dass die Drehzahleinstellung der Zentrifugalpumpe bis zum Anschlag **gegen** den Uhrzeigersinn gedreht ist. Bei hohen Strömungsgeschwindigkeiten steigt der Druck im Schlauchsystem zu stark an, so dass die Flüssigkeitssäule der Druckskala das Maximum überschreiten kann.*

Bestimmung des statischen Druckes:

Die Druckmessstellen sind an Orten gleichen Rohrdurchmessers und damit für laminare Strömungen gleicher Strömungsgeschwindigkeit angebracht, um den Druckabfall zwischen den einzelnen Messpunkten direkt über die Änderung im statischen Druck messen zu können. Für die Druckmessungen wird für jede Flusseinstellung der Skalenwert an den Steigrohren abgelesen. Dieser entspricht dem statischen Druck in Einheiten cm Flüssigkeitssäule.

Hinweis zur Fehlerberücksichtigung: Durch Ablagerung der Streupartikel kann es in den Steigrohren zu Konzentrationsunterschieden kommen. Dies führt durch den osmotischen Druck zu unterschiedlichen Flüssigkeitsständen in den Rohren, die vor der Druckmessung (ohne Fluss) bestimmt und entsprechend abgezogen werden müssen.

Anbringen der Dopplerprismen:

Die Messung der Strömungsgeschwindigkeit erfolgt mit dem Ultraschall-Doppler FlowDop und den Dopplerprismen. Dazu wird das Dopplerprisma auf das jeweilige Rohr aufgesetzt. Die Stelle, an der das Prisma aufgesetzt wird, sollte sich nicht direkt hinter dem Rohreinlass befinden, da sich dort Wirbel und Turbulenzen in der Strömung bilden können, welche die Messergebnisse beeinflussen können. *Überprüfen Sie diesen Effekt, indem Sie das Dopplerprisma auf den Röhren verschieben.*

Für die Rohre mit Durchmesser 10mm und 15mm ergibt eine Messung in der Rohrmitte bis Rohrende (Strömungsausgang) die besten Ergebnisse. Vor dem Aufsetzen des Prismas wird auf die gewölbte Innenfläche ein Ultraschallgelfilm aufgetragen. Dies ist notwendig, um eine gute akustische Kopplung zwischen dem Prisma und dem Schlauch zu erreichen. Das Prisma wird auf das entsprechende Rohr gesetzt und durch leichtes Drehen und Schieben der Gelfilm gleichmäßig und Blasenfrei verteilt.

Im nächsten Schritt werden die Oberfläche des Ultraschall-Wandlers bzw. die entsprechenden Winkelflächen des Prismas ebenfalls mit Gel benetzt. Während der Messung sollte sich immer genug Gel zwischen Wandler und Prisma befinden, um ausreichende Signalintensitäten zu gewährleisten. *Für die Messungen der Strömungsgeschwindigkeit wird die 30° geneigte Fläche des Dopplerprismas gegen die Strömungsrichtung genutzt (bestes Verhältnis von Signalintensität und Dopplerwinkel für alle hier verwendeten Rohrdurchmesser und Flussraten). Betrachten Sie zum qualitativen Vergleich den Effekt des anderen Prismenwinkels in Richtung der Strömung.*

Zentrifugalpumpe

Nach Einstellen einer bestimmten Pumpgeschwindigkeit muss bis zur Messung eine gewisse Zeit gewartet werden, damit die Strömung stationär wird. Dazu wird die Pumpe im Mode M0 verwendet. Mit den Tasten „START“ und „STOP“ kann die Strömung erzeugt bzw. angehalten werden, der Drehregler auf der rechten Seite bestimmt die Flussgeschwindigkeit. Es empfiehlt sich, vor dem Start einer Messung den Drehregler auf Linksanschlag (Minimum) zu drehen und erst nach dem Drücken der Start-Taste langsam die Drehzahl zu erhöhen (s.a. Safety instructions).

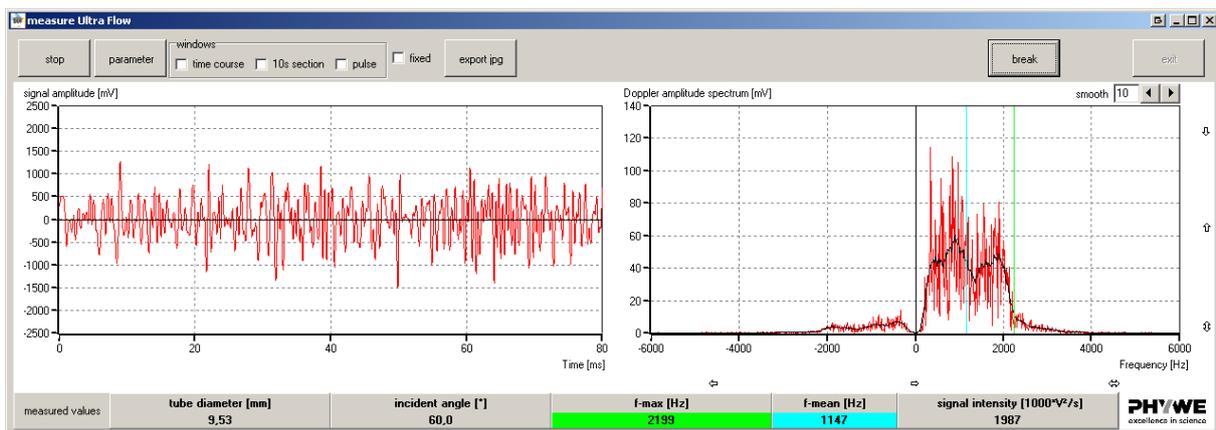
Ultraschall-Doppler-Gerät

Für die Messungen wird eine 2 MHz-Ultraschallsonde verwendet. Diese wird mit dem Dopplergerät verbunden. Am Frequenzwahlschalter wird die verwendete Wandlerfrequenz von 2 MHz eingestellt. Wichtig ist die Einstellung des Schalters „Sample Volume“. Für die Messung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit muss dieser Schalter in der Stellung „Large“ sein (bei „Small“ werden Signale nur aus einem kleinen Teil des Schlauches gemessen). Mit dem Regler „Power“ kann die Sendeleistung variiert werden, „Gain“ regelt die Empfangsverstärkung. „Power“ und „Gain“ sollten immer so eingestellt sein, dass die in der Software angezeigte Signalintensität hoch genug, aber nicht übersteuert ist. Hier empfiehlt sich „Power“=HIGH und „Gain“=20dB zu benutzen. Wenn möglich sollte es vermieden werden, während einer Messung die Einstellungen zu ändern. Mit dem „Audio Volume“ Regler kann man die Lautstärke des akustischen Messsignals regeln.

Hinweis: Verstärkung am Doppler so einstellen, dass Signal nicht übersteuert wird, da es sonst zu Fehlern in der Frequenzermittlung kommt. Stets darauf achten, dass die Gelkopplung d.h. genügend Gel zwischen Schallkopf und Prisma und Prisma und Rohr vorhanden ist.

Software

Die Software liest die Messdaten vom Ultraschall-Doppler-Gerät aus und stellt sie graphisch dar. Im linken Fenster werden die aktuellen Streuintensitäten dargestellt, im rechten Fenster das Spektrum dieser Daten. Aus dem Spektrum werden zwei Frequenzwerte f_{mean} und f_{max} ermittelt und angezeigt. Aus diesen können nach dem Dopplergesetz bei bekannten geometrischen Verhältnissen die mittlere und maximale Strömungsgeschwindigkeit berechnet werden.



Versuchsdurchführung:

- An der Zentrifugalpumpe werden vier verschiedene Flussgeschwindigkeiten eingestellt (entsprechend 20%; 30%; 40% und 50% der maximalen Umdrehungszahl). Zu jeder Geschwindigkeit werden die mittleren und maximalen Frequenzverschiebungen f_{max} und f_{mean} bei allen Rohren mit dem Ultraschall-Doppler-Gerät gemessen und die Anzeigen der Steigrohre abgelesen.

- b) Skizzieren Sie die Messanordnung von Schallkopf und Prisma mit den relevanten Winkeln α_p und α_L und verifizieren Sie mit Hilfe des Brechungsgesetzes Formel (9)

Maßangaben zum Rohrsystem:

Rohrlänge (R1, R2): 300mm

Zwischenschlauchstücklänge: 300mm (je 150mm von Rohr bis Druckmessabgang)

Innendurchmesser Zwischenstück: 10mm

Eigenschaften der Blutersatzflüssigkeit:

Schallgeschwindigkeit c_L : 1800 m/s

Viskosität η : 12 mPa s

Dichte ρ : 1,2 g/cm³

Eigenschaften der Dopplermesseinheit:

Schallgeschwindigkeit im Einkoppelprisma c_p : 2700 m/s

Dopplerfrequenz f_0 : 2,0 MHz

Einstrahlwinkel des Prismas: 30°

4.5.5 Auswertung und Diskussion

- a) Beschreiben Sie den Effekt der Dopplerfrequenzverschiebung, wenn Sie die Einstrahlrichtung des Schalls und den Einkoppelwinkel ändern
- b) Berechnen Sie aus den geometrischen Größen die Querschnittsflächen der Röhren.
- c) Berechnen Sie nach Gleichung (9) den Dopplerwinkel.
- d) Bestimmen Sie für die Rohre v_{\max} , v_{mean} , und das Verhältnis v_{\max}/v_{mean} . Wie gut sind die Bedingungen für Laminarität erfüllt?
- e) Berechnen Sie die Flussraten Q für die Rohre und stellen Sie sie graphisch gegen die Pumpleistung dar.
- f) Berechnen Sie aus den Messungen des Statischen Drucks die Druckdifferenzen Δp längs der beiden Rohre und die jeweiligen Rohrwiderstände nach Gleichung (3):

Zur Ermittlung des Druckabfalls über den Rohrabschnitten, wird angenommen, dass der Druckabfall über den Schlauchabschnitten mit Verbindung zu Standrohren (Messabschnitte) auf Grund der ähnlichen Geometrien ungefähr dem Druckabfall über Rohr 1 entspricht.

- f) Bestimmen Sie mit Hilfe von Gleichung (4) die Viskosität der Flüssigkeit in Abhängigkeit von Flussrate und berechneten Rohrwiderstand und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem oben genannten Wert. Ab welchen Flussraten tritt eine Änderung der Viskosität ein? Erfüllen die Rohre die Voraussetzungen für das Hagen-Poiseuille Gesetz?
- h) Berechnen Sie die Reynoldszahlen für die unterschiedlichen Pumpgeschwindigkeiten. Sind die Bedingungen für Laminarität erfüllt?

4.6 Versuch 16: Temperaturmessung



Abbildung 28: Aufbau des Versuchs Temperaturmessung.

4.6.1 Messaufbau

- Pyrometer
- Pt100-Thermometer (Klasse B)
- Konstantstromquelle 1 mA
- Gasthermometer
- Topf für Temperaturbad
- Thermoelement für hohe Temperaturen (PtRh) mit Eich-tabelle
- Multimeter
- Butangas-Bunsenbrenner

4.6.2 Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Temperatur, absoluter Nullpunkt, Gasgesetze, Zustandsänderungen des idealen Gases, reale Gase, van der Waals- Gleichung, Thermoelement.

Verständnisfragen:

1. Was ist Wärme, was ist Temperatur?

2. Was für Thermometer gibt es? Auf welchen physikalischen Prinzipien beruhen sie? Welche Vor- oder Nachteile bei der Anwendung ergeben sich daraus?
3. Wie funktioniert ein Gasthermometer? Warum ist dieses Thermometer für eine absolute Temperaturmessung gut geeignet? Kann man ein beliebiges Gas nehmen? Bis zu welchen Temperaturen halten Sie ein Gasthermometer für geeignet- welches Gas würden Sie also nehmen?
4. Als Temperaturfixpunkte werden die Temperatur des kochenden Wassers und die Schmelztemperatur des Eises (Eis-Wassermischung) genommen, die relativ leicht realisiert werden können. Von welchen äußeren Parametern hängen diese Fixpunkte ab?
5. Welche prinzipielle Möglichkeit zur Festlegung der Temperatur, unabhängig von einer Arbeitssubstanz, gibt es?
6. Wie funktioniert ein Thermoelement?
7. Wie lässt sich die Oberflächentemperatur von Sternen bestimmen? Wie unterscheiden sich die Spektren von Sirius ($T \approx 10000 \text{ K}$) und der Sonne ($T \approx 6500 \text{ K}$)?

4.6.3 Aufgaben

- Temperaturmessung mit Hilfe eines Gasthermometers und eines Platin- Widerstandsthermometers im Bereich zwischen dem Schmelz- und Siedepunkt von Wasser.
- Messungen mit einem Infrarot- Thermometer im Bereich von 0°C bis 100°C .
- Als typische Anwendung eines Thermoelementes wird mit dem PtRh-Element die Temperaturverteilung einer Bunsenbrennerflamme gemessen.

4.6.4 Grundlagen

Der thermische Zustand eines Stoffes wird durch die Temperatur charakterisiert. Zur Messung dieser Größe benutzt man Instrumente (Thermometer), die die Temperaturabhängigkeit verschiedener physikalischer Größen ausnutzen. Dazu gehören zum Beispiel Ausdehnungsthermometer (Flüssigkeitsthermometer, Gasthermometer), deren Prinzip auf die Temperaturabhängigkeit des Volumens eines Stoffes beruht. Eine weitere große Klasse von Thermometern sind Widerstandsthermometer wie Platin-Thermometer oder Halbleiterthermometer (NTC, PTC). Bei diesen hängt der elektrische Widerstand von der Temperatur ab. Thermoelemente bestehen aus zwei unterschiedlichen, miteinander verlöteten Metalldrähten. Zwischen den Anschlüssen liegt eine elektrische Spannung an, die von der Temperaturdifferenz der Kontaktstelle und den Anschlussenden abhängt. In diesem Versuch werden Sie auch Messungen mit einem Pyrometer durchführen. Solch ein Thermometer misst die von einem Körper ausgehende „Wärmestrahlung“, die von der Temperatur abhängt.

Weltweit gibt es verschiedene Temperaturskalen wie z.B. Celsius oder Fahrenheit, die auf zwei unterschiedlichen Fixpunkten aufbauen. Bei der Celsiusskala sind dies der Schmelz- und der Siedepunkt von Wasser. Der untere Fixpunkt der Fahrenheitskala entspricht der Temperatur einer speziellen Kältemischung, der obere Fixpunkt der „Körpertemperatur eines gesunden Menschen“. Solche Definitionen sind nicht besonders gut reproduzierbar. Aus physikalischer Sicht gibt es nur eine Temperaturskala, die sich aus dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ableiten lässt: Die thermodynamische Temperaturskala oder die Kelvinskala.

Die derzeit gültige internationale Temperaturskala wurde 1990 (ITS-90) festgelegt. Sie definiert spezielle Temperaturfixpunkte im Bereich von $0,65 \text{ K}$ bis 2200 K . Zwischen diesen Temperaturwerten wird mittels definierter Thermometer interpoliert, die zuvor an den Fixpunkten kalibriert wurden. Zu diesen gehören insbesondere die Platin- Widerstandsthermometer (Messbereich ca. 10 K bis ca. 1200 K), das He-Gasthermometer und das He-Dampfdruckthermometer für Temperaturen kleiner als 30 K , sowie im Hochtemperaturbereich die Strahlungsthermometer.

4.6.5 Das Gasthermometer

Das Funktionsprinzip eines Gasthermometers lässt sich mit Hilfe der Idealen Gasgleichung beschreiben:

$$pV = NkT, \quad (21)$$

wobei p den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur, N die Teilchenzahl und k die Boltzmann-Konstante darstellen.

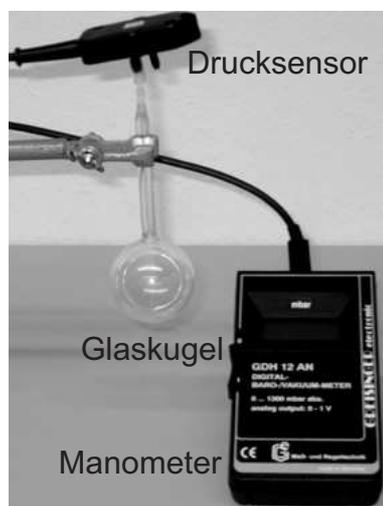


Abbildung 29: *Aufbau eines Gasthermometers.*

Befindet sich ein Gas in einem abgeschlossenen Behälter, so kann bei konstant gehaltenem Volumen die Temperatur des Gases durch eine Druckmessung bestimmt werden (Gesetz von Amontons):

$$T \propto p \quad \text{für} \quad V = \text{konstant.} \quad (22)$$

Den Aufbau des im Praktikum eingesetzten Gasthermometers ist in Abbildung 29 dargestellt. Es besteht aus einem mit Luft gefüllten Glasballon, der über eine Kapillare mit einem elektrischen Manometer verbunden ist.

Die Genauigkeit, mit der die Temperatur gemessen werden kann, hängt von der Konstanz des Volumens und dem verwendeten Gas ab. Dabei müssen zwei systematische Fehler berücksichtigt werden. Zum einen dehnt sich der Glasballon bei Erwärmung aus, wodurch sich das Luftvolumen ändert. Dieser Fehler kann aber aufgrund des viel größeren Ausdehnungskoeffizienten von Luft gegenüber dem von Glas vernachlässigt werden. Zum anderen bleibt die in der Kapillare zwischen Glaskugel und Manometer eingeschlossene Luft annähernd auf Zimmertemperatur. Temperaturänderungen im Glasballon bewirken daher, dass dieses „schädliche Volumen“ komprimiert bzw. expandiert wird, wodurch sich ebenfalls das Luftvolumen ändert. Desweiteren ist Luft nur bedingt als ideales Gas anzusehen. Weit oberhalb des Verflüssigungspunktes und bei geringem Druck sind die Voraussetzungen eines idealen Gases sicherlich gut erfüllt. Allerdings werden Sie auch Messungen bei Temperaturen des flüssigen Stickstoffs durchführen. Da der Druck im Glasballon bei dieser Temperatur deutlich geringer ist als Atmosphärendruck, tritt keine Verflüssigung auf und die Luft im Glasbehälter kann immer noch als ideal angesehen werden.

4.6.6 Das Thermoelement

Die Wirkungsweise eines Thermoelementes beruht auf dem Seebeck- Effekt: Bringt man zwei unterschiedliche Metalle zueinander in Kontakt, so baut sich an der Kontaktstelle eine elektrische Spannung auf, deren Betrag von der Art des Metalls und der Temperatur abhängt (Abbildung 30 links). Aus dem Metall mit der geringeren Austrittsarbeit fließen Elektronen in das Metall mit der größeren Austrittsarbeit. Es

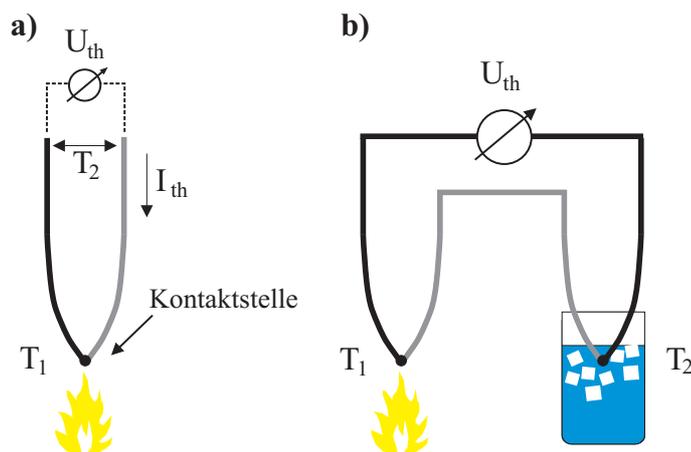


Abbildung 30: Funktionsprinzip eines Thermoelements.

entsteht eine Thermospannung U_{th} . Bei geschlossenem Stromkreis fließt ein Thermostrom I_{th} ; die dafür „benötigte Energie“ wird der Wärmequelle entnommen.

Beträgt die Temperatur an der Kontaktstelle T_1 und an den beiden Enden der Metalle T_2 , so folgt für die Thermospannung:

$$U_{th} = K(T_1 - T_2), \quad (23)$$

wobei K eine Konstante darstellt, die von beiden Metallen abhängt.

Thermoelemente werden in Industrie und Technik sehr häufig eingesetzt. Die Vorteile dieser Sensoren sind kleine Dimensionen, gute mechanische und chemische Stabilität, die Anwendbarkeit über einen sehr großen Temperaturbereich sowie die geringen Herstellungskosten. Allerdings besitzen Thermoelemente auch Nachteile. Es lassen sich nur relative Temperaturen messen. Soll die Temperatur T_1 absolut bestimmt werden, so muss die Vergleichstemperatur T_2 bekannt sein. Für einfache Messungen geringer Genauigkeit begnügt man sich mit der ungefähr konstanten Raumtemperatur T_2 als Vergleichstemperatur (Bei Messungen von sehr hohen Temperaturen ist auch diese Methode sehr genau). Für präzise Messungen der absoluten Temperatur wird aber eine konstante Vergleichstemperatur benötigt. Dazu verwendet man ein Thermoelement mit zwei Kontaktstellen (Abbildung 30 rechts), wobei ein Kontakt auf eine definierte Vergleichstemperatur T_2 eingestellt wird.

Die Spannung die an einem Thermoelement anliegt ist sehr gering. Bei dem hier verwendeten Platin-Rhodium Thermoelement beträgt die Spannung bei 50°C $2 \mu\text{V}$, bei 1000°C $4,9 \text{ mV}$. Eine Vergleichliste zwischen Temperatur und Thermospannung liegt am Laborplatz aus.

4.6.7 Das Platin Widerstandsthermometer

Die Temperaturabhängigkeit eines Pt-Widerstands lässt sich mit guter Genauigkeit durch ein Polynom zweiten Grades approximieren⁶:

$$R(T) = R_0(1 + AT + BT^2), \quad (24)$$

mit den Koeffizienten

$$A = 3,9083 \times 10^{-3} [^\circ\text{C}^{-1}]$$

$$B = -5,775 \times 10^{-7} [^\circ\text{C}^{-2}].$$

⁶Die DIN IEC 751 legt für den Platin-Widerstand eigentlich zwei Temperaturbereiche fest (-200°C bis 0°C und 0°C bis 850°C), die durch unterschiedliche Polynome definiert sind. Bei diesem Versuch reicht es aber aus, stets die angegebene quadratischen Näherung zu verwenden.

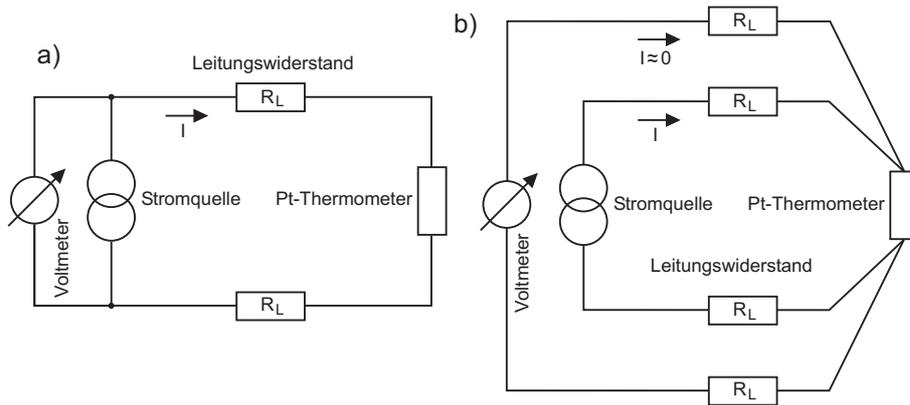


Abbildung 31: a) Zweileiterschaltung und b) Vierleiterschaltung zur Messung des Widerstands eines Pt-Thermometers.

R_0 ist der Nennwiderstand bei 0°C . Für ein Pt100-Thermometer gilt $R_0 = 100 \Omega$. Damit kann aus dem gemessenen Widerstand R die Temperatur berechnet werden. Aus Gleichung (24) ergibt sich:

$$T(R) = \frac{-R_0 A + \sqrt{R_0^2 A^2 - 4R_0 B(R_0 - R)}}{2R_0 B}. \quad (25)$$

Platinthermometer sind in vier Genauigkeitsklassen erhältlich. Die im Praktikum eingesetzten Thermometer sind in der Genauigkeitsklasse B eingeordnet. In dieser Klasse beträgt der Temperaturfehler:

$$\Delta T = 0,30^\circ\text{C} + 0,005 |T|. \quad (26)$$

Der Widerstand eines Pt-Thermometers kann im einfachsten Fall nach dem Ohmschen Gesetz durch zwei verschiedene Methoden bestimmt werden. Entweder wird an den Pt-Widerstand eine konstante Spannung angelegt und der Strom gemessen oder es wird ein konstanter Strom eingepreßt und der Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand gemessen. Bei beiden Messmethoden tritt stets eine Eigenerwärmung des Pt-Thermometers auf, die die eigentliche Temperaturmessung verfälscht. Es ist daher sinnvoll, die Widerstandsmessung mit einem möglichst kleinen, konstanten Messstrom durchzuführen und den Spannungsabfall über dem Pt-Widerstand mit einem Voltmeter zu messen. Im Praktikum verwenden Sie hierfür eine Konstantstromquelle die einen Strom von 1 mA liefert.

Bei der Spannungsmessung muss berücksichtigt werden, dass der Pt-Widerstand in der Regel an mehr oder weniger langen Zuleitungen angeschlossen ist, die wiederum selbst einen elektrischen Widerstand besitzen. Bei der Zweileiterschaltung in Abbildung 31 a) geht in die Widerstandsmessung der Widerstand der Messleitungen mit ein. Dieser Messfehler kann durch eine sogenannte Vierleiterschaltung vermieden werden. Dabei dienen zwei Leiter der Stromzufuhr und zwei weitere zur Messung des Spannungsabfalls. Da die Spannungsmessung mit hochohmigen Voltmetern (Innenwiderstand einige $\text{M}\Omega$) erfolgt, fließt nur ein sehr kleiner Strom durch die Leitungen und der Spannungsabfall an den Zuleitungen ist vernachlässigbar klein.

4.6.8 Das Pyrometer

Jeder Körper dessen Temperatur größer als 0 K ist sendet Wärmestrahlung aus, deren Intensität nur von der Temperatur abhängt. Zur Quantifizierung der abgestrahlten Intensität geht man zunächst vom Modell eines schwarzen Strahlers aus. Dabei handelt es sich um einen idealisierten Körper, der die gesamte auf ihn einfallende elektromagnetische Strahlung vollständig absorbiert. Nach dem kirchhoffschen Strahlungsgesetz besitzt solch ein Körper auch ein maximales Emissionsvermögen $\epsilon = 1$. Die Intensitätsverteilung der

Strahlung die von einem schwarzen Strahler ausgeht, wird durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben:

$$M_\lambda(\lambda, T) dA d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)} - 1} dA d\lambda, \quad (27)$$

wobei M_λ die Strahlungsleistung beschreibt, die vom Flächenelement dA im Wellenlängenbereich λ bis $\lambda + d\lambda$ in den Halbraum abgestrahlt wird. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 32 für verschiedene Temperaturen im Bereich von 300 K bis 10000 K dargestellt.

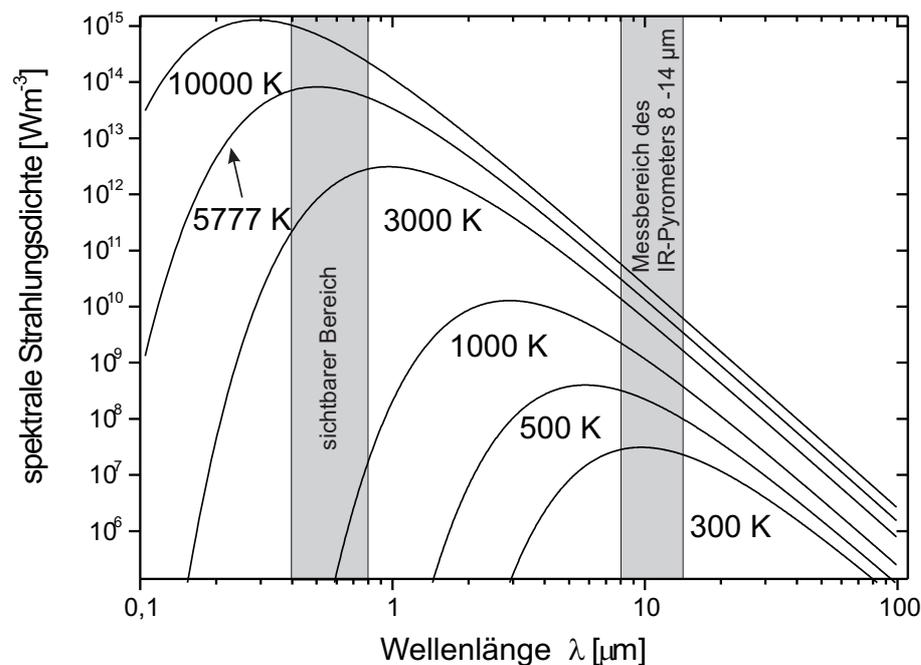


Abbildung 32: Spektrale Intensitätsverteilung eines schwarzen Körpers bei unterschiedlichen Temperaturen. Die Temperatur von 5777 K entspricht der effektiven Temperatur der Sonnenoberfläche.

Die gesamte von einem Körper abgestrahlte Leistung wird durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz beschrieben. Integration von Gleichung (27) über die gesamte strahlende Fläche A und über alle Wellenlängen ergibt

$$P = \epsilon(T)\sigma AT^4, \quad (28)$$

wobei σ die Stefan-Boltzmann-Konstante und T die absolute Temperatur beschreiben. Der Faktor $\epsilon(T) \leq 1$ berücksichtigt, dass reale Körper ein kleineres Emissionsvermögen aufweisen als der idealisiert schwarze Körper. Die abgestrahlte Leistung eines Körpers hängt demnach nur von der Fläche und der Temperatur ab. Auf dieser Eigenschaft beruhen berührungslose Pyrometer und Wärmebildkameras.

Bei Zimmertemperatur (≈ 300 K) liegt das Strahlungsmaximum im langwelligen Infrarotbereich bei einer Wellenlänge von etwa $10 \mu\text{m}$ (Abbildung 32). In diesem Bereich arbeiten kommerzielle IR-Pyrometer. Die im Praktikum eingesetzten Pyrometer integrieren die von einem Körper ausgehende Strahlung im Bereich von $8 \mu\text{m}$ bis $14 \mu\text{m}$.

4.6.9 Durchführung des Versuchs

1. Skizzieren Sie den Versuchsaufbau

2.1 Eichung der Thermometer bei 0°C

Inbetriebnahme des Pt100-Thermometer: Bauen Sie eine Vierleiterschaltung auf. Stecken Sie dazu den Stecker des Thermometers in die Adapterbox. Die vier Anschlussleitungen können Sie dann an den 4 mm-Buchsen abgreifen. Verbinden Sie als nächstes je eine weiße und eine rote Buchse mit den entsprechenden Buchsen der Stromquelle. Wenn Sie das Voltmeter an die beiden noch freien Buchsen der Stromquelle anschließen (rote Buchse an den Anschluss Com des Voltmeters), haben Sie eine Zweileiterschaltung (siehe Abbildung 31) und Sie messen den Spannungsabfall über den Kabeln mit. Um eine Vierleiterschaltung zu bekommen, müssen Sie das Voltmeter direkt an die Adapterbox anschließen. Sie sollten bei der folgenden Messung wenigstens einmal beide Schaltungen ausprobieren. Bei 0°C beträgt der Pt100-Widerstand 100 Ω . Bei einem Messstrom von 1 mA erhalten Sie bei der Vierleiterschaltung einen Spannungsabfall von 100 mV. In der Zweileiterschaltung werden Sie einen größeren Wert messen, da Sie die Zuleitungswiderstände mitmessen. Allerdings sind die Kabel relativ kurz und der Effekt daher sehr klein.

Benutzen Sie für die Messung bei 0°C eine Wasser-Eis Mischung. Füllen Sie den Topf zur Hälfte mit klein zerstoßenem Eis und platzieren Sie den Glasballon mittig im Topf. Gießen Sie mit Wasser auf und rühren Sie mit einem Glasstab gut um. Die Glaskugel muss völlig mit Wasser bedeckt sein! Beobachten Sie gleichzeitig die Spannung am Pt100 sowie die am Pyrometer angezeigte Temperatur. Die Temperatur des schmelzenden Eises in Wasser als Fixpunkt und Nullpunkt der Temperaturskala muss möglichst gut erreicht werden. Sie müssen dazu das Minimum des Spannungswertes des Pt100-Thermometers abwarten. Wenn sich die Spannung stabilisiert hat, protokollieren Sie die Spannung, den Druck des Gasvolumens und die Pyrometertemperatur. Die Pyrometertemperatur wird auf der Wasseroberfläche gemessen. Sie wird sich systematisch von der „wahren“ Temperatur unterscheiden, weil das Absorptionsvermögen von Wasser nicht Eins ist.

2.2 Temperaturmessung bis T= 100°C

Stellen sie jetzt die Kochplatte an und erhitzen sie das Wasser auf etwa 10°C. Schalten Sie die Heizplatte kurz vor dem Erreichen der gewünschten Temperatur aus und rühren Sie das Wasser gut um, damit sich eine gleichmäßige Temperaturverteilung einstellen kann. Registrieren sie Druck, Pyrometeranzeige und Pt100 Spannung. Wiederholen Sie diese Messungen in Schritten von ungefähr 10 Grad. Versuchen Sie nicht durch wiederholtes Ein- und Ausschalten der Heizplatte, genau die Werte 10°C, 20°C, ...anzufahren. Welcher Wert sich letztlich einstellt, ob 10°C oder eben 11,5°C, ist völlig unerheblich. Warten sie ca. 2 Minuten unter dauerndem Umrühren und lesen Sie dann für jeden Schritt die Spannung am Pt100 den Druck und die Pyrometeranzeige ab. Nehmen Sie als letzten Messpunkt die Temperatur des siedenden Wassers auf. Lesen Sie den Luftdruck am Barometer ab und notieren Sie diesen Wert.

2. Messung von sehr hohen Temperaturen mit dem PtRh-Thermoelement

Messen Sie die Temperaturverteilung in der Flamme mit dem PtRh-Thermoelement bei starker Luftzufuhr und bei schwacher Luftzufuhr. Das PtRh-Thermoelement besteht aus zwei Platindrähten, die aber unterschiedlich stark mit Rhodium legiert sind. Zeichnen Sie die ungefähre Gestalt der Flamme und tragen Sie für verschiedene Stellen die Thermospannung ein (fünf Messungen bei starker und schwacher Luftzufuhr). Drehen Sie nach Versuchsende das Gas ab und schütten Sie das Wasser und das Eis aus.

4.6.10 Auswertung

1. Tragen Sie die bei den zwei Fixpunkten gemessenen Druckwerte gegen die Temperatur in ein Diagramm ein. Wählen Sie auf der x-Achse einen Temperaturbereich von -280°C bis 110°C. Eichen Sie die Temperaturskala, indem Sie die Temperatur des Wasser-Eisgemisches als 0°C ansetzen. Tragen Sie dort den gemessenen Druck ein. Einen zweiten Eichpunkt erhalten Sie, indem Sie die den Druck p_{gem} , den Sie bei der Temperatur des kochenden Wassers gemessen haben, auf den Druck p_{NB} unter Normalbedingungen umrechnen:

$$p_{NB} = p_{gem} \frac{1013,25 \text{ hPa}}{p_{LD}}, \quad (29)$$

wobei p_{LD} den Luftdruck beschreibt. Ordnen Sie diesem Druckwert die Temperatur 100°C zu und tragen Sie den Wert in das Diagramm ein. Jetzt können sie die Eichgerade des Gasthermometers durch beide Messpunkte zeichnen. Bei welcher Temperatur wird der Druck Null? Ergänzen Sie das Diagramm durch eine Kelvin-Skala. Tragen sie zusätzlich die Druckwerte ein, die Sie mit dem Alkoholthermometer zwischen 0°C und 100°C bestimmt haben. Benutzen Sie für diese Messwerte andere Symbole als für die Messwerte der beiden Fixpunkte.

2. Eichung des Pt100 Widerstandsthermometers. Bestimmen Sie mit Hilfe der zuvor angefertigten Eichkurve die Temperaturwerte des Gasthermometers im Bereich von 0°C bis 100°C . Tragen Sie den Widerstand des Pt100- Elements gegen die Temperatur in ein weiteres Diagramm ein. Welchen Zusammenhang finden Sie? Legen Sie durch die Messwerte im Bereich von 0°C bis 100°C eine Ausgleichsgerade. Vergleichen Sie die Steigung mit dem linearen Glied des Polynoms in Gleichung (24).
3. Tragen Sie die Temperaturmessungen mit dem Pyrometer gegen die Temperatur des Gasthermometers auf. Was beobachten Sie? Erklärung?
4. Skizzieren Sie die Flammengestalt und tragen Sie die Temperaturen für schwache und für starke Luftzufuhr ein. Die zu den Thermospannungen gehörigen Temperaturen sind der ausgelegten Eich-tabelle zu entnehmen.

4.7 Versuch 17: Radioaktivität und Statistik

4.7.1 Relevante Begriffe und Gesetze

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Misst man mit einem Zählrohr die von einem radioaktiven Präparat emittierten Teilchen unter unveränderten Versuchsbedingungen, so wird man in der Regel bei jeder Messung eine etwas andere Teilchenzahl erhalten. Der Grund hierfür ist, dass jeweils während der Messzeit nur ein kleiner Bruchteil der radioaktiven Atome zerfällt, und dass die einzelnen Zerfallsprozesse völlig **unabhängig** voneinander stattfinden. Die genaue Anzahl der innerhalb der Messzeit zerfallenden Atome bleibt daher dem Zufall überlassen.

Allerdings lässt sich mit dem Zufall hervorragend experimentieren und rechnen. Der Zufall zeigt Gesetzmäßigkeiten! Zwar ist es unmöglich den Zerfallszeitpunkt eines **einzelnen** Atomkernes vorherzusagen - über **eine große Anzahl** von Kernen lassen sich dagegen durchaus Vorhersagen treffen. Trägt man beispielsweise die mit einem Zählrohr gemessene Zählrate in ein Histogramm ein und wiederholt dieses viele Male, so wird man unter bestimmten Voraussetzungen (z.B. muss die Halbwertszeit des radioaktiven Isotops groß gegenüber der Beobachtungszeit sein) stets dieselbe Verteilung erhalten (Vergleiche Abbildung 33). In den folgenden Abschnitten wollen wir untersuchen, welche statistische Verteilungen geeignet sind, den radioaktiven Zerfall zu beschreiben.

Die Binomial-Verteilung

Die Binomial-Verteilung ergibt sich aus folgender Fragestellung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis A bei n voneinander unabhängigen Versuchen genau k -mal eintritt, wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A bei einem Versuch ist und $(1 - p)$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten dieses Ereignisses darstellt?

Nehmen wir zunächst an, dass das Ereignis A gerade bei den ersten k Versuchen eintritt, bei den folgenden $n - k$ dagegen nicht. Da die Versuche voneinander statistisch unabhängig sein sollen, müssen die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versuche multipliziert werden. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit W dieses konkreten Beispiels:

$$W = p^k(1 - p)^{n-k}. \quad (30)$$

Das Ereignis A muss aber nicht unbedingt bei den ersten k Versuchen auftreten. Es muss nur innerhalb von n Versuchen genau k -mal vorkommen. Die Reihenfolge ist dabei beliebig. Nun gibt es aber genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus n Elementen k herauszugreifen. Unter Beachtung aller möglichen Permutationen $\binom{n}{k}$ erhalten wir schließlich die Binominal-Verteilung:

$$B(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (31)$$

Dazu folgendes Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zehnmalem Würfeln genau dreimal die Zahl „4“ fällt?

aus $p = 1/6$, $n = 10$ und $k = 3$ folgt:

$$B(3; 10, 1/6) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} = 15,5\%$$

Die Binomial-Verteilung ist eine diskrete d.h. n, k sind natürliche Zahlen, zweiparametrische Verteilung mit den Parametern n und p . Als Notation verwenden wir die Bezeichnung $B(k; n, p)$. Dabei kennzeichnet das Kürzel B , dass es sich um eine Binomial-Verteilung handelt. In der Klammer wird zunächst die

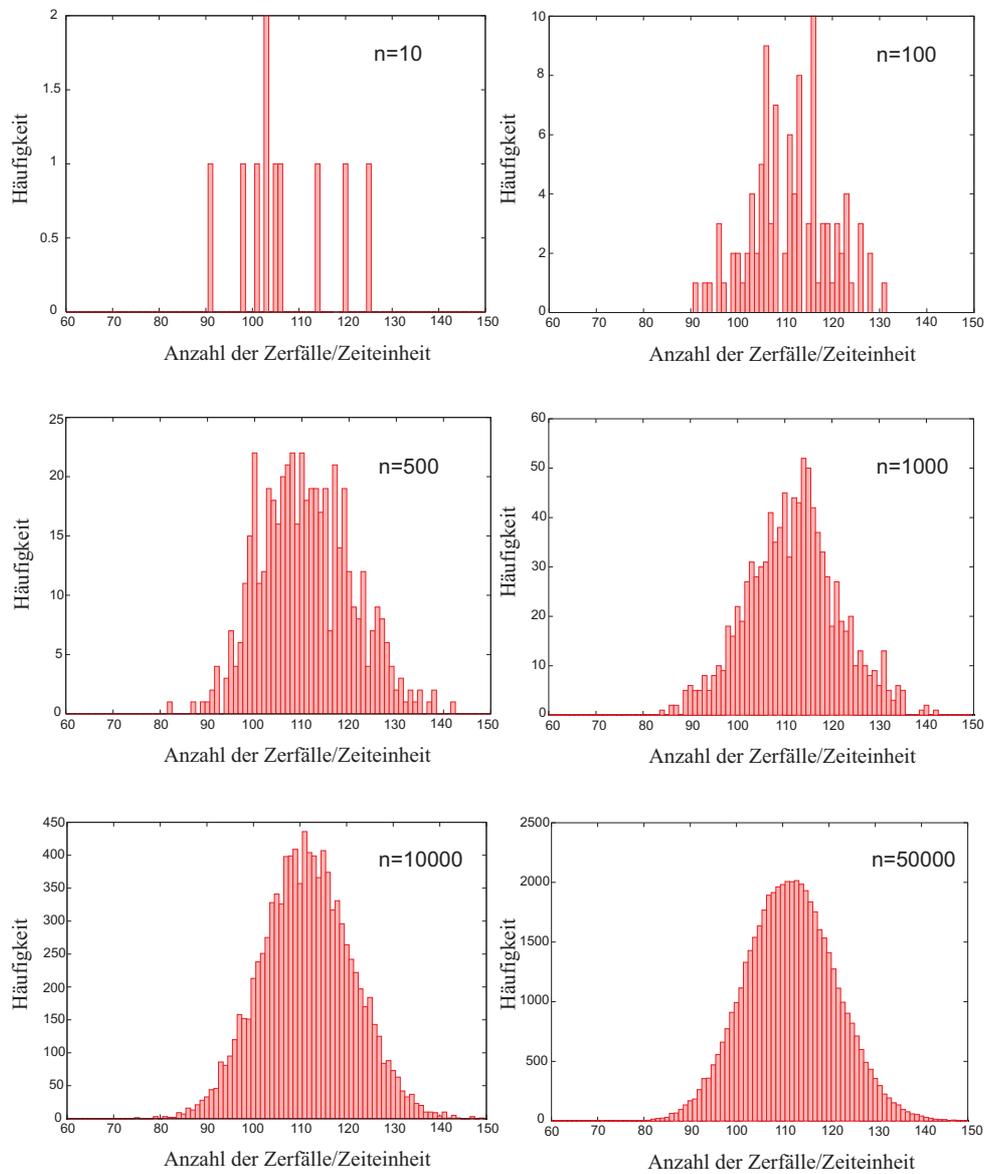


Abbildung 33: Trägt man die pro Zeiteinheit gemessenen radioaktive Zerfälle einer großen Anzahl von Atomen in ein Histogramm ein, so erhält man nach vielen Messungen stets dieselbe Verteilung. n bezeichnet die Anzahl der Messungen.

Variable angegeben, anschließend - getrennt durch ein Semikolon - die Parameter.

Eigenschaften der Binomial-Verteilung:

$$\text{Normierung:} \quad \sum_{k=0}^n B(k; n, p) = 1 \quad (32)$$

$$\text{Mittelwert:} \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k B(k; n, p) = np \quad (33)$$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^n k^2 B(k; n, p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p) \quad (34)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (35)$$

Unsere bisherigen Überlegungen zur Binomial-Verteilung lassen sich nun einfach auf den radioaktiven Zerfall übertragen. Auch hier handelt es sich um ein Ereignis mit zwei möglichen Ausgängen: Entweder ein radioaktiver Atomkern zerfällt innerhalb eines gewissen Beobachtungszeitraums oder eben nicht. Stellt p die Zerfallswahrscheinlichkeit eines Atomkerns dar, so beschreibt die Binomial-Verteilung die Wahrscheinlichkeit, dass von n Atomkernen, genau k innerhalb eines bestimmten Zeitraums t zerfallen.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit p hängt natürlich vom Beobachtungszeitraum ab. Je länger Sie warten, desto mehr Zerfälle werden Sie beobachten. Es lässt sich leicht zeigen, dass für p gilt:

$$p(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (36)$$

wobei die Zerfallskonstante λ eine für das Isotop charakteristische Größe darstellt. Ist die Zerfallskonstante sehr klein, wie es bei den in diesem Versuch verwendeten radioaktiven Präparaten der Fall ist, so kann die Zerfallswahrscheinlichkeit p für einen festen Beobachtungszeitraum als konstant angenommen werden.

Obwohl die Binomial-Verteilung die Statistik des radioaktiven Zerfalls sehr gut beschreibt, ist sie in der Praxis nur schwer handzuhaben. Stellen sie sich vor, sie müssten die Fakultät von $n \approx 10^{23}$ ausrechnen! In vielen Fällen ist aber die Zerfallswahrscheinlichkeit p sehr klein und die Anzahl der Atome n sehr groß. Sofern dies gilt, lassen sich einige mathematische Näherungen anwenden und wir erhalten schließlich aus der Binomial-Verteilung die Poisson-Verteilung.

Die Poisson-Verteilung

Für kleine Zerfallswahrscheinlichkeiten ($p \rightarrow 0$) und eine große Anzahl von radioaktiven Atome ($n \rightarrow \infty$) kann die Binomial-Verteilung durch die Poisson-Verteilung angenähert werden. Allerdings müssen wir fordern, dass der Mittelwert $\mu \equiv \langle k \rangle = np$ endlich bleibt. Die Poisson-Verteilung ist also dann gültig, wenn die durchschnittliche Anzahl der Ereignisse (d.h. der Mittelwert) das Ergebnis einer sehr großen Zahl von Ereignismöglichkeiten und einer sehr kleinen Ereigniswahrscheinlichkeit ist. Es ergibt sich:

$$P(k; \mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}. \quad (37)$$

Die Poisson-Verteilung ist wie die Binomial-Verteilung eine diskrete Verteilung (k ist eine natürliche Zahl). Sie ist eine einparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ vollständig beschrieben wird.

Eigenschaften der Poisson-Verteilung:

$$\text{Normierung:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} P(k; \mu) = 1 \quad (38)$$

$$\text{Mittelwert:} \quad \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k P(k; \mu) = \mu \quad (39)$$

$$\text{Varianz:} \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k; \mu) - \langle k \rangle^2 = \mu \quad (40)$$

$$\text{Standardabweichung:} \quad \sigma = \sqrt{\mu} \quad (41)$$

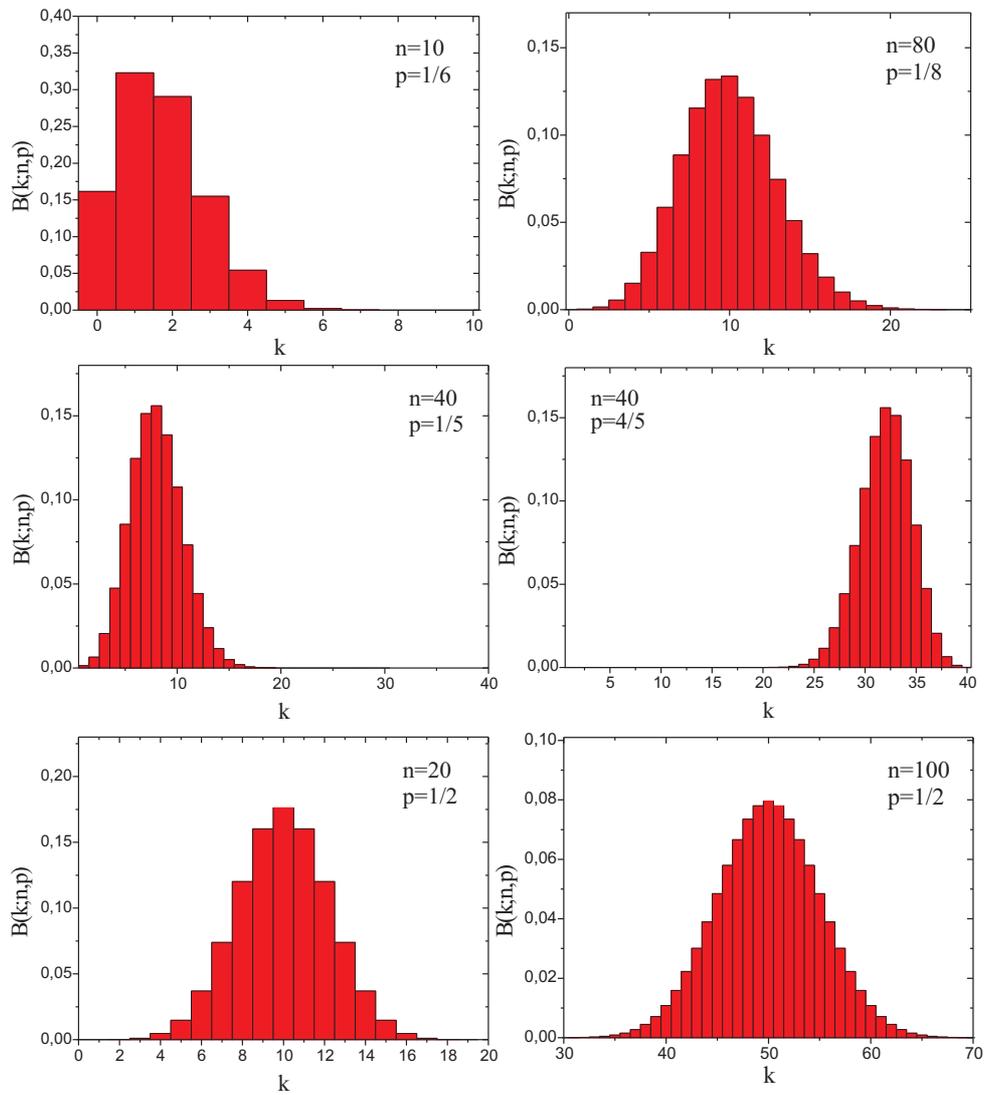


Abbildung 34: Binomial-Verteilung für unterschiedliche Werte von n und p .

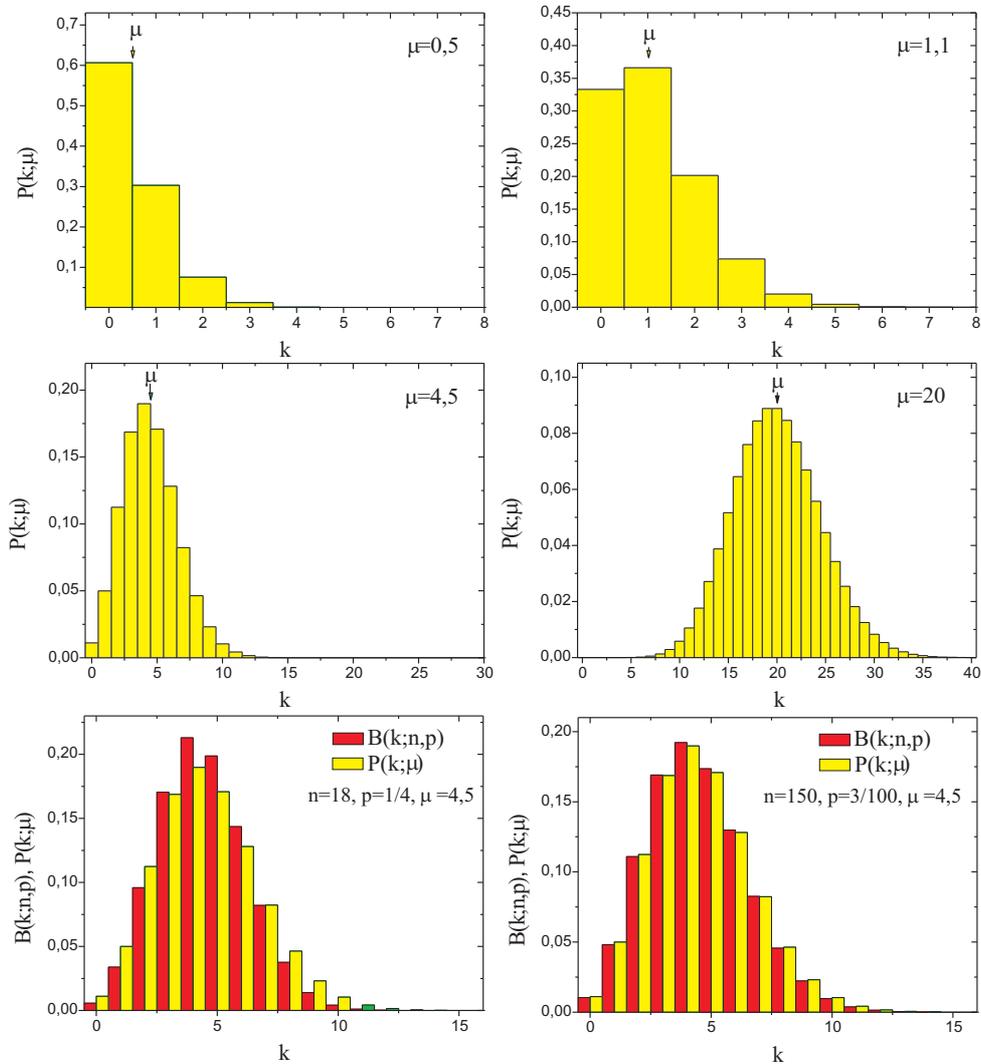


Abbildung 35: Poisson-Verteilung für unterschiedliche Werte von μ . Untere Reihe: Vergleich der Binomial-Verteilung mit der Poisson-Verteilung. Für große Werte von n und kleine Wahrscheinlichkeiten p nähert sich die Binomial-Verteilung der Poisson-Verteilung.

Beachten Sie, dass der Parameter μ zugleich den Mittelwert als auch die Varianz darstellt. Die Standardabweichung berechnet sich demnach aus der Wurzel des Mittelwertes. Hierauf beruht das \sqrt{N} -Gesetz bei der Fehlerbestimmung von gezählten Größen.

In Abbildung 35 ist die Poisson-Verteilung für verschiedene Werte von μ dargestellt. Für $\mu < 1$ ist der wahrscheinlichste Wert stets Null. Die Verteilung besitzt in diesem Fall kein Maximum und nimmt monoton mit zunehmendem k ab. Für $\mu > 1$ besitzt die Verteilung ein Maximum, dessen Breite allerdings bei gleichem Mittelwert größer ist als die der Binomial-Verteilung (Die Varianz der Poisson-Verteilung entspricht dem Mittelwert $\sigma_P^2 = \mu \equiv np$, während sie bei der Binomial-Verteilung gegeben ist durch $\sigma_B^2 = np(1-p) < \sigma_P^2$). Weiterhin fällt auf, dass die Verteilungen für kleine Mittelwerte stark asymmetrisch sind und für größer werdende Mittelwerte immer symmetrischer werden. In der Tat geht die Poisson-Verteilung für große μ in die symmetrische Gauß-Verteilung über.

Die Gauß-Verteilung

Für einen großen Mittelwert ($\mu > 30$) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gauß-Verteilung approximieren:

$$G(k; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}}. \quad (42)$$

Gleichung (42) stellt einen Spezialfall der Gauß-Verteilung dar, bei der die Varianz dem Mittelwert entspricht. Die allgemeine Form lautet:

$$G(k; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\sigma^2}}. \quad (43)$$

Eigenschaften der Gauß-Verteilung:

$$\text{Normierung: } \int_{-\infty}^{\infty} G(k; \mu, \sigma) dk = 1 \quad (44)$$

$$\text{Mittelwert: } \int_{-\infty}^{\infty} k G(k; \mu, \sigma) dk = \mu \quad (45)$$

$$\text{Varianz: } \int_{-\infty}^{\infty} k^2 G(k; \mu, \sigma) dk - \langle k \rangle^2 = \sigma^2 \quad (46)$$

Für den Spezialfall einer Zählstatistik (Gleichung (42)) ergibt sich, wie bei der Poissonverteilung, für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mu}. \quad (47)$$

Im Gegensatz zur Binomial- und Poissonverteilung, deren Variable k nur diskrete Werte annehmen kann, ist die Gauß-Verteilung kontinuierlich, d.h. k ist hier eine *reelle* Zahl. Sie ist eine zweiparametrische Verteilung, die durch den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ eindeutig bestimmt ist. In Abbildung 36a) sind einige Verteilungen mit unterschiedlichen Standardabweichungen dargestellt. Je größer die Standardabweichung σ , desto breiter ist die Verteilung. Die Bilder c) und d) vergleichen die Gauß-Verteilung mit der Poissonverteilung für zwei unterschiedliche Mittelwerte. In Abbildung 36b) ist eine Gauß-Verteilung abgebildet, bei der die Flächen unter der Kurve im Bereich $k > \mu + \sigma$ und $k < \mu - \sigma$ schraffiert dargestellt ist. Diese Fläche gibt die Wahrscheinlichkeit P_σ an, dass k um mehr als eine Standardabweichung vom Mittelwert μ abweicht. P_σ lässt sich gemäß

$$P_\sigma = 1 - \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} G(k; \mu, \sigma) dk \quad (48)$$

berechnen und beträgt etwa 30 %. Analog erhält man die Wahrscheinlichkeiten für Abweichungen von μ um mehr als $\pm 2\sigma$ und $\pm 3\sigma$ (Tabelle 1).

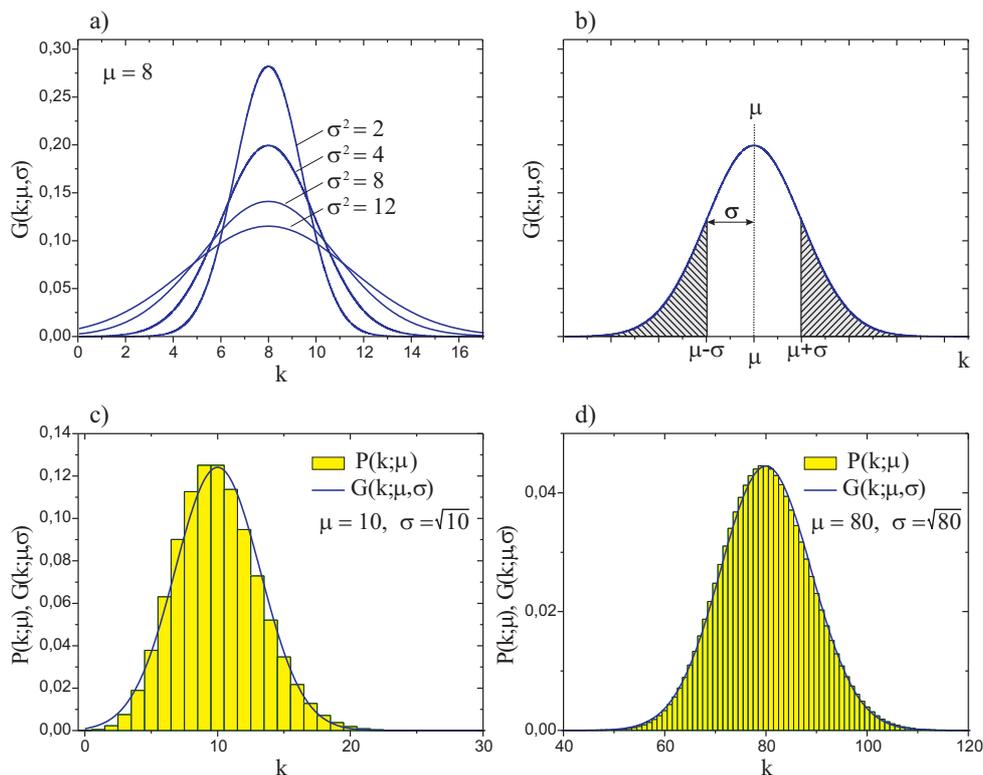


Abbildung 36: a) Gauß-Verteilung für $\mu = 8$ und verschiedene Werte von σ . b) Grafische Darstellung von σ . c) und d) Vergleich der Poisson-Verteilung mit der Gauß-Verteilung.

Eine Abweichung von μ um mehr als	$\pm\sigma$	$\pm 2\sigma$	$\pm 3\sigma$
hat die Wahrscheinlichkeit	31,73%	4,55%	0,27%

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Werte von σ .

Um auf einfacher Weise die Standardabweichung aus einer Gaußkurve abzuschätzen, sollten Sie sich folgende Beziehung merken:

$$FWHM \approx 2,36\sigma, \quad (49)$$

wobei *FWHM* für *full width at half maximum* steht, d.h. für die volle Breite der Kurve auf halber Höhe.

Statistik und Messfehler

In der Praxis ist der Mittelwert μ einer sehr langen Messreihe meist nicht gegeben, sondern nur das Resultat k einer einzigen Messung. In diesem Fall kann man das Ergebnis als Schätzung des Mittelwertes interpretieren:

$G(\mu; k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert μ ergeben würde, wobei das Resultat k einer einzigen Messung gegeben ist.

Da k und μ nicht stark voneinander abweichen, können wir aufgrund einer einzigen Messung auch einen Näherungswert für die Standardabweichung angeben:

$$\sigma = \sqrt{k}. \quad (50)$$

Es ist üblich, das Resultat einer solchen Zählung in der Form

$$k \pm \sqrt{k} \quad (51)$$

anzugeben. Dies ist eine Abkürzung für die Sätze: „Ich habe k Ereignisse gezählt. Daraus schließe ich, wegen Abbildung 36b) und Tabelle 1, dass der Mittelwert einer sehr langen Messung mit 68% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm \sqrt{k}$ liegt, mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich $k \pm 2\sqrt{k}$ und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3% außerhalb des Bereichs $k \pm 3\sqrt{k}$ “.

Die Betrachtung der statistischen Fehler ist besonders wichtig, wenn man herausfinden will, ob die Differenz zweier Zählergebnisse k_1 und k_2 , allein durch statistische Schwankungen erklärt werden kann oder auf eine Änderung der Versuchsbedingungen zurückzuführen ist. Viele Experimente laufen auf diese Fragestellung hinaus.

Nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz erhält man den mittleren statistischen Fehler einer Differenz durch quadratisches Addieren der Einzelfehler.

Es sei

$$\Delta = k_1 - k_2; \quad \sigma_1 = \sqrt{k_1}; \quad \sigma_2 = \sqrt{k_2}.$$

Dann ist

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{k_1 + k_2}.$$

Man schreibt dies meist in der Form :

$$\Delta = (k_1 - k_2) \pm \sqrt{k_1 + k_2}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass Δ allein aufgrund von statistischen Schwankungen von Null um mehr als eine, zwei oder drei Standardabweichungen ($\sigma_\Delta = \sqrt{k_1 + k_2}$) abweicht, gilt wieder Tabelle 1. In der Regel hält man den Einfluss einer Änderung der Versuchsbedingungen für erwiesen, wenn Δ um mehr als drei Standardabweichungen von Null abweicht. In diesem Fall bezeichnet man die Differenz Δ als **signifikant**.

Radioaktiver Zerfall

Die Zahl der radioaktiven Zerfälle einer Quelle in einem bestimmten Zeitintervall ist zufallsverteilt. Ist die Anzahl der Zerfälle im Messintervall gering (typisch weniger als 30), so folgt sie der Poisson-Verteilung. Ist die Anzahl der Zerfälle im Messintervall groß, kann diese durch eine Gaußverteilung mit

$$\text{Mittelwert} = \bar{x} = \bar{N} = \text{mittlere Zahl registrierter Zerfälle im Messintervall}$$

$$\text{Standardabweichung } \sigma = \sqrt{\bar{N}}$$

beschrieben werden.

Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert N zu finden, ist

$$P(N) \Delta N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(N-\bar{N})^2}{2\sigma^2}} \Delta N$$

$$\text{mit } \Delta N = 1$$

Die Zählratenverteilung wird durch nur *einen* Parameter \bar{N} beschrieben.

N ist immer die Anzahl der *tatsächlich registrierten* Ereignisse und ist eine dimensionslose Zahl. Wiederholt man bei einer Quelle mit großer Halbwertszeit die Messungen in einer langen Messreihe, so sind die Einzelmessungen "gaussisch" um den Mittelwert verteilt.

Bei einer Normalverteilung liegen

$$68.26\% \text{ aller Werte im Intervall } [\bar{N} - \sigma, \bar{N} + \sigma]$$

95.45% aller Werte im Intervall $[\bar{N} - 2\sigma, \bar{N} + 2\sigma]$

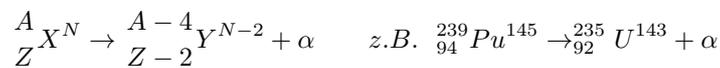
99.73% aller Werte im Intervall $[\bar{N} - 3\sigma, \bar{N} + 3\sigma]$

Nomenklatur für Isotope: ${}^A_Z X^N$ **Beispiel:** ${}^{48}_{20} Ca^{28}$

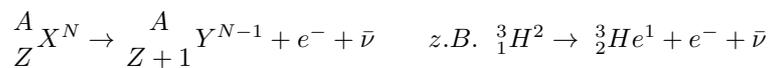
A = Massenzahl
Z = Ordnungszahl = Protonenzahl
N = Neutronenzahl
X, Y = Chemische Symbole der Nuklide

Radioaktive Zerfallsarten:

Alpha-Zerfall: (Emission von ${}^4_2He^2$ -Kernen)



Beta-minus-Zerfall: (Emission von Elektronen)

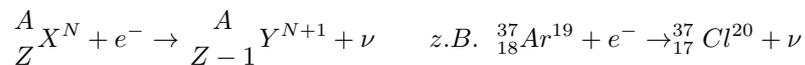


$\nu, \bar{\nu}$: Neutrino, Antineutrino

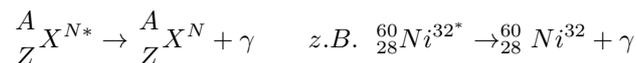
Beta-plus-Zerfall: (Emission von Positronen)



Elektroneneinfang:



Gammaübergang: (in einem angeregten Kern)



Radioaktives Zerfallsgesetz

Das radioaktive Zerfallsgesetz beschreibt die Anzahl der nach der Zeit t noch vorhandenen Kerne, nicht die Anzahl der Zerfälle. Ein radioaktiver Zerfall erfolgt spontan und statistisch. Er kann von außen weder beschleunigt noch verzögert werden. Die Zerfallswahrscheinlichkeit für einen bestimmten Kern hängt nicht von seinem Alter ab.

$$N_t = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t/\tau}$$

- N_0 = Zahl der zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Kerne
 N_t = Zahl der zur Zeit t noch vorhandenen Kerne
 λ = Zerfallskonstante, Einheit 1/s (charakteristisch für den bestimmten Zerfall)
 τ = mittlere Lebensdauer

Die Halbwertszeit ist die Zeit $T_{1/2}$, in der N auf die Hälfte zurückgegangen ist:

$$N(t = T_{1/2}) = N(t = 0)/2$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2$$

Aktivität (Umwandlungsrate)

Die Aktivität einer radioaktiven Substanz ist ein Maß für die pro Sekunde zerfallenden Kerne einer bestimmten Kernart.

$$-dN/dt = A_t = \lambda N_t = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

- A_t = Aktivität zur Zeit t
 A_0 = Aktivität zur Zeit $t = 0$ (Anfangsaktivität)

Die Aktivität hängt von der Anzahl der noch vorhandenen Kerne ab und zeigt deshalb dasselbe Zeitverhalten wie das Zerfallsgesetz.

Biologische Halbwertszeit

Die Konzentration eines Radionuklides im Körper nimmt ab:

- a) durch Zerfall : $T_{1/2}^{phys}$
 b) durch Ausscheidung : $T_{1/2}^{biol}$

$$\Delta N = -(\lambda_{phys} + \lambda_{biol})N \Delta t = -\lambda_{eff} N \Delta t$$

$$N_t = N_0 e^{-\lambda_{eff} t}$$

Die effektive Halbwertszeit beträgt:

$$T_{1/2eff} = \frac{\ln 2}{\lambda_{eff}} = \frac{T_{1/2phys} T_{1/2biol}}{T_{1/2phys} + T_{1/2biol}}$$

Langlebige Nuklide sind in der Diagnostik nur bei kurzer biologischer Halbwertszeit akzeptabel.

4.7.2 Versuchsvorbereitung

Was man wissen sollte:

Statistischer Fehler, Fehlerfortpflanzung, Wahrscheinlichkeit. In welcher Beziehung stehen die Binomial-, Poisson- und Gauß-Verteilung? Was ist Radioaktivität? Wie lautet das Zerfallsgesetz? Was ist ein Isotop? Funktionsweise des Zählrohrs. Welche Beziehung besteht zwischen Lebensdauer und Halbwertszeit? Was bedeutet das Symbol ${}^{116}_{49}\text{In}^{67}$? Welche natürlichen radioaktiven Strahler gibt es, und wie weist man radioaktive Strahlung nach?

Aufgaben als Teil der Vorbereitung:

- 1) Abschnitt über der Fehlerrechnung durchlesen
- 2) Eine Messung ergab die Messwerte $A = 20.5 \pm 0.7$ und $B = 14 \pm 1.5$.
 - a) Wie groß sind die relativen und absoluten Fehler von $C = A + B, D = A - B, E = AB, F = A/B$?
 - b) Sind die Messwerte A und B signifikant unterschiedlich?
- 3) Die Wahrscheinlichkeit einer Gegenreaktion bei einer bestimmten Impfung betrage 0.2 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Poisson-Verteilung), dass bei 3700 geimpften Personen genau 6 eine Gegenreaktion zeigen?
- 4) An einer Probe eines langlebigen radioaktiven Materials werde als Mittel einer Reihe von 20 Messungen eine Rate von 23,5 Zerfällen pro 10 s gemessen.
 - a) Wie groß ist die Varianz dieser Verteilung?
 - b) Wie groß ist der Fehler des Mittelwertes?
- 5) Die Größe von 4402 Studenten sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 185 cm und einer Standardabweichung von 3 cm.
 - a) Wie viele dieser Studenten haben eine Größe zwischen 179 cm und 188 cm?
 - b) Wie viele sind größer als 191 cm?
- 6) Von 3 g eines radioaktiven Materials wurde folgende Aktivität gemessen: Aktivität $A = 230000$ Bq und Halbwertszeit $T_{1/2} = 1.70 \cdot 10^9$ Jahre. Berechnen Sie das Atomgewicht des Materials. Wie groß wäre die Aktivität noch nach i) der mittleren Lebensdauer, ii) 4 Halbwertszeiten?

4.7.3 Versuchsbeschreibung

Zubehör:

Geiger-Müller Zählrohr mit Betriebsgerät
Externer Impulszähler
PC mit Drucker
Neutronenquelle
Präparatehalterung
Radioaktives Präparat (${}^{60}\text{Co}$ oder ${}^{137}\text{Cs}$, Indium) (wird vom Assistenten ausgegeben)
Für die graphische Darstellung: halblogarithmisches Papier mit 1 Dekade

Die Inbetriebnahme des Zählrohrs muss durch den Assistenten erfolgen.

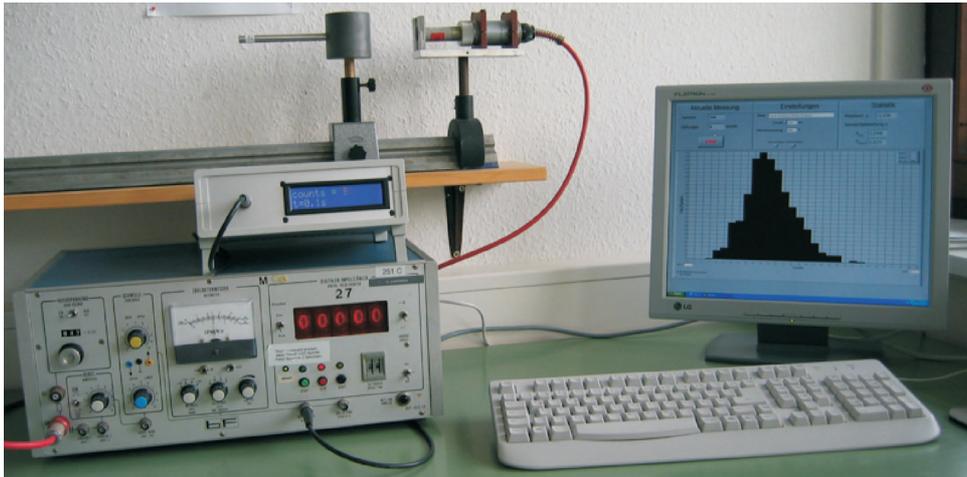


Abbildung 37: Versuchsaufbau.

4.7.4 Aufgabenstellung

- Skizzieren Sie den Versuchsaufbau.
- Verifizierung der statistischen Natur des radioaktiven Zerfalls

In dieser Teilaufgabe werden Sie viele Male (mindestens 1500 Mal) die Zerfälle eines radioaktiven Präparats innerhalb eines festen Zeitraums (Torzeit) messen und in ein Histogramm darstellen. Falls sich der radioaktive Zerfall völlig statistisch verhält, sollte das gemessene Histogramm durch eine Poisson- Verteilung, bzw. bei einem großen Mittelwert, durch eine Gauß- Verteilung beschrieben werden können. Überprüfen Sie dies zunächst für einen großen Mittelwert:

Nähern Sie das Präparat durch Verschieben des Reiters dem Zählrohr an, bis etwa 50 Zerfälle/Sekunde gezählt werden. Schalten Sie den Computer und das externe Zählgerät ein und starten Sie das Messprogramm *Statistik.exe* auf dem Desktop. Stellen Sie im Programm die Messzeit (Torzeit) auf 1 s. Starten Sie die Messung durch Drücken des Pfeilsymbols in der linken oberen Ecke. Die registrierten Zerfälle/Torzeit werden in einem Histogramm dargestellt. Zusätzlich wird aus den Messdaten der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet und im Feld „Statistik“ angezeigt. Der theoretisch zu erwartende Wert der Standardabweichung (σ_{theor}) wird aus der Quadratwurzel des Mittelwertes berechnet und ebenfalls angezeigt. Wenn Sie die Option „Gaußkurve“ einschalten, wird aus dem gemessenen Mittelwert und der Standardabweichung die dazugehörige Gauß-Verteilung berechnet und im Histogramm mitangezeigt. Beachten Sie, dass die angezeigte Gaußkurve nicht angefügt wird, sondern aus den Messdaten berechnet wird! Die Darstellung der Poisson- Verteilung ist nur dann möglich, wenn der Stoppwert der Abszisse kleiner als 34 ist.

Den Abszissenbereich des Histogramms können Sie durch den Start- und Stoppwert in der linken und rechten unteren Ecke einstellen. Warten Sie zunächst etwa 50 Messungen ab und stellen Sie dann diese Werte so ein, dass das Histogramm optimal dargestellt wird.

Insgesamt sind mindestens 1500 Messungen durchzuführen. Während dieser Zeit können Sie mit der Auswertung der Aufgabe 2 beginnen. Zum Beenden der Messung drücken Sie im Programm die Stop-Taste. Speichern Sie die Messung unter einem wiederfindbaren Namen und drucken Sie das Messprotokoll im Querformat aus.

- *Halbwertszeit von Indium*

Messen Sie für zwei mal zwei Minuten (oder 4 Minuten) ohne Präparat den Nulleffekt. Überzeugen Sie sich durch eine Testmessung, dass die Kobalt-Quelle die Untergrundmessung nicht mehr beeinflusst. Stellen Sie im Messprogramm *zerfall.exe* die Torzeit des Zählers auf 2 Minuten. Lassen

Sie sich nun das Indium- Präparat vom Assistenten geben. Das Indium- Präparat wird mit der Indiumseite zum Zählrohr hin in die vorgesehene Aussparung gesteckt und mit einem 1 mm Aluminiumblech dahinter fixiert. Starten Sie sofort das Messprogramm durch einen Mausklick auf den Pfeil im linken oberen Bereich des Programmfensters. Stoppen Sie die Messreihe nach ca. 50 Minuten. Speichern Sie wieder die Messdaten und drucken Sie das Protokoll aus.

- Lesen Sie die mittlere Halbwertszeit von ${}_{49}^{116}\text{In}^{67}$ auf der Nuklidkarte (im Gang) ab.

4.7.5 Zur Auswertung und Protokollierung

A)

- Anhand einer langen Messreihe sind die Schwankungen der Zählrate experimentell zu untersuchen und damit die statistische Natur des radioaktiven Zerfalls zu bestätigen.
- Berechnen Sie anhand der Tabelle aus Aufgabe 2 des Messprotokolls, wie viele Messungen um mehr als $\pm\sigma_{exp}$, $\pm 2\sigma_{exp}$, $\pm 3\sigma_{exp}$ und $\pm 4\sigma_{exp}$ vom Mittelwert abweichen und vergleichen Sie dies mit den theoretischen Erwartungen.

B)

- Die Untergrundzählrate zieht man von den Messwerten ab und berechnet die statistischen Fehler der Differenzwerte. Die korrigierten Messwerte werden mit den entsprechenden statistischen Fehlern in halblogarithmisches Papier eingetragen.
- Durch die Messwerte wird eine Ausgleichsgerade gelegt, und die Halbwertszeit von ${}_{49}^{116}\text{In}^{67}$ abgelesen.
- Schätzen Sie den Fehler der gemessenen Halbwertszeit ab indem Sie die beiden Geraden mit der größten und kleinsten Steigung einzeichnen und jeweils die Halbwertszeit ablesen. Geben Sie das Ergebnis Ihrer Messung in der Form XX_{-zz}^{+yy} Minuten an.
- Berechnen Sie mit dem in c) abgeschätzten Fehler (Mittelwert der Abweichungen) die Anzahl der Standardabweichungen zwischen Ihrem Messwert und dem Tabellenwert für die Halbwertszeit von ${}_{49}^{116}\text{In}^{67}$.
- Berechnen Sie aus der Halbwertszeit die mittlere Lebensdauer und die Zerfallskonstante.

4.7.6 Anwendungsbeispiele aus der Medizin

- Bedeutung und Interpretation statistischer Größen.
- Stichprobenuntersuchungen (z.B. Leukozytenauszählung).
- Klinische Tests von Medikamenten.

In der Medizin beruhen sehr viele Erkenntnisse, insbesondere über die Wirksamkeit von Therapien und Medikamenten, rein auf statistischen Betrachtungen von Patientenkollektiven.

Cave: Hier ist bereits schon beim Design einer Studie sehr darauf zu achten, dass die statistische Auswertung nicht von vornherein beeinflusst wird. Auch ist es wichtig, sich bei jeder Auswertung zu verdeutlichen, welche Statistik angewendet werden darf und was eine Aussage über Signifikanz tatsächlich bedeutet. Hier sei auf das Fach Biometrie verwiesen.

- Wechselwirkung von Strahlung mit der Materie des menschlichen Körpers
- Wirkung von ionisierender Strahlung im menschlichen Körper
- Geräte zum Nachweis und Lokalisierung radioaktiver Substanzen (z.B. Szintigramm)
- Radionuklide in Diagnose und Therapie
- Exponentialgesetz für Wachstum und Zerfall
- Natürliche und künstliche Radioaktivität
- Biologische Halbwertszeit

Durch ionisierende Strahlung erzeugte Radikale richten in der Regel größeren Schaden durch nachfolgende chemische Reaktionen an, als die Zerstörung des ersten Moleküls durch die Strahlung allein. Dieser ist, etwa bei der Krebsbekämpfung, erwünscht, da er das Absterben getroffener Zellen, in diesem Fall idealerweise Tumorzellen, begünstigt.

Grundsätzlich dürften alle ionisierenden Strahlen für Lebewesen gesundheitsschädlich sein über das Ausmaß der Schädlichkeit gehen die Ansichten auseinander:

- Ab kurzfristigen Belastungen von etwa 0.25 Sv tritt die Strahlenkrankheit auf. 4 Sv als Kurzzeitbestrahlung ist in der Regel tödlich. Sie äußert sich durch ein geschwächtes Immunsystem und Verbrennungen. Ohne Zweifel werden ab einer hohen Strahlendosis (größer als etwa 2 Gy) so viele Moleküle mit biologischer Funktion auf einmal zerstört, dass betroffene Zellen nicht mehr lebensfähig sind. Es entstehen auch zu viele zu giftige Substanzen durch den Zerfall von Molekülen, die die Zelle abtöten. Auf molekularer Ebene ist unter anderem die schädigende Wirkung von durch Radiolyse entstehenden Radikalen beteiligt. Als Langzeitfolge sind auch Veränderungen des Erbguts häufig, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in Krebs münden können, vor allem aber in Mutationen, die zu Missbildungen an Nachkommen oder sich entwickelnden Embryonen/Föten sowie totaler Sterilität (Unfruchtbarkeit) führen können.
- Bei mittleren Dosen um 0.1 Gy, was etwa der natürlichen Strahlenbelastung entspricht, gibt es keine auffallenden Beobachtungen, denn offenbar haben sich die Immunsysteme sämtlicher Lebewesen im Lauf der Evolution darauf eingestellt.
- Die Auswirkungen sehr geringer Dosen um 0.02 Gy werden kontrovers diskutiert:
 1. Die meisten Fachleute vermuten, dass die Schädlichkeit ionisierender Strahlen linear mit abnehmender Intensität sinkt. Das klingt plausibel, wurde aber nie nachgewiesen.
 2. Deutlich weniger Wissenschaftler registrieren zunehmend Hinweise, dass das Immunsystem dann mangels Aktivität "einschläft" und die Anfälligkeit für Krankheiten steigt. Es ist umstritten, ob eine Reduktion der natürlichen Strahlenbelastung krankheitsfördernd ist (vgl. Hormesis).

Die Alphastrahlung hat auf lebendes Gewebe durch ihre Ionisierungsfähigkeit eine besonders hohe schädliche Wirkung, jedoch besitzt sie in Luft eine Reichweite von nur wenigen Zentimetern und kann durch ein einfaches Blatt Papier vollständig abgeschirmt werden (den gleichen Zweck erfüllen die obersten abgestorbenen Hautschuppen), so dass Alphastrahler, die sich außerhalb des menschlichen Körpers befinden, weitgehend ungefährlich sind. Gefährlich sind Alphastrahler, wenn sie in direkten Kontakt mit lebendem Gewebe kommen. Ein Weg dafür ist das Einatmen von Aerosolen, die über die Schleimhäute des Atemweges aufgenommen werden; radioaktiver Staub wird in der Lunge eingelagert und kann dort Krebs auslösen. Das Edelgas Radon wird zwar nicht eingelagert, gefährdet aber während des Einatmens durch Zerfälle in der Lunge. Wenn ein Alphastrahler mit

einer Halbwertszeit von einigen Tagen durch Nahrung aufgenommen wurde oder durch Injektion in den Blutkreislauf gebracht wurde, können bereits wenige Mikrogramm für Menschen tödlich sein. Andererseits ist es bemerkenswert, dass beispielsweise Bad Gastein ein seit dem Mittelalter berühmtes Heilbad ist, dessen Heilwasser sich lediglich durch hohe Temperatur und den Gehalt an Radon auszeichnet (Radonbalneologie).

4.8 Versuch 18: Radiometrie von Röntgenstrahlung

4.8.1 Relevante Begriffe und Gesetze

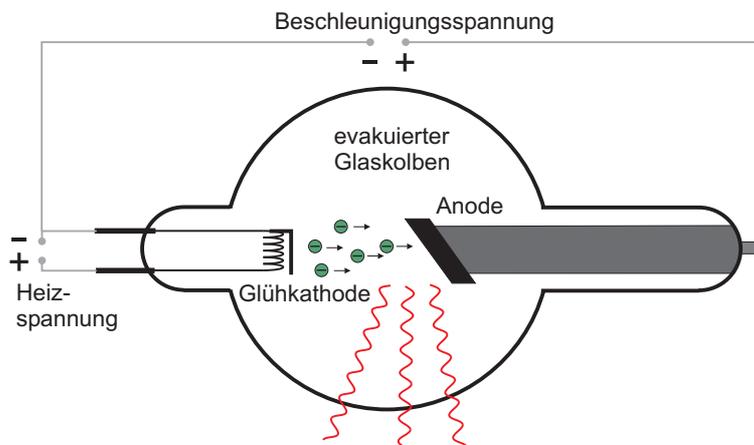


Abbildung 38: Aufbau einer Röntgenröhre.

Eine Röntgenröhre besteht aus einem evakuierten Glaskolben und zwei Elektroden. An der Kathode werden durch Glühemission freie Elektronen erzeugt. Zwischen Kathode und Anode liegt eine Beschleunigungsspannung von typischerweise 10 kV bis 100 kV an. Dadurch werden die Elektronen in Richtung Anode beschleunigt und beim Aufprall durch das Coulombfeld der Atomkerne des Anodenmaterials abgebremst. Die dabei verlorene Energie wird teilweise in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt. Da der Energieverlust der Elektronen beim Abbremsen unterschiedlich groß ist, entsteht ein kontinuierliches Spektrum, welches als Bremsspektrum bezeichnet wird (Abbildung 39). Auf der kurzwelligen Seite setzt das Bremsspektrum erst oberhalb einer Grenzwellenlänge λ_{gr} ein. Dies folgt unmittelbar aus der Energieerhaltung: Haben die Elektronen die Spannung U durchlaufen, so besitzen sie eine Energie $E = eU$. Wird nun ein Elektron in einem einzigen Prozess abgebremst, so wird diese Energie vollständig in Röntgenstrahlung der Energie $h\nu$ umgewandelt. Für die Grenzwellenlänge λ_{gr} ergibt sich dann:

$$E = eU = h\nu_{gr} = h\frac{c}{\lambda_{gr}} \Rightarrow \lambda_{gr} = \frac{hc}{eU}, \quad (52)$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und c die Lichtgeschwindigkeit darstellen.

Bei entsprechend hohen Beschleunigungsspannungen ist dem kontinuierlichen Bremsspektrum zusätzlich noch ein diskretes Linienspektrum überlagert. Da dieses vom Anodenmaterial der Röntgenröhre abhängt wird es auch als charakteristisches Spektrum bezeichnet. Die in der Röntgenröhre beschleunigten Elektronen können ihre Energie auch durch Ionisation des Anodenmaterials verlieren. Wird ein Elektron aus den innersten Elektronenschalen herausgeschlagen, so kann die entstehende Lücke durch ein Elektron aus einer höher liegenden Schale gefüllt werden. Dabei wird die freiwerdende Bindungsenergie in Form eines Röntgenquants abgestrahlt.

Je nachdem von welcher und auf welche Schale der Elektronenübergang stattfindet, gibt es mehrere mögliche Übergänge die sich zu Serien zusammenfassen lassen können. Erfolgt der Übergang stets auf die innerste Schale, die K-Schale, so spricht man von Übergängen der K-Serie: Beim Übergang eines Elektrons von der L-Schale auf die K-Schale wird K_α -Strahlung emittiert, beim Übergang von der M-Schale auf K-Schale handelt es sich um K_β -Strahlung. In Abbildung 40 links, sind mögliche Übergänge anhand des Termschemas von Molybdän dargestellt.

Die Energie der charakteristischen Linien, lässt sich mit Hilfe des Moseley'schen Gesetz abschätzen. Für den Übergang von der n -ten auf die m -te Schale gilt:

$$E_{n \rightarrow m} = hcR_\infty(Z - A)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (53)$$

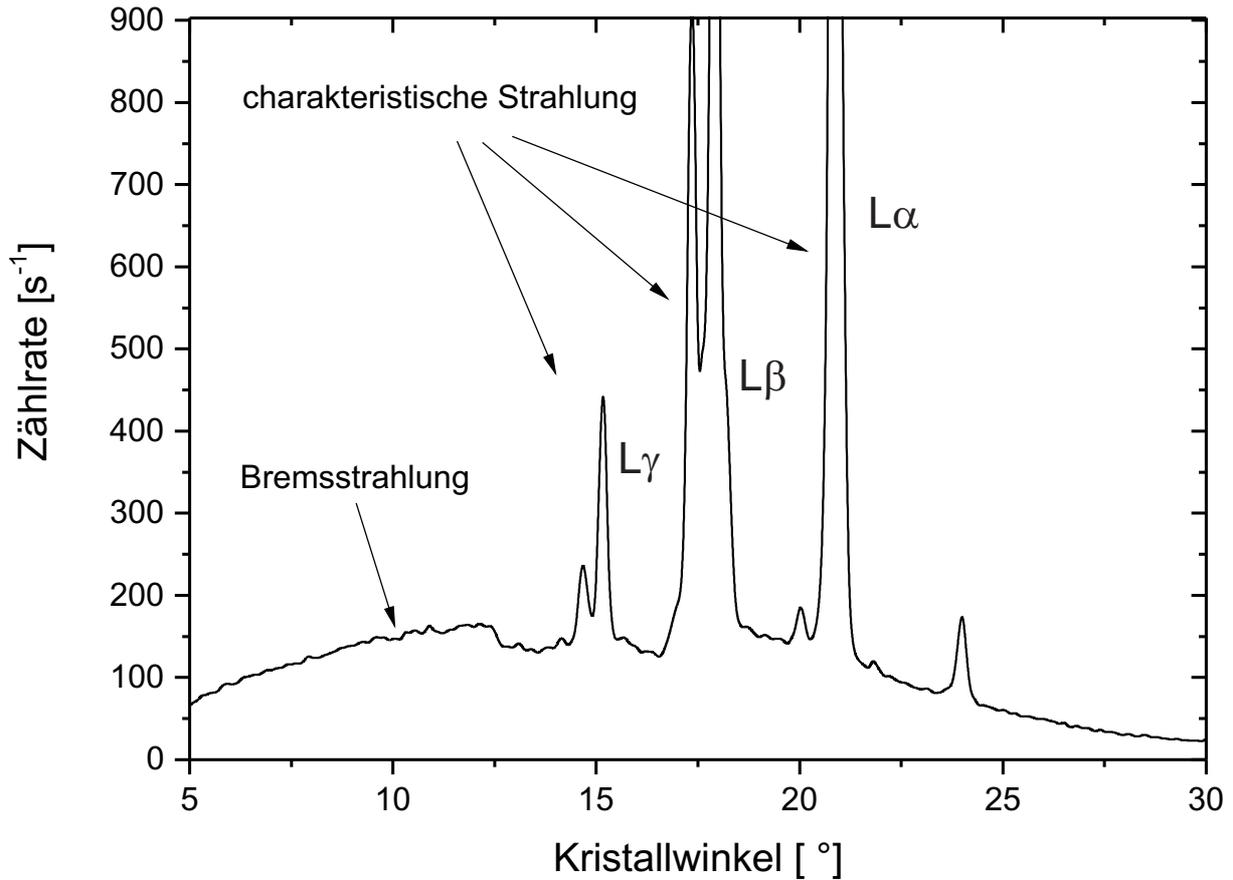


Abbildung 39: Röntgenspektrum.

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum, c die Lichtgeschwindigkeit, R_∞ die Rydbergkonstante ($R_\infty = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$), Z die Kernladungszahl und n bzw. m die jeweiligen Hauptquantenzahlen darstellen. Bei der Größe A handelt es sich um eine Abschirmungskonstante, die die Abschirmung der Kernladung durch Elektronen berücksichtigt. Bei der K_α -Strahlung wird der Kern nur von einem Elektron abgeschirmt. Hierfür gilt in guter Näherung $A \approx 1$:

$$K_\alpha\text{-Strahlung: } E_{2 \rightarrow 1} = h c R_\infty (Z - 1)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} h c R_\infty (Z - 1)^2. \quad (54)$$

Für die Energie der K_α -Strahlung von Molybdän erhält man aus dem Moseley'schen Gesetz $E = 17,2 \text{ keV}$. Dies ist eine gute Übereinstimmung mit dem Literaturwert von $E = 17,4 \text{ keV}$.

Das Moseley'schen Gesetz liefert nur eine Abschätzung der Energie der charakteristischen Strahlung. Tatsächlich besitzen alle Energieniveaus bis auf das K-Niveau noch eine Feinstruktur dessen Energie neben der Hauptquantenzahl auch von der Drehimpulsquantenzahl und von der Spinquantenzahl abhängt (Abbildung 40 rechts). So ist beispielsweise das L-Niveau dreifach entartet. Dadurch ergeben sich zwei verschiedene K_α -Übergänge. Der Übergang $L_{III} \mapsto K$ wird als $K_{\alpha 1}$ und $L_{II} \mapsto K$ als $K_{\alpha 2}$ bezeichnet. Der Übergang $L_I \mapsto K$ ist unter Berücksichtigung von Erhaltungssätzen nicht möglich. Diese zusätzlichen Niveaus führen dazu, dass die K_α -Linie eine Doppellinie darstellt.

Das im Praktikum verwendete Röntgengerät besitzt eine Wolframanode. Die Energien der K-Linien liegen bei 59 keV bzw. 67 keV . Da die maximale Energie des Röntgengeräts nur 35 keV beträgt, können diese nicht angeregt werden. Im Spektrum sind daher nur die L-Linien sichtbar.

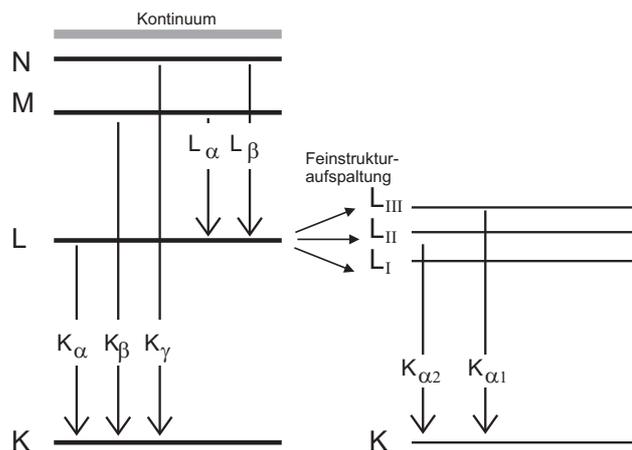


Abbildung 40: Vereinfachtes Termschema eines Atoms.

Bragg-Reflexion

Zur Untersuchung des Spektrums einer Strahlungsquelle greift man in der Regel auf zwei verschiedene physikalische Prinzipien zurück: Die Dispersion und die Beugung, die im sichtbaren Bereich Anwendung im Prismenspektrometer bzw. im Gitterspektrometer finden. Für Röntgenstrahlung kann die Dispersion nicht ausgenutzt werden, da der Brechungsindex von Materie in diesem Wellenlängenbereich kaum von Eins abweicht. Auch die Ausnutzung von Beugungseffekten ist für Röntgenstrahlung komplizierter. Da Beugungserscheinung nur dann auftreten, wenn die Größe des beugenden Objekts etwa der Größenordnung der Wellenlänge ($\lambda \approx 0,1 \text{ pm bis } 10 \text{ nm}$) entspricht, benötigt man ein Gitter mit äußerst kleinen Strukturen. Solche Dimensionen sind technisch kaum realisierbar.

1912 hat Max von Laue einen Kristall mit Röntgenstrahlung durchleuchtet. Dabei beobachtete er ein gleichförmiges Beugungsmuster, woraus er schloss, dass die Atome im Kristall regelmäßig angeordnet sind. Da die Atomabstände im Kristall von der gleichen Größenordnung wie die Wellenlänge sind, eigenen sich solche Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen. 1913 gelang es schließlich William Henry Bragg und seinem Sohn William Lawrence Bragg den Zusammenhang zwischen der Kristallstruktur und den entstehenden Beugungsmustern zu erklären. Die Röntgenbeugung an Kristallen wird daher auch als Bragg- Reflexion bezeichnet.

Trifft Röntgenstrahlung unter dem Winkel ϑ (Abbildung 41a) auf die Oberfläche eines Kristalls, so wird dieser gemäß des Reflexionsgesetzes reflektiert. Da die Strahlung tief in den Kristall eindringen kann, finden zusätzliche Reflexionen an tiefer gelegenen Netzebenen statt. Die Intensität der reflektierten Gesamtstrahlung hängt vom Gangunterschied Δs der teilreflektierten Strahlung ab. Beträgt dieser für zwei benachbarte Teilbündel ein Vielfaches der Wellenlänge λ , so interferieren diese konstruktiv. Ist dies nicht der Fall, so löschen die teilreflektierten Strahlen aus (Vielstrahlinterferenz). Ist d der Netzebenenabstand, so folgt aus Abbildung 41a) für den Gangunterschied Δs :

$$\Delta s = 2d \sin \vartheta \quad (55)$$

und damit das Bragg'sche Gesetz:

$$2d \sin \vartheta = n \lambda, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{Bragg'sches Gesetz.} \quad (56)$$

Die unter dem Winkel ϑ reflektierte Strahlung hängt demnach von der Wellenlänge der Röntgenstrahlung sowie von der Kristallstruktur (Netzebenenabstand) ab. Somit eignet sich die Bragg- Reflexion zur Monochromatisierung von Röntgenstrahlung und damit zur Messung des Spektrums einer Röntgenquelle. Bei der Drehkristallmethode (Abbildung 41b) wird der Einfallswinkel ϑ variiert, in dem der Kristall um eine Achse senkrecht zur einfallenden Strahlung gedreht wird. Bei jeder Winkelstellung besitzt die reflektierte Röntgenstrahlung eine bestimmte Wellenlänge dessen Intensität z.B. mit einem Zählrohr gemessen werden kann. Das Spektrum in Abbildung 39 wurde nach diesem Verfahren gemessen.

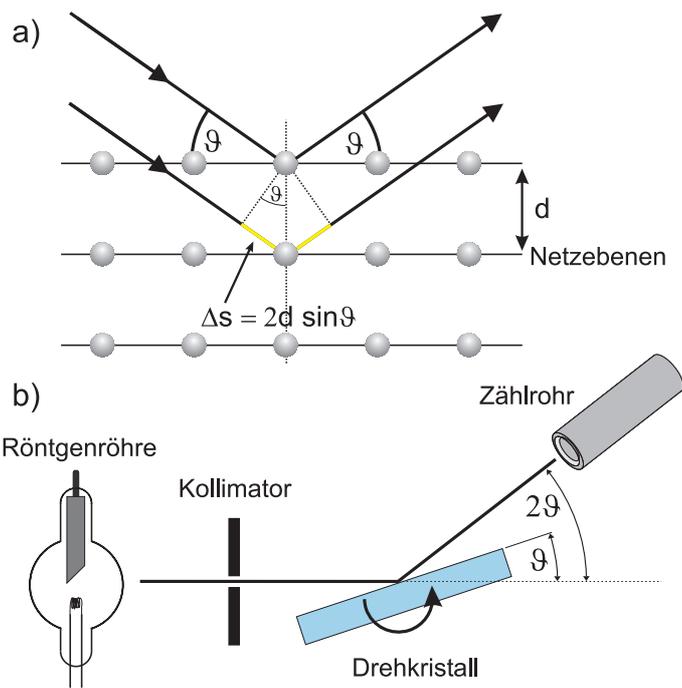


Abbildung 41: a) Bragg- Reflexion von Röntgenstrahlung an einem Kristall. b) Drehkristallmethode zur Messung des Spektrums einer Röntgenröhre.

Wechselwirkung mit Materie

Die Schwächung von Röntgenstrahlung beim Durchgang durch Materie hängt im wesentlichen von zwei Mechanismen ab:

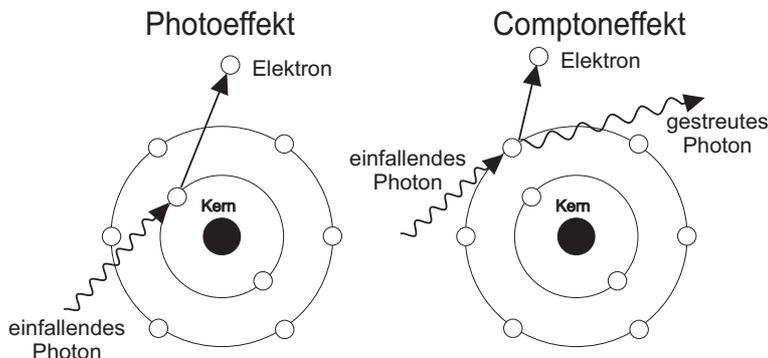


Abbildung 42: Absorption von Röntgenstrahlung durch Photoeffekt und Comptoneffekt.

1. Photoeffekt: Ein Röntgenquant gibt seine Energie an ein Elektron in der Atomhülle ab und schlägt dieses aus der Hülle. Durch Nachrücken äußerer Elektronen, kommt es zu charakteristischer Strahlung. Jedesmal wenn die Energie der γ -Quanten ausreicht, um eine tiefer gelegene Schale zu ionisieren, steigt die Absorption schlagartig an. Diese charakteristischen Linien sitzen auf einem kontinuierlichen Absorptionsspektrum (Abbildung 43).
2. Comptonstreuung: Ein Röntgenquant wird inelastisch an einem Hüllenelektron gestreut und verliert dadurch einen Teil seiner Energie. Der Energieverlust wächst für höhere Energien an.

Für kleine Energien dominiert der Photoeffekt, welcher mit steigender Energie rasch abnimmt bis die Comptonstreuung dominiert. Bei sehr großen Energien tritt ein weiterer Effekt auf (Paarbildung). In diesem Energiebereich spricht man dann nicht mehr von Röntgenstrahlung sondern von γ -Strahlung.

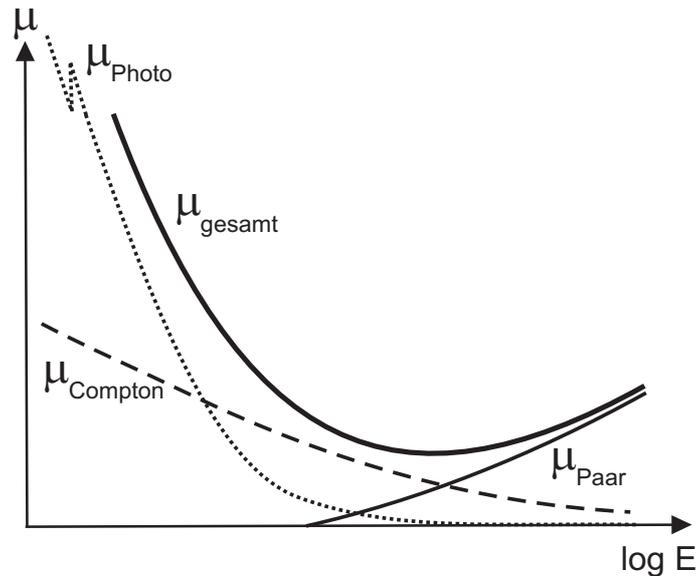


Abbildung 43: Beitrag des Photoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung zum Schwächungskoeffizient für Röntgen- bzw. γ -Strahlung.

Für monoenergetische Strahlen kann die Intensität der Röntgenstrahlung aufgefasst werden als die Zahl der Photonen, die pro Zeit durch eine Flächeneinheit tritt. Einheit = $1/(\text{m}^2 \text{ s})$

Für die Intensität gilt das Absorptionsgesetz.

$$I_d = I_0 e^{-\mu d}$$

- I_d = Intensität hinter der absorbierenden Schicht der Schichtdicke d
- I_0 = Intensität vor der absorbierenden Schicht
- μ = Absorptionskoeffizient (Einheit $1/\text{cm}$)
- d = Schichtdicke (Einheit cm)

Statt der Schichtdicke führt man oft die Masse pro Fläche (Flächendichte) ein: ρd (ρ = Dichte)

Dann ist

$$I = I_0 e^{-(\mu/\rho)\rho d}$$

Die Größe μ/ρ bezeichnet man als Massenabsorptionskoeffizient.

Wie der radioaktive Zerfall ist die Absorption von Röntgenstrahlen ein statistischer Prozess. Das Absorptionsgesetz beschreibt die nach der Dicke d noch vorhandenen Röntgenquanten, liefert jedoch keine Aussage über ein einzelnes Quant. Analog zum radioaktiven Gesetz können wir hier die Halbwertsdicke einführen, d.h. die Dicke, nach der noch die Hälfte der ursprünglichen Quanten vorhanden ist.

$$H_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Die Halbwertsdicke hängt von der spektralen Zusammensetzung der Röntgenstrahlen ab. Langwellige, d.h. energieärmere ("weiche") Röntgenstrahlung wird stärker absorbiert als kurzwellige ("harte") Strahlung.

Für *monoenergetische* Strahlung gilt:

$$I_d = I_0(d=0) e^{-\mu d}$$

d = Dicke des Absorbers

μ = linearer Absorptionskoeffizient, gemessen in m^{-1} .

μ ist um so größer, je "dichter gepackt" die Atome im Absorber liegen, d.h. μ ist der Atomdichte proportional. Zur physikalischen Charakterisierung eines Absorbermaterials zieht man daher besser den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ heran. (ρ = Dichte des Materials; μ/ρ wird gemessen in cm^2/g). μ/ρ hängt von der Energie $h\nu$ der Strahlung, der Ordnungszahl Z und der Massenzahl A des Absorbers ab.

Für die Absorption durch Photoeffekt gilt näherungsweise:

$$\text{Photoeffekt } (\gamma + \text{Atom} \rightarrow \text{Ion}^+ + e^-) \quad \frac{\mu_{\text{Photo}}}{\rho} \sim \frac{Z^4}{\nu^3} \frac{1}{A} \approx \lambda^3 Z^3$$

Die Absorption bei Streuung spielt vor allem für Elemente mit kleinem Z und für hochenergetische Röntgenstrahlung eine Rolle.

Anwendungen der Z - und ν - Abhängigkeit des Photoeffekts:

- a) Kontrast in Röntgenaufnahmen (höheres Z in Knochen, Kontrastmittel)
- b) Filterung von Röntgenstrahlung durch Absorber, um weiche Komponenten (ν klein) zu beseitigen. (Härtung von Röntgenstrahlen)

4.8.2 Versuchsvorbereitung

Was man wissen sollte:

Funktionsweise einer Röntgenröhre. Röntgenspektren (charakteristische Röntgenstrahlung, kontinuierliches Spektrum), Bremsstrahlung. Absorptionsgesetz für Röntgenstrahlung, welche Prozesse sind für die Absorption verantwortlich? Nachweis von Röntgenstrahlen. Flächendichte, Halbwertsdicke. Bragg-Reflexion, Moseley'sches Gesetz. Begriff der Energiedosis, der Ionendosis und der relativen biologischen Wirksamkeit.

Strahlenschutz (s. Abschnitt 2.5))

Verständnisfragen, Aufgaben als Teil der Vorbereitung

1. Erklären Sie den Aufbau und das Funktionsprinzip einer Röntgenröhre. In welchem Bereich liegt die Beschleunigungsspannung? Welche Größe bestimmt die Intensität der Röntgenstrahlung?
2. Das Spektrum einer Röntgenröhre ist eine Überlagerung aus einem Bremsspektrum und einem charakteristischen Spektrum. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser beiden Spektren. Wovon hängt das charakteristische Spektrum ab?
3. Wie hoch ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, wenn es eine Beschleunigungsspannung von 30 kV durchlaufen hat?
4. Was besagt das Moseley'sche Gesetz?
5. Wie lautet das Bragg'sche Gesetz? Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Röntgenbeugung das Spektrum einer Röntgenquelle messen kann.
6. Geben Sie für folgende Größen den Zusammenhang zwischen den Werten vor und hinter einem Absorber der Dicke d an: Energie, Intensität, Anzahl der Röntgenquanten.
7. Der Absorptionskoeffizient des menschlichen Körpers (Weichteile) entspricht dem von Wasser (Massenabsorptionskoeffizient bei 50 keV: $\mu/\rho=0,2 \text{ cm}^2/\text{g}$). Berechnen Sie für monoenergetische Röntgenstrahlung von 50 keV jeweils für $d = 1 \text{ cm}$, 5 cm , 10 cm , 20 cm und 30 cm den Anteil der Strahlung, der im Körper stecken bleibt.

4.8.3 Versuchsbeschreibung

Zubehör:

Röntgengerät mit Röntgenröhre (Wolfram-Anode)
Goniometer
Zählrohr
LiF-Kristall
Computer mit Drucker



Abbildung 44: Versuchsaufbau.

Gerätebeschreibung

Das im Praktikum eingesetzte Röntgengerät ist als Zählrohr-Goniometer (Abbildung 45) ausgeführt, mit schwenkbarem Messarm und einem Probenträger in der Drehachse. Die Drehwinkel von Messarm und Probenträger können im Verhältnis 2:1 gekoppelt werden, so dass beim Nachweis der Bragg-Reflexe und bei der Aufnahme von Röntgenspektren das auf dem Messarm befestigte Zählrohr immer die richtige Position zum Auffangen der Reflexe hat, d.h. die Probennormale halbiert stets den Winkel zwischen Primär-Strahlrichtung und der Richtung der reflektierten Strahlung. Die Röntgenröhre (Wolframanode, maximal 35 kV, 1 mA) ist in einem separaten Röhrenraum untergebracht, der zur Abschirmung - wie auch der Experimentierraum mit dem Goniometer - mit einer Bleiglas-Schiebetür verschlossen wird. Am Übergang zum Experimentierraum ist ein Kollimator eingesetzt. Der Kristall ist fest an der Drehachse des Goniometers fixiert. Beide Goniometerarme sind unabhängig voneinander durch Schrittmotoren zu schwenken, die kleinste mögliche Schrittweite beträgt 0,1. Weiterhin ist es möglich, das Goniometer im gekoppelten Modus (1:2-Kopplung) zu betreiben, so dass der Winkel des Messarms immer das Doppelte des Winkels des Targetarms beträgt. Dieser Modus ist für die Messungen der Bragg-Reflexion zu wählen. Die reflektierte Strahlung wird mit einem am Messarm befestigten Geiger-Müller-Zählrohr nachgewiesen. Die Spannungsversorgung des Zählrohrs und der Impulszähler sind, genau wie die Steuerung des Goniometers, in das Röntgengerät integriert und über das Bedienfeld rechts von der Röntgenröhre zu steuern. Über das dort platzierte Display lassen sich die Messwerte anzeigen.

Die Einstellung des Gerätes kann auch rechnergesteuert mit einem PC erfolgen. Starten Sie dazu die Software `measure` vom Desktop aus. Im Programm ist eine Symboldarstellung des Röntgengeräts dargestellt. Zum Einstellen der Parameter müssen Sie auf die entsprechenden Bereiche der Symboldarstellung doppelklicken. Soll z.B. die Beschleunigungsspannung eingestellt werden, müssen Sie auf die Röntgenröhre klicken- soll der Winkelbereich modifiziert werden, müssen Sie auf das Goniometer doppelklicken (siehe gelbe Markierungen in Abbildung 46).

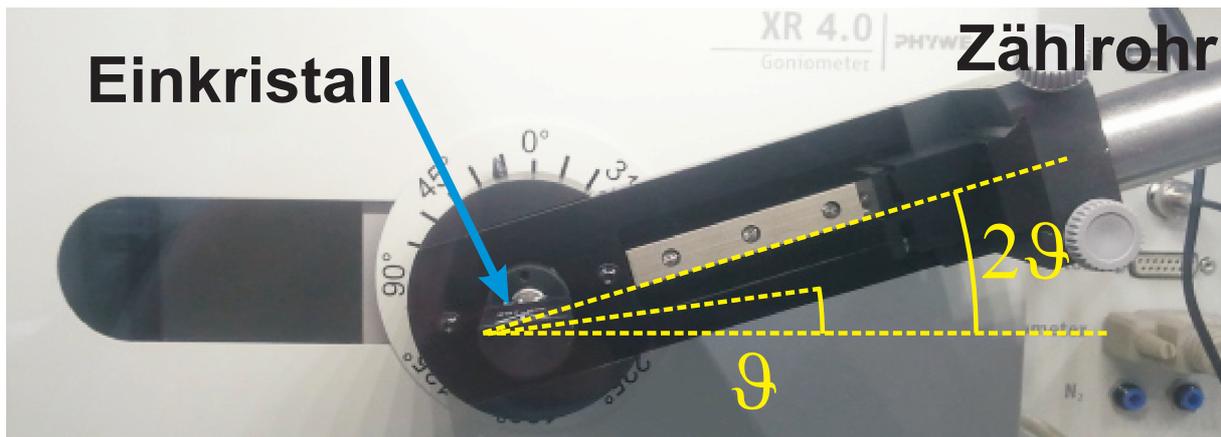


Abbildung 45: Aufbau des Goniometers.

Für die Messung der Absorption von Röntgenstrahlung befindet sich im Gerät direkt hinter dem Kollimator, eine drehbar gelagerte Scheibe mit 9 verschiedenen Aluminiumabsorbern (Abbildung 47). Die Dicke variiert von 0,02 mm bis 0,18 mm in Schritten von 0,02 mm. Der jeweilige Absorber kann mit den Pfeiltasten am Steuergerät, das sich außerhalb des Röntgengeräts befindet, ausgewählt werden. Mit der rechten Pfeiltaste wird der Absorber in die Nullposition gestellt. Die gewählte Absorberdicke wird durch Leuchtdioden angezeigt.

4.8.4 Aufgabenstellung

- Nehmen Sie bei einer Röhrenspannung von 35 kV das Röntgenspektrum einer Wolfram-Anode auf.
- Messen Sie den Reflexionswinkel der L_{α} - Linie in der ersten Beugungsordnung und bestimmen Sie daraus die Wellenlängen und Energie dieser Linie.
- Röntgenabsorption: Messen Sie die Intensität der L_{α} - Linie in Abhängigkeit unterschiedlich dicker Absorberfolien.

4.8.5 Versuchsdurchführung

a) Messen Sie das Röntgenspektrum der Wolfram-Anode.

Überzeugen Sie sich, dass die Absorberscheibe auf Null steht (Leuchtdiode leuchtet beim Wert $0 \mu\text{m}$). Schalten Sie das Röntgengerät auf der Rückseite neben dem Netzstecker ein. Starten Sie das Programm `measure` vom Desktop aus. Klicken Sie doppelt in der Symboldarstellung auf die Röntgenröhre (Abbildung 46) und wählen Sie für die Röhrenspannung 35 kV und für den Emissionsstrom 1 mA. Stellen Sie anschließend den Scanbereich ein indem Sie doppelt auf das Goniometer klicken. Wählen Sie folgende Einstellungen:

- Modus: 1:2 Kopplung
- Kristall: LiF
- Kristall Startwinkel: 5°
- Kristall Stoppwinkel: 30°
- Kristall Schrittweite: $0,1^{\circ}$
- Integrationszeit: 5 s.

Messung starten

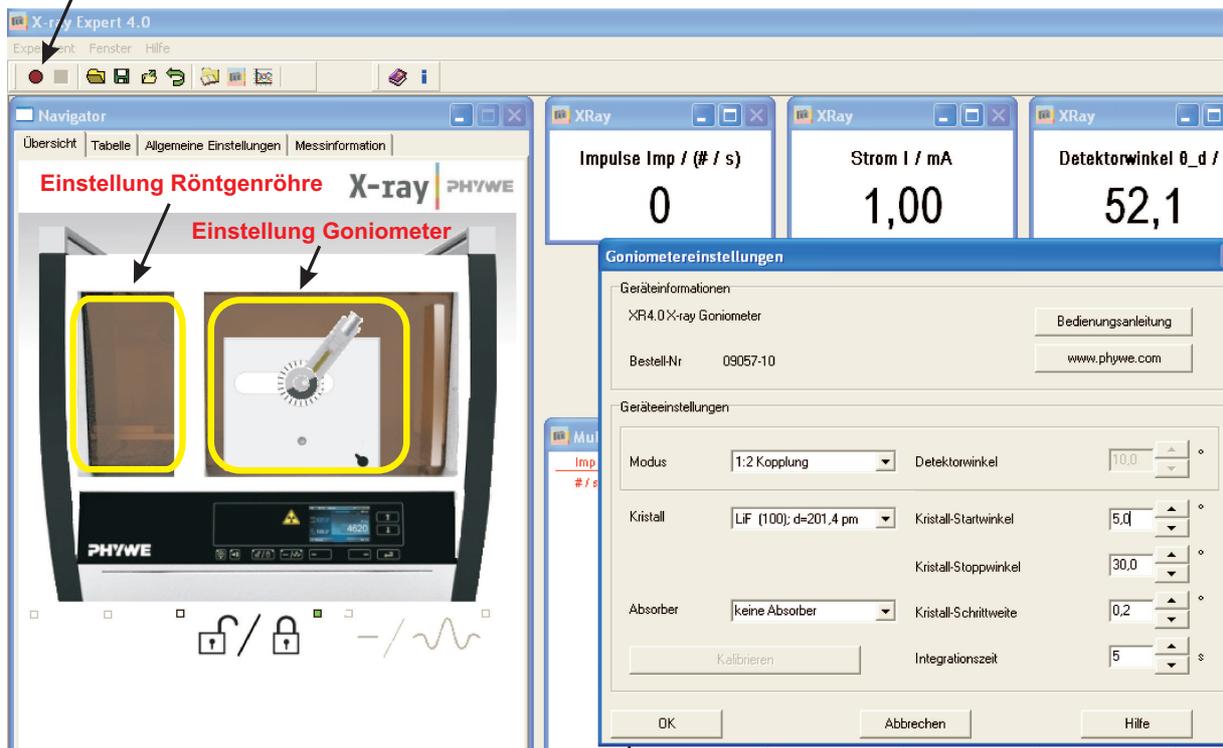


Abbildung 46: Einstellung der Geräteparameter.

Verriegeln Sie die Tür des Röntgengeräts mit dem Taster unter dem Schlosssymbol auf der Frontplatte des Röntgengeräts. Das verriegelte Schloss muss leuchten. Falls dies nicht möglich ist, müssen Sie die Tür des Röntgengeräts von Hand öffnen, wieder schließen und erneut auf den Taster drücken. Starten Sie im Programm die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol in der linken Ecke der Menüleiste (Abbildung 46).

Die Messung dauert nun etwa 20 Minuten. Danach stoppt der Messvorgang automatisch und es erscheint ein Hinweisfenster. Wählen Sie die Option **alle Messungen an measure uebertragen** aus. Dadurch startet ein neues Programm in dem Sie die Daten auswerten und ausdrucken können. Vermessen Sie die Lage der charakteristischen Linien. Am einfachsten geht dies mit der Option **Peakanalyse** im Menü **Messauswertung**. Aktivieren Sie im folgenden Fenster die Option **Ergebnisse einzeichnen** und klicken Sie auf **Berechne**. Schließen Sie das Fenster und drucken Sie das Diagramm aus.

- b) Lesen Sie aus Ihrer Messung die Lage der L_{α} Linie ab (stärkste Linie). Gehen Sie zurück zum Messprogramm indem Sie auf das Icon ganz rechts in der Symbolleiste klicken. Wiederholen Sie die Messung aus a) in einem schmalen Bereich (1° - 2°) um die L_{α} Linie mit einer Integrationszeit von 20 s. Drucken Sie das Diagramm im Auswerteprogramm aus.
- c) Messung der Absorption von monochromatischer Röntgenstrahlung. Die Messung soll mit Röntgenquanten gleicher Energie erfolgen. Da die L_{α} Linie die höchste Intensität im Spektrum besitzt, wird das Goniometer auf diesen Winkel eingestellt. Klicken Sie wieder doppelt auf das Goniometer und wählen Sie für die Option **Kristall Startwinkel** den von Ihnen bestimmten Wert der L_{α} Linie. **Kristall Stoppwinkel** müssen Sie auf einen etwas größeren Wert stellen. Die Integrationszeit stellen Sie auf 60 s ein. Starten Sie die Messung durch einen Klick auf das Kreissymbol und beenden Sie diese Messung sofort wieder durch einen Klick auf das Symbol mit dem Quadrat. Der Winkel ist jetzt fest eingestellt. Schalten Sie die Röntgenröhre am Bedienfeld des Röntgengeräts ein. Das Wellensymbol  muss leuchten. Die Intensität wird nun am Display angezeigt und

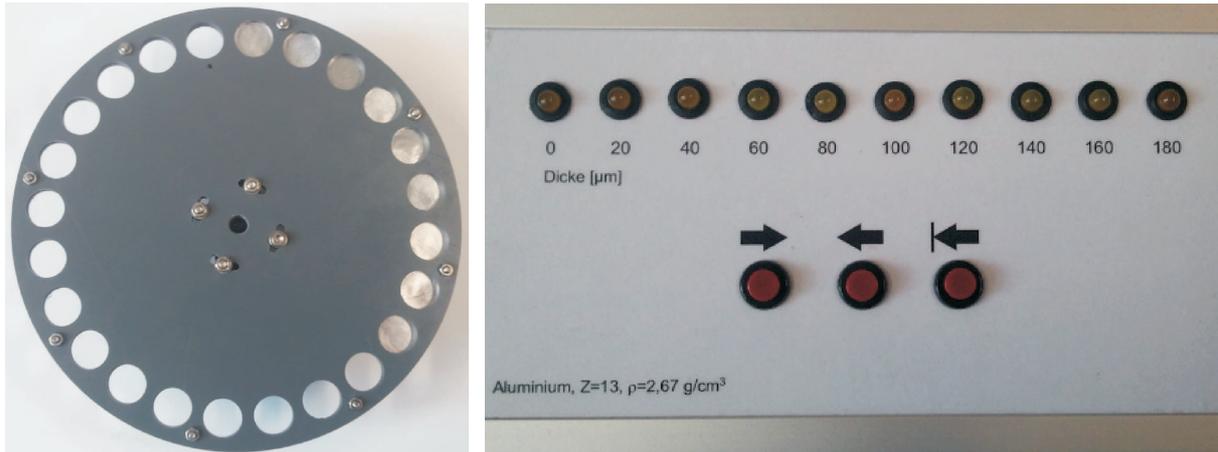


Abbildung 47: Absorberscheibe mit Steuergerät.

nach Ablauf der Integrationszeit fortlaufend aktualisiert. Wählen Sie am Steuergerät für die Absorberscheibe den Wert Null und lesen Sie die Intensität am Display ab. Notieren Sie nicht den ersten aktualisierten Wert auf dem Display sondern warten Sie ab bis der Wert auf dem Display erneut aktualisiert wurde. Wiederholen Sie dies für alle weiteren Absorberdicken. Auch hier ist es wichtig, dass Sie nicht direkt den Wert nach der Aktualisierung aufschreiben sondern einen weiteren Messzyklus abwarten. Sie müssen immer sicher sein, dass Sie mit jeder Einstellung tatsächlich genau 60 Sekunden gemessen haben. Notieren Sie bei jeder Messung die Absorberdicke und die gemessene Intensität. Tragen Sie die Messwerte sofort auf ein- bzw. zweidekadisches einfachlogarithmisches Papier auf (x-Achse: linear die Absorberdicke und y-Achse: logarithmisch die Intensität). Falls hier „Ausreißer“ auftreten, haben Sie die Möglichkeit einen einzelnen Wert nochmals nachzumessen.

4.8.6 Auswertung

- Bestimmen Sie aus dem Diagramm der L_{α} -Linie die Lage des Peakmaximums sowie die Halbwertsbreite (Breite der Linie in halber Höhe). Mit Hilfe der Bragg-Gleichung und dem Netzebenenabstand von Lithiumfluorid (LiF) mit $d=201,4$ pm, können Sie die Wellenlänge und damit die Energie der L_{α} -Linie berechnen. Den Fehler der Energie berechnen Sie analog aus der Halbwertsbreite. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert $E \approx 8,4$ keV.
- Tragen Sie im Diagramm der Absorptionmessung noch Fehlerbalken ein und zeichnen Sie eine Ausgleichsgerade und eine Fehlergerade mit ein. Bestimmen Sie hieraus die Halbwertsdicke und berechnen Sie den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ in der Einheit cm^2/g . Die Dichte von Aluminium beträgt $2,67$ g/cm^3 . Schätzen Sie den Fehler ab. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Literaturwert aus Abbildung 48.

4.8.7 Anwendungsbeispiele aus der Medizin

- Funktionsweise einer Röntgenröhre.

Eine Röntgenröhre ist eine Spezialform der Elektronenröhre. Sie besteht in ihrer einfachsten Form aus einer Kathode und einer Anode (früher auch als Antikathode bezeichnet), die in einem Vakuum innerhalb eines abgedichteten Glaskörpers sitzen. Bei Hochleistungsröhren wie sie in der Computertomographie (CT) und der Angiographie verwendet werden, besteht der Vakuumbehälter aus Metall, welches wesentlich größeren Wärmeeinflüssen standhält.

Von der Kathode werden Elektronen emittiert (ausgesandt), durch eine Hochspannung zur Anode beschleunigt und dringen in das Anodenmaterial ein. Dabei werden sie abgebremst und erzeugen zwei verschiedene Strahlungsarten: die sogenannte charakteristische Röntgenstrahlung und die

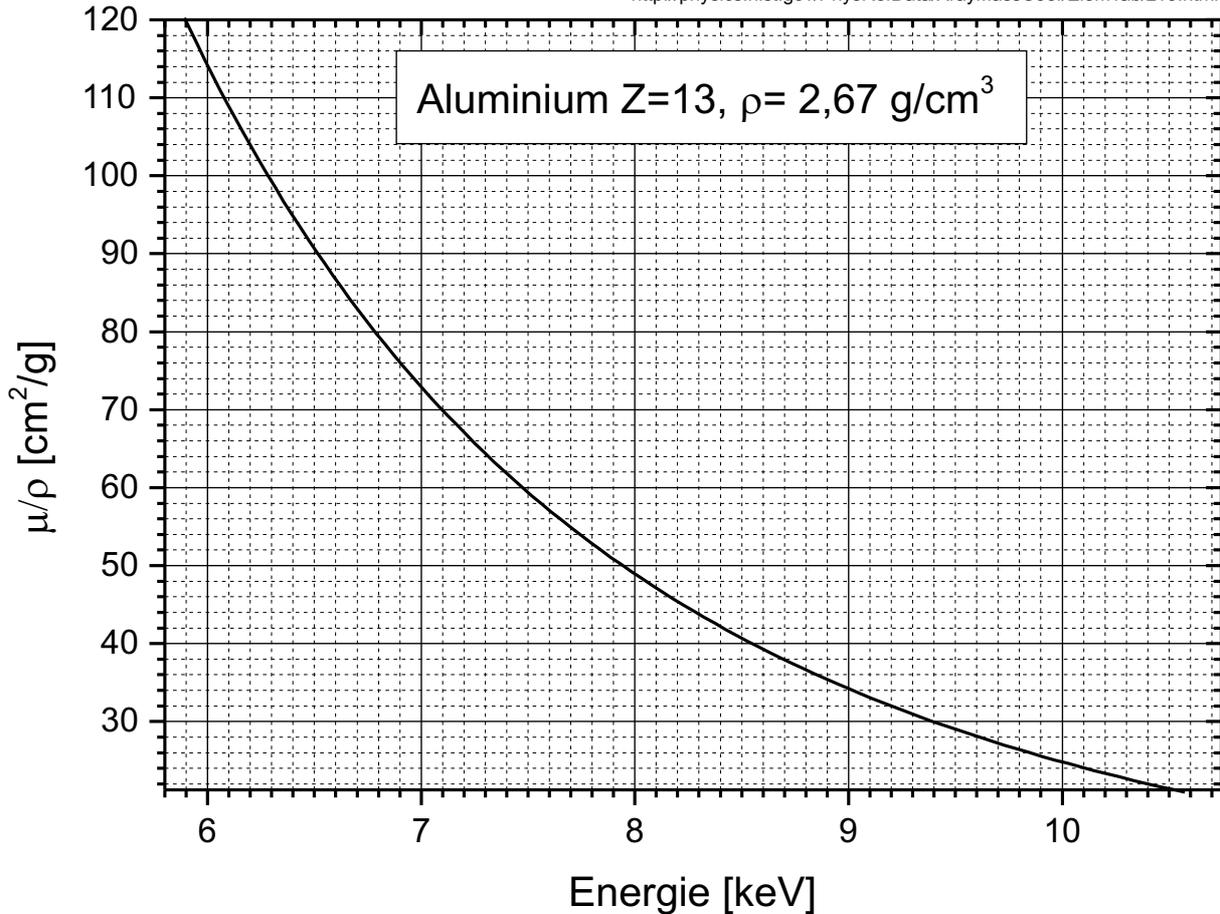


Abbildung 48: Massenabsorptionskoeffizient von Aluminium.

Bremsstrahlung mit der sog. Lilienfeldstrahlung (der sichtbare Anteil der Bremsstrahlung). Die Röntgenbremsstrahlung entsteht durch die Abbremsung der Elektronen beim Durchlaufen des Metalls der Anode: jede beschleunigte elektrische Ladung erzeugt elektromagnetische Strahlung. Die Wellenlänge der Strahlung hängt dabei vom Wert der Beschleunigung (bzw. Abbremsung) ab, so dass bei höherer Beschleunigungsspannung bzw. Anodenspannung härtere Röntgenstrahlung (energiereichere Quanten) entsteht. Das Bremsstrahlungsspektrum besitzt eine minimale Wellenlänge, bei der die gesamte kinetische Energie des Elektrons an ein einzelnes Photon abgegeben wird. Diese untere Grenzwellenlänge ist nur von der Anodenspannung abhängig und nicht vom Anodenmaterial.

Während bei Quellen für sichtbares Licht nur die äußeren Hüllenelektronen der Atome beteiligt sind, schlagen die in der Röntgenröhre beschleunigten energiereichen Elektronen in der Anode auch Elektronen aus den innersten Schalen der Atome des Anodenmaterials. In diese Lücken springen entweder Elektronen aus höheren Energieniveaus oder freie Elektronen. Da die Bindungsenergie der innersten Elektronenniveaus sehr groß ist, entsteht dabei kein sichtbares Licht, sondern die charakteristische Röntgenstrahlung mit materialtypischen diskreten Quantenenergien bzw. Wellenlängen. Diese diskrete bzw. charakteristische Röntgenstrahlung mit den jeweiligen Quantenenergien und somit Wellenlängen wird jedoch mit Ausnahme der Mammographie nicht oder nur zum kleinen Teil für die Bilderzeugung bei einer Röntgendiagnostik genutzt. Bei der Mammographie wird ein Anodenteller aus Molybdän mit entsprechenden Filtern verwendet, so dass in diesem Fall die K-Strahlung des Molybdäns für die Aufnahme der Milchdrüse verwendet wird.

- Röntgendiagnostik (Vergleich mit Ultraschall): Die unterschiedlich dichten Gewebe des menschlichen Körpers absorbieren die Röntgenstrahlen unterschiedlich stark, so dass man eine Abbildung

des Körperinneren erreicht. Bei einem Röntgenfilm bedeutet schwarz geringe Absorption, hell starke Absorption durch ein Körperorgan. Für unterschiedliche Bereiche des Körpers werden unterschiedliche Strahlenqualitäten benötigt, um unterschiedlich dichte Gewebe, wie z.B. Fettgewebe oder Knochen zu durchdringen. In der Röntgendiagnostik spricht man von weicher und harter Strahlung. Ausschlaggebend ist die Spannung in Kilovolt (kV), die der Röntgenröhre zugeführt wird. Je nach gewünschter Bildaussage wird die Röhrenspannung zwischen 38 und 120kV gewählt. Bei weicher Strahlung (ca. 40kV) wird viel Strahlung vom Gewebe absorbiert. Dadurch werden auch feinste Gewebeunterschiede auf dem Röntgenfilm sichtbar gemacht. Harte Strahlung (über 100kV) durchdringt Gewebe und Materialien (Gips und sogar Bleischürzen von geringerer Dicke) wesentlich leichter. Kontrastunterschiede werden stark abgemildert, wie z.B. bei Lungenaufnahmen (120kV), bei denen sonst im Bereich der Rippen keine Beurteilung der Lungenstruktur möglich wäre.

Häufig werden dem Patienten bei oder vor der Röntgenuntersuchung Kontrastmittel verabreicht. Manche Strukturen, die sich normalerweise nicht abgrenzen lassen, können so hervorgehoben werden. Zum Teil lässt sich mit einem Kontrastmittel auch die Funktion eines Organsystems darstellen, so etwa in der Urografie. Je nach Fragestellung bieten sich verschiedene Substanzen und Darreichungsformen an.

Deutschland nimmt beim Röntgen einen Spitzenplatz ein: etwa 1,3 Röntgenaufnahmen und 2mSv pro Einwohner und Jahr.

- Reduzierung der schädigenden Wirkung bei Röntgenaufnahmen (Härtung, Bildverstärker, Computertomographie). Beim herkömmlichen Röntgenverfahren wird das abzubildende Objekt von einer Röntgenquelle durchleuchtet und abgebildet. Es entsteht eine Projektion des Volumens auf eine Fläche. Bei dieser Projektion gehen Informationen, welche die dritte Dimension (Dicke) des durchleuchteten Körpers betreffen weitgehend verloren. Grund hierfür ist, dass im Nachhinein nicht mehr unterschieden werden kann, ob die im Röntgenbild sichtbare Schwächung (helle Bereiche im Bild) durch ein Material höherer Dichte oder durch eine größere Schichtdicke hervorgerufen wurde.

Die Computertomographie umgeht dieses Problem. Die Röntgenröhre und der Detektor werden in einem Kreis um den Patienten bewegt und es werden viele Röntgenbilder des Objekts aus den unterschiedlichsten Richtungen erstellt. Aus diesen Abbildungen wird die sonst nicht erfasste Volumenstruktur rekonstruiert. In der Regel setzen sich diese 3D-Rekonstruktionen aus Einzelschnitten (Schnittbildverfahren) zusammen, die quer durch das Objekt verlaufen. Auf diese Weise kann für jedes Volumenelement des Objektes (sog. Voxel entspricht einem dreidimensionalen Pixel) eine Dichte ermittelt werden.

Die Computertomographie wurde möglich durch die Nutzung des mathematischen Verfahrens, das 1917 von dem österreichischen Mathematiker Johann Radon entwickelt wurde. Damals ein rein mathematischer Erkenntnisgewinn fern jeglicher Anwendungsmöglichkeiten bildet die Radontransformation heute die Grundlage zur Berechnung von zerstörungsfreien räumlichen Aufnahmen eines Objektes mit seinen gesamten Innenstrukturen.