Mathematischer Vorkurs WS18/19

Martin Gote

March 6, 2019

Übungsblatt 2

Aufgabe 1.1

$$\begin{aligned}
x^\kappa = y &\rightarrow log_x(y) = \kappa \\
e^\kappa = y &\rightarrow log_e(y) = ln(y) = \kappa \\
log_b(x) &= \frac{log_\kappa(x)}{log_\kappa(b)} \\
ln(x * y) &= ln(x) + ln(y) \\
ln(\frac{x}{y}) &= ln(x) - ln(y) \\
ln(y^x) &= x \cdot ln(y) \\
ln(e) &= 1 \\
ln(1) &= 0
\end{aligned}$$

(a)

$$z = ln(10^e) = e * ln(10) \approx 2,3e \approx 6,259$$

(b)

$$z = log_5(10^5) = 5 * log_5(10) = 5(log_5(5) + log_5(2)) = 5(1 + log_5(2)) \approx 5 * 1,43 \approx 7,15$$

Aufgabe 1.2

(a)

$$A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{BD} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{AD} = \begin{bmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|\bar{AB}| = \sqrt{10}, |\bar{BD}| = \sqrt{\frac{5}{2}}, |\bar{AD}| = 5\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Winkel α an A wird berechnet durch: $cos(\alpha) = \frac{\bar{AB} * \bar{AD}}{|\bar{AB}| \cdot |\bar{AD}|}$, wobei das Skalarprodukt von 2 Vektoren ($V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$) gegeben ist durch $V_1 * V_2 = -1 \cdot 2 + -1 \cdot -2 + 1 \cdot 1 = 1$

$$\alpha \approx 26,565\,\text{deg}, \beta = 90\,\text{deg}, \delta \approx 63,435\,\text{deg}, \alpha + \beta + \delta = 180\,\text{deg}$$

(b) Punkt C kann beliebig gewählt werden in dem ein Richtungsvektor ($\bar{AB}, \bar{AD}, \bar{BD}$) auf den nicht im Richtungsvektor steckenden Ortsvektor (D,B,A) addiert wird.

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -1,5 \\ -2,5 \\ 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 5,5 \\ -1,5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\bar{AB} \times \bar{AD} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 - 0 \cdot 0,5 \\ 0 \cdot 3,5 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0,5 - 3,5 \cdot -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Das Vektorprodukt zweier Vektoren ($\rightarrow Normalvektor$) die ein Parallelogramm aufspannen gibt den Flächeninhalt des Parallelogramms an. Da alle Ortsvektoren in der Z-Ebene $z = 1$ liegen, müssen die x und y Koordinate des Normalvektors 0 sein.

Aufgabe 2.1

$$\begin{aligned}
&MultiplikationmitKonstanten: & (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \\
&SummerzweierFunktionen: & (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \\
&Produktregel: & (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
&Quotientenregel: & \frac{f(x)}{g(x)}' = \frac{f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x)}{g^2(x)} \\
&Kettenregel: & (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^8 \\
f'(x) &= 8 \cdot x^7 \\
f''(x) &= 56 \cdot x^6 \\
F(x) &= \frac{1}{9} \cdot x^9
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3 \cdot x^{35} + 5 \cdot x^3 \\
f'(x) &= 105 \cdot x^{34} + 15 \cdot x^2 \\
f''(x) &= 3570 \cdot x^{33} + 30 \cdot x^1 \\
F(x) &= \frac{1}{12} \cdot x^{36} + \frac{5}{4} \cdot x^4
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= sin(3x) \\
f'(x) &= 3 \cdot cos(3x) \\
f''(x) &= -9 \cdot sin(3x)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{3x+5} \\
f'(x) &= 3e^{3x+5} \\
f''(x) &= 9e^{3x+5}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 5 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{5}{2}} \\
f'(x) &= \frac{5}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}} \\
f''(x) &= -\frac{5}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} + \frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^5 \cdot e^{-3x} \\
f'(x) &= 5x^4 \cdot e^{-3x} + x^5 \cdot (-3) \cdot e^{-3x} = (5-3x)x^4e^{-3x} \\
f''(x) &= 20x^3 \cdot e^{-3x} + 5x^4 \cdot (-3) \cdot e^{-3x} + 5x^4 \cdot (-3) \cdot e^{-3x} + x^5 \cdot (-3)^2 \cdot e^{-3x} \\
&= (20 - 30x + 9x^2) \cdot x^3 \cdot e^{-3x}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.3

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{3x}{5y} \\
\frac{\delta}{\delta x} f(x,y) &= \frac{3}{5y} \\
\frac{\delta}{\delta y} f(x,y) &= -\frac{3x}{5y^2}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= y^2 \cdot x^{-3} \\
\frac{\delta}{\delta x} f(x,y) &= -3 \cdot y^2 \cdot x^{-4} \\
\frac{\delta}{\delta y} f(x,y) &= 2 \cdot y \cdot x^{-3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.4

(a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(2x)dx \\
&= -\frac{1}{2}cos(2x)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}cos(\pi) + \frac{1}{2}cos(0) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_3^{23} e^{x+2}dx \\
&= e^{x+2}|_3^{23} \\
&= e^{25} - e^5 \\
&\approx e^{25} \\
&\approx 7,2 \cdot 10^{10}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2.5

x	$\sqrt[10]{x}$	$log_{10}(x)$	$e^{\sqrt{x}}$
0	0	-	1
1	1	0	2,713
2	1,071	0,301	4,113
3	1,116	0,477	5,652
4	1,149	0,602	7,389
5	1,175	0,699	9,356
6	1,196	0,778	11,582
7	1,215	0,845	14,094
8	1,231	0,903	16,918
9	1,246	0,954	20,086
10	1,259	1	23,624

Aufgabe 3.1

(a)

$$
\begin{aligned}
\bar{AB} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \\
|\bar{AB}| &= \sqrt{21} \approx 4,58
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\bar{AB} &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ -0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \\
|\bar{AB}| &= \sqrt{2,5} \approx 1,58
\end{aligned}
$$

(c)

$$\bar{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4-a \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$|\bar{AB}| = \sqrt{1+(4-a)^2+16} \rightarrow$$
$$a = 4$$

(d)

$$\bar{AB} = \begin{bmatrix} 1-x \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$|\bar{AB}| = \sqrt{1-2x+x^2+9} = \sqrt{10-2x+x^2} \rightarrow$$
$$25 = x^2-2x+10$$
$$0 = x^2-2x-15$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{16}$$
$$x_1 = 5, x_2 = -3$$

Aufgabe 3.2

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\bar{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{BC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{DC} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \bar{AD} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$|\bar{AB}| = |\bar{BC}| = |\bar{DC}| = |\bar{AD}| = \sqrt{3}$$

(b)

$$\bar{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{BD} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3.3

(a)

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{Einheitsvektor:} \vec{a_e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+5^2+1^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$$
$$\vec{a_e} = \frac{1}{\sqrt{30}} * \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, |\bar{AB}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\bar{AB}_e = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = A + \bar{AB}_e = \begin{bmatrix} 2,6 \\ 3,8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{CB} = \begin{bmatrix} 2,4 \\ 3,2 \\ 0 \end{bmatrix}, |\bar{CB}| = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{16} = 4$$