

Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

BACHELORARBEIT
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Felix Herrmann
aus Bad Friedrichshall

2016

Entwicklung und numerische Simulation
von supraleitenden
Quanteninterferenzdetektoren
mit Hilfe von InductEx

Die Bachelorarbeit wurde ausgeführt von Felix Herrmann am
16. Dezember 2016
Kirchhoff-Institut für Physik
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. C. Enss

Supraleitende Quanteninterferenzdetektoren stellen heutzutage die empfindlichsten Messgeräte mit zugleich hoher Bandbreite für magnetische Flussänderungen dar. Sie werden daher sehr häufig zur Bestimmung physikalischer Größen, die auf natürliche Weise in magnetischen Fluss gewandelt werden können, verwendet. Die Sensitivität bzw. Leistungsfähigkeit eines SQUIDs hängt dabei empfindlich von der Eigeninduktivität des SQUID sowie den Induktivitäten und Gegeninduktivitäten potentiell an das SQUID gekoppelter Spulen ab. Da die SQUID-Geometrien jedoch meist zu komplex für eine analytische Berechnung der verschiedenen Induktivitäten sind, müssen numerische Verfahren genutzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde hierfür das numerische Simulationsprogramm InductEx verwendet. Zunächst werden in der Arbeitsgruppe bereits hinreichend genau charakterisierte rf- und dc-SQUIDs simuliert und mit Messwerten verglichen. Hierbei zeigte sich, dass in den meisten Fällen die gemessenen Induktivitäten präzise mit InductEx vorhergesagt werden können. Außerdem wurde mit Hilfe von InductEx ein neues dc-SQUID-Design mit niedriger Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelpule und einer Einkoppelpuleninduktivität von etwa 1 nH entwickelt. Das neue dc-SQUID wurde als Gradiometer zweiter Ordnung realisiert und die Einkoppel- und Rückkoppelpule um verschiedene Löcher eines als Achteck ausgeführten Washers gelegt, wodurch die parasitäre Kopplung im Vergleich zu bisherigen SQUID-Designs um etwa eine Größenordnung reduziert werden kann. Wie beabsichtigt konnte eine Einkoppelpuleninduktivität von $\sim 1,0$ nH erreicht werden.

Design and numerical simulation of Superconducting Quantum Interference Devices using InductEx

Superconducting quantum interference devices are presently the most sensitive wideband devices for measuring magnetic flux changes. Therefore they are often used to measure physical properties which can naturally be converted into magnetic flux. The performance of SQUIDs is strongly dependent on the inductance of the SQUID and on the inductances and mutual inductances of other coils potentially coupled to the SQUID. Due to the complexity of the geometry of the SQUID, it is hardly possible to calculate the inductances by analytical means. So numerical simulations have to be used instead. In this thesis the simulation program InductEx was used. The inductances of well-known rf- and dc-SQUIDs were simulated and compared to actual measurements. Using this procedure we were able to show that InductEx predicts for most cases the measured inductances with high precision. In addition to these simulation a new dc-SQUID-design was developed having a low parasitic coupling between input and feedback coil and an input inductance of approximately 1 nH. The new dc-SQUID was built as a second stage gradiometer. To reduce the parasitic coupling the input and feedback coil wound around two different holes of an octagonal washer. A reduction of the parasitic coupling by roughly one order of magnitude compared to the SQUID-design formerly developed within this working group and the intended input inductance of ~ 1 nH were reached.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Supraleiter	3
2.2	Josephson-Tunnel-Kontakte	4
2.3	dc-SQUIDs	6
2.4	InductEx	9
2.4.1	Layer Definition File	10
2.4.2	Netlist	10
2.4.3	FFH	11
3	Simulation von existierenden SQUID-Designs	15
3.1	InductEx-Funktionstest an Rechteckwashern	15
3.2	Simulation von rf-SQUIDs	17
3.3	Simulation aktuellen dc-SQUID-Designs	20
3.3.1	Bestimmung der parasitären Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule	22
4	Entwicklung eines neuen dc-SQUID-Design	25
4.1	Beschreibung des neuen dc-SQUID-Design	25
4.2	Charakterisierung des entwickelten dc-SQUID-Designs und Vergleich mit Simulationswerten	29

5 Zusammenfassung	35
Literaturverzeichnis	37
Danksagung	41

1. Einleitung

Supraleitende Quanteninterferenzdetektoren (SQUIDs) sind aktuell die präzisesten Messinstrumente für magnetische Flussänderungen, die gleichzeitig eine hohe Bandbreite besitzen. Aus diesem Grund sind SQUIDs beispielsweise sehr gut zur Auslesung von Tieftemperaturteilchendetektoren [Ens05a], wie etwa magnetische Kalorimetern [Fle05] oder supraleitenden Phasenübergangsthermometern [Irw05] geeignet. Diese Art der Detektoren werden heutzutage vielfach in der Atom- und Kernphysik, der Neutrinophysik oder in vielen anderen Bereichen der Physik eingesetzt. Darüber hinaus sind SQUIDs in der Lage, alle physikalischen Größen zu messen, die sich auf natürliche Weise in magnetischen Fluss umwandeln lassen, wie Magnetfelder, Strom, Spannung, Ladung und so weiter.

Aufgrund der Vielzahl sehr verschiedener Anwendungen von SQUIDs gibt es unterschiedliche Realisierungen von SQUID-basierenden Messinstrumenten. So werden dc-SQUIDs oder rf-SQUIDs zum Beispiel als Magnetometer, Gradiometer, Stromsensor oder tieftemperaturtauglicher Multiplexer verwendet. Alle diese Realisierungen basieren darauf, dass ein externes Flusssignal in das SQUID eingekoppelt wird. Die Leistungsfähigkeit des SQUIDs hängt hierbei empfindlich von der Eigeninduktivität des SQUIDs, sowie den Induktivitäten potentiell weiterer Spulen, wie etwa der Einkoppelspule bei einem Stromsensor-SQUID, ab. Auch die Gegeninduktivitäten zwischen den verschiedenen Spulen spielen eine wichtige Rolle. Allerdings ist die reale Geometrie der meisten SQUIDs so komplex, dass es nicht möglich ist die Induktivitäten und Gegeninduktivitäten analytisch zu berechnen. Aus diesem Grund müssen zwangsläufig numerische Verfahren genutzt werden.

Es existieren viele verschiedene Simulationsprogramme zur Berechnung von Induktivitäten und Gegeninduktivitäten komplexer Strukturen. Allerdings sind die meisten kommerziell erhältlichen Programme ohne trickreiche Anpassungen nicht in der Lage, Supraleiter zu simulieren oder sind sehr teuer. Freie Programme wie z.B. FastHenry [Kam94] bieten intrinsisch die Option Supraleiter zu simulieren. Der Nachteil bei diesem Programm liegt jedoch beispielsweise darin, dass die zu simulierende Struktur per Hand eingegeben werden muss und daher komplexe Strukturen oft nur unzureichend erfasst werden können.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher das Simulationsprogramm InductEx [Fou16] verwendet. Es ist in der Lage, die Geometrie eines Bauteils direkt aus einer CAD-Datei einzulesen und berechnet die Induktivität der verschiedenen Strukturen mit dem, auf FastHenry basierenden, Stromfluss-Lösungs-Programm FFH. InductEx ist

heute bereits ein Standardprogramm für die Simulation von RSFQ¹-Schaltkreisen und wurde in der Arbeitsgruppe, in der diese Arbeit durchgeführt wurde, bereits erfolgreich für die Simulation von supraleitenden Schaltkreisen eingesetzt. Es sollte daher im Rahmen dieser Arbeit überprüft werden ob sich InductEx auch für die Simulation von komplexeren SQUID-Designen eignet und welche Simulationsannahmen hierfür notwendig sind. Dafür wurden die Induktivitäten und Gegeninduktivitäten verschiedener in der Arbeitsgruppe entwickelter SQUID-Bauteile simuliert und mit den experimentell bestimmten Werten verglichen. Zusätzlich wurde mit der Hilfe von InductEx ein neues dc-SQUID-Design entwickelt, das eine Einkoppelspuleninduktivität von $L_i = 1$ nH und eine möglichst niedrige Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule aufweist. Eine mögliche Anwendung dieses Designs ist die Rauschthermometrie mittels Korrelationsmessungen [Rot13] oder die Auslesung magnetischer Kalorimeter für die hochauflösende Spektroskopie weicher Röntgenstrahlung.

In Kapitel 2 werden die physikalischen Grundlagen besprochen, die für das Verständnis der nachfolgenden Kapitel notwendig ist. Es werden die Grundzüge der Supraleitung, die Funktionsweise eines Josephson-Tunnel-Kontakts und darauf aufbauend das dc-SQUID erklärt. Da das Simulationsprogramm InductEx für diese Arbeit von zentraler Bedeutung ist, wird auch die grundlegende Funktionsweise und der theoretische Ansatz von InductEx und dem Stromfluss-Lösungs-Programm FFH besprochen.

Kapitel 3 betrachtet die Simulationsergebnisse von InductEx im Vergleich mit Messungen, die in der Arbeitsgruppe an diesen SQUIDs durchgeführt wurden. Als grundlegender Funktionstest werden die Ergebnisse von InductEx mit den numerischen Simulationen von J. M. Jaycox und M. B. Ketchen aus [Jay81] verglichen. Durch die Simulation von bekannten rf- und dc-SQUIDs sollte bestimmt werden, ob die von InductEx bestimmten Werte konsistent mit den experimentellen Ergebnissen sind.

In Kapitel 4 wird das neu entwickelte dc-SQUID-Design besprochen, dass wie oben erwähnt, die parasitären Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule reduzieren und die Einkoppelspuleninduktivität auf den Idealwert von $L_i = 1$ nH optimieren soll. Es werden die Designideen erklärt, das neue Design vorgestellt und die Simulationen des neuen Designs mit den ersten Messwerten verglichen.

¹rapid single flux quantum

2. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die festkörperphysikalischen Grundlagen diskutiert, die für das Verständnis der Funktionsweise eines supraleitenden Quanteninterferenzdetektors (SQUIDs) notwendig sind. Außerdem wird ein kurzer Einblick in die Funktionsweise und Handhabung des im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Simulationsprogramms InductEx gegeben, mit dessen Hilfe die Induktivität einer Vielzahl von supraleitenden Strukturen berechnet wurde.

2.1 Supraleiter

Für Temperaturen T kleiner als die kritische Temperatur T_C leiten Supraleiter den elektrischen Gleichstrom widerstandsfrei und verhalten sich wie perfekte Diamagneten. Dies bedeutet, dass Supraleiter Magnetfelder aus ihrem Inneren verdrängen (Meißner-Ochsenfeld-Effekt). Jedoch werden die Magnetfelder nicht vollständig aus dem Supraleiter verdrängt, die Magnetfeldstärke nimmt vielmehr exponentiell ab. Die charakteristische Länge λ_L , auf der diese Abnahme stattfindet, wird hierbei als London'sche Eindringtiefe bezeichnet.

Mikroskopisch können Supraleiter durch die von J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer entwickelte BCS-Theorie [Bar57] beschrieben werden. Details dieser Theorie sollen an dieser Stelle jedoch nicht wiedergegeben werden, da sie in vielen Lehrbüchern der Festkörperphysik zu finden sind, siehe z.B. [Hun09, Ens05b]. Für die weitere Betrachtung ist allerdings wichtig, zu wissen, dass Cooper-Paare einen Gesamtspin von $S = 1$ haben, wodurch sie nicht mehr von der Fermi-, sondern von der Bose-Einstein-Statistik beschrieben werden. Der Zustand aller Cooper-Paare im Supraleiter lässt sich daher durch eine makroskopische Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_S(\mathbf{r})} e^{i\phi(\mathbf{r})} \quad (2.1)$$

beschreiben. Dabei ist $n_S(\mathbf{r})$ die Teilchenanzahldichte der Cooper-Paare und $\phi(\mathbf{r})$ die Phase der Wellenfunktion.

Eine wichtige Konsequenz aus der Existenz der makroskopischen Wellenfunktion ist die Quantisierung des magnetischen Flusses [Dea61, Dol61, Lon50]. Diese besagt, dass der magnetische Fluss, der eine geschlossene supraleitende Leiterschleife durchsetzt, nur ganzzahlige Werte des magnetischen Flussquants $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Vs}$ annehmen kann. Eine weitere Konsequenz ist die Existenz der Josephson-Effekte, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen werden soll.

2.2 Josephson-Tunnel-Kontakte

Sind zwei Supraleiter durch eine sehr dünne, isolierende Schicht miteinander verbunden, so spricht man von einem Josephson-Tunnel-Kontakt [Jos62]. Ist die Isolationschicht hinreichend dünn, überlappen sich die makroskopische Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 in den beiden Supraleitern, sodass Cooper-Paare kohärent durch die Isolationschicht tunneln können. Diese Situation wird durch die beiden Josephson-Gleichungen [Jos62] beschrieben. Die erste Josephson-Gleichung besagen hierbei, dass sich für eine hinreichend schwache Kopplung zwischen den beiden Supraleitern eine sinusförmige Beziehung zwischen der Phasendifferenz φ der beiden Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 und dem Suprastrom ergibt:

$$I_S = I_C \sin(\varphi). \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet I_C den sogenannten kritischen Strom, der von der Fläche der Tunnelbarriere, den Materialien der beiden Supraleiter, sowie dem Überlapp der Wellenfunktionen abhängt.

Des weiteren besagt die zweite Josephson-Gleichung, dass, im Fall einer über den Kontakt abfallenden Spannung, die zeitliche Änderung $\dot{\varphi}$ der Phasendifferenz beider Wellenfunktionen linear mit dem Spannungsabfall verknüpft ist:

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{\Phi_0} U. \quad (2.3)$$

Josephson-Gleichstromeffekt

Fließt ein konstanter, von außen eingepprägter Strom I durch den Josephson-Kontakt, der kleiner als der kritische Strom I_C des Kontakts ist, so fällt über den Kontakt keine Spannung ab und der Strom I kann nach Gleichung (2.2) komplett vom Suprastrom I_S getragen werden. Dies wird Josephson-Gleichstromeffekt genannt.

Josephson-Wechselstromeffekt

Fällt über einem Josephson-Kontakt eine endliche Spannung U ab, so wächst die Phasendifferenz φ nach Gleichung (2.3) linear mit der Zeit an. Gleichung (2.2) lässt sich dann schreiben als

$$I_S = I_C \sin(\omega_J t + \varphi_0) \quad \text{mit} \quad \omega_J = \frac{2\pi}{\Phi_0} U \quad (2.4)$$

mit der Zeit t , der Josephson-Kreisfrequenz ω_J und einer Integrationskonstanten φ_0 . Das heißt, dass für $U \neq 0$ ein hochfrequenter Suprastrom durch den Josephson-Kontakt fließt, dessen Periode proportional zu U ist. Das Auftreten dieses hochfrequenten Suprastroms wird Josephson-Wechselstromeffekt genannt.

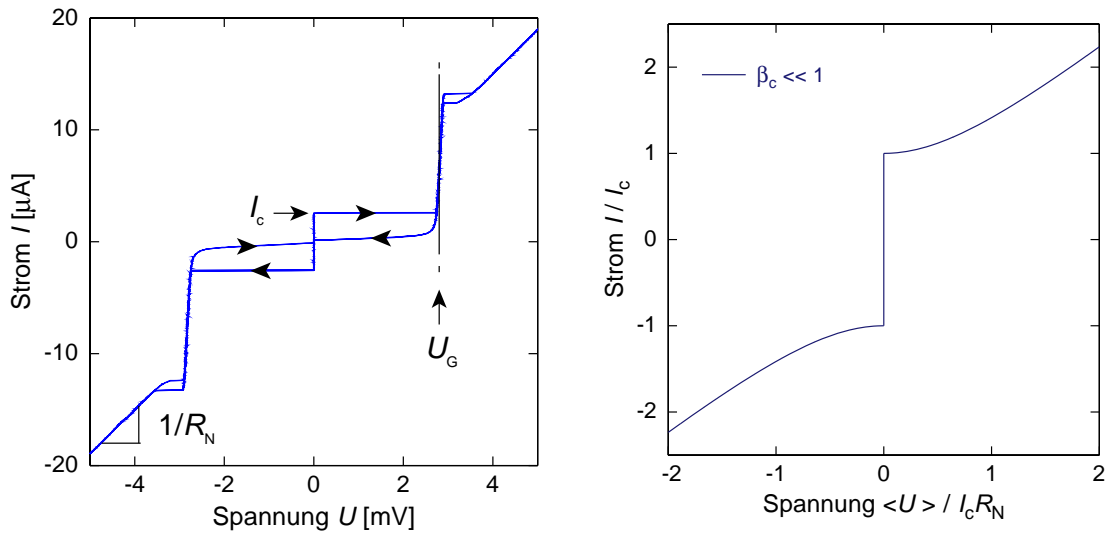


Abb. 2.1: (Links) I - V -Kennlinie eines typischen, hysteretischen Josephson-Tunnel-Kontakts, wie er in der Arbeitsgruppe hergestellt wird. Die Pfeile geben die Richtung von Null aus an, in der die Kennlinie durchlaufen wird. (Rechts) Theoretische I - V -Kennlinie eines nicht-hysteretischen Josephson-Tunnel-Kontakts.

Strom-Spannungs-Kennlinie eines Josephson-Tunnel-Kontakts

Wird ein Strom I in einen Josephson-Kontakt eingepreßt und ausgehend von $I = 0 \mu\text{A}$ sukzessiv erhöht, so fällt zunächst keine Spannung über den Kontakt ab. Für Ströme $I < I_C$ wird der Strom durch den Josephson-Gleichstromeffekt komplett durch den Suprastrom I_S getragen. Für Ströme $I > I_C$ fließt ein zusätzlicher Quasiteilchenstrom I_Q , wodurch über den Josephson-Kontakt eine endliche Spannung U abfällt. In der Strom-Spannungs-Kennlinie, auch I - V -Kennlinie, in Abbildung 2.1 (Links) ist dies an der scharfen Kante bei $I = I_C$ zu sehen. Für endliche Spannungen wird das Verhalten des Kontakts durch den charakteristischen Verlauf der Quasiteilchenkennlinie bestimmt, der in Lehrbüchern wie [Buc04] ausführlich beschrieben ist. Für $I > I_Q$ fällt über den Kontakt die Spannung $U_G = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{e}$ ab, da für die Aufspaltung eines Cooper-Paars die Energie $(\Delta_1 + \Delta_2)$ benötigt wird. Hierbei bezeichnen Δ_1 und Δ_2 die Energielücken der beiden Supraleiter.

Für Ströme $I \gg I_C$ geht die Kennlinie in eine ohmsche Charakteristik über. Wird der Strom I ausgehend vom ohmschen Bereich wieder reduziert, durchläuft die Kennlinie den kompletten Spannungsbereich, auch $U < U_G$, und erreicht erst bei dem Rückkehrstrom $I_r < I_C$ einen spannungsfreien Zustand. Die Kennlinie zeigt somit einen hysteretischen Verlauf.

Im „Resistively and Capacitively Shunted Junction“-Modell (RCSJ-Modell) [Ste68, McC68] wird ein Josephson-Kontakt durch eine Parallelschaltung aus einem idealen Josephson-Kontakt mit kritischem Strom I_C , einem Widerstand R , einer Kapazi-

tät C und einer Rauschquelle I_F dargestellt. Hier soll nicht tiefer auf dieses Modell eingegangen werden, da es in vielen Lehrbüchern der Festkörperphysik ausführlich diskutiert ist (siehe z.B. [Cla04]). Als wichtige Folgerung für diese Arbeit ergibt sich hieraus, dass sich das Ausmaß der Hysterese mit dem Stewart-McCumber-Parameter

$$\beta_C = \frac{2e}{\hbar} I_C R^2 C \quad (2.5)$$

angeben lässt. Für Werte von $\beta_C \ll 1$ ist die I - V -Kennlinie eines Josephson-Kontakts nicht hysteretisch. Das RCSJ-Modell ergibt in diesem Fall, dass die mittlere Spannung $\langle U \rangle$, über einen nicht-hysteretischen Josephson-Kontakt, über die Beziehung

$$\langle U(t) \rangle = I_C R \sqrt{\left(\frac{I}{I_C}\right)^2 - 1} \quad \text{mit} \quad \frac{I}{I_C} > 1 \quad (2.6)$$

mit dem Strom I verknüpft ist. Abbildung 2.1 (Rechts) zeigt eine berechnete, normierte Kennlinie.

Um den Stewart-McCumber-Parameter experimentell einstellen zu können, wird der Josephson-Kontakt häufig mit einem parallel geschalteten Shunt-Widerstand R_S versehen, wodurch sich der effektive Widerstand des Josephson-Kontakts nach

$$\frac{1}{R_{\text{eff}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_S} \quad (2.7)$$

bestimmt und somit durch Wahl von R_S auf einen passenden Wert festgelegt werden kann.

2.3 dc-SQUIDS

In der Einleitung wurde bereits beschrieben, dass im Rahmen dieser Arbeit zwei Ziele verfolgt wurden. So wurde einerseits das Programm InductEx verwendet, um die Induktivitäten einer ganzen Reihe von SQUID-basierten Bauteilen, die in der Vergangenheit in der Arbeitsgruppe entwickelt wurden, zu berechnen und mit experimentellen Werten zu vergleichen. Andererseits wurde ebenfalls auf der Grundlage von InductEx ein neues dc-SQUID-Design entwickelt, bei dem die Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule besonders klein ist. Dieser Abschnitt soll die Diskussion dieses SQUIDS vorbereiten und fasst daher die Theorie eines dc-SQUIDS kurz zusammen. Detaillierte Beschreibungen sowie eine ausführliche Diskussion von rf-SQUIDS, die im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls simuliert, aber nicht selbst entwickelt wurden, sind z.B. in [Cla04] zu finden.

Ein dc-SQUID ist eine geschlossene supraleitende Schleife, die von zwei Josephson-Kontakten unterbrochen wird. In Abbildung 2.2 ist ein schematisches Bild eines dc-SQUIDS zu sehen. Um das im vorherigen Abschnitt diskutierte, hysteretische

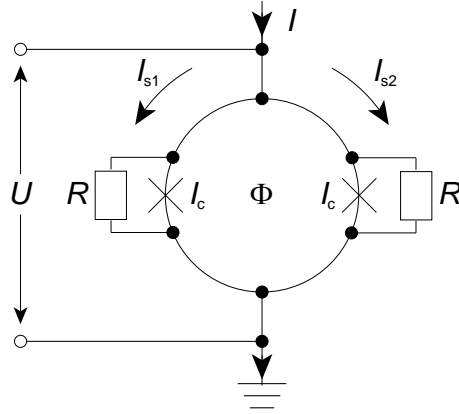


Abb. 2.2: Schematische Darstellung eines dc-SQUIDS. Der extern eingespeiste Strom I teilt sich in die Ströme I_{S1} und I_{S2} durch die beiden Josephson-Kontakte auf. Über das SQUID fällt die Spannung U ab.

Verhalten der Josephson-Kontakte zu unterdrücken sind sie mit parallel geschalteten Shunt-Widerstände versehen. Fließt ein externer Strom I durch das SQUID, der kleiner als die Summe der kritischen Ströme der beiden Josephson-Kontakte ist, so teilt er sich in die Ströme I_{S1} und I_{S2} durch die beiden Josephson-Kontakte auf. Unter der Annahme, dass die beiden Kontakte identisch sind und den kritischen Strom I_C besitzen, kann nach dem Josephson-Gleichstromeffekt ein Suprastrom von $I_{S1} = I_C \sin(\varphi_1)$ beziehungsweise $I_{S2} = I_C \sin(\varphi_2)$ durch die Kontakte fließen. Das ergibt einen Gesamtsuprastrom $I_{S,ges}$ durch das dc-SQUID von

$$I_{S,ges} = I_C \sin(\varphi_1) + I_C \sin(\varphi_2) = 2I_C \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (2.8)$$

Aufgrund der Flussershaltung in geschlossenen supraleitenden Schleifen (siehe Abschnitt 2.1) ergibt sich für die Phasendifferenz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ des magnetischen Flusses die Beziehung (siehe z.B. [Gro14])

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (2.9)$$

Mit diesem Zusammenhang lässt sich (2.8) umschreiben zu

$$I_{S,ges} = 2I_C \cos\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \sin\left(\varphi_1 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.10)$$

Außerdem ist der magnetische Gesamtfluss Φ im SQUID

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + L_S I_{\text{cir}} \quad (2.11)$$

aus einem externen eingebrachten Fluss Φ_{ext} und dem induzierten Fluss $\Phi_L = L_S I_{\text{cir}}$ zusammengesetzt. Der induzierte Fluss Φ_L wird hierbei durch im SQUID fließenden

Abschirmstrom I_{cir} erzeugt, der die Aufrechterhaltung der Flussquantisierung garantiert. Diese koppeln über die SQUID-Induktivität L_S Fluss in das SQUID ein. Mit Gleichung (2.10) folgt

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} - L_S I_C \sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) \cos\left(\varphi_1 + \pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right). \quad (2.12)$$

Gleichung (2.12) legt die Definition des sogenannten Abschirmparameters

$$\beta_L := \frac{2L_S I_C}{\Phi_0} \quad (2.13)$$

als das Verhältnis aus dem maximalen Kreisstrom $I_{\text{cir}}^{\text{max}} = I_C$ und $\frac{\Phi_0}{2}$ nahe. Für Werte $\beta_L > \frac{2}{\pi}$ ergeben sich, für einen Wert des externen Flusses Φ_{ext} , mehrere mögliche Werte des Gesamtflusses Φ , was eine uneindeutige SQUID-Kennlinie erzeugt.

Im Fall von vernachlässigbarer Abschirmung mit $\beta_L \ll 1$ ist der durch die Kreisströme induzierte Fluss klein verglichen mit einem Flussquantum Φ_0 und kann daher gegenüber Φ_{ext} vernachlässigt werden. Wird nun Gleichung (2.10) maximiert, lässt sich der maximale Suprastrom

$$I_{S,\text{max}} \approx 2I_C \left| \cos\left(\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}\right) \right| \quad (2.14)$$

bestimmen.

Wird der Strom I durch das SQUID erhöht, bis er größer als der maximal mögliche Suprastrom $I_{S,\text{max}}$ ist, so fließt ein zusätzlicher Quasiteilchenstrom durch die Josephson-Kontakte.

Der Spannungsabfall über das SQUID lässt sich nach den Gleichungen (2.6) und (2.14), für den Fall das $\beta_L \ll 1$ und $\beta_C \ll 1$, im zeitlichen Mittel durch

$$\langle U(t) \rangle = I_C R_S \sqrt{\left(\frac{I}{2I_C}\right)^2 - \cos^2\left(\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}\right)} \quad (2.15)$$

beschreiben.

In Abbildung 2.3 (Links) sieht man die I - V -Kennlinie eines geshunteten, nicht-hysteretischen dc-SQUIDs für die Fälle, dass ein magnetischer Fluss $\Phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$ bzw. $\Phi = n\Phi_0$ mit $n \in \mathbb{Z}$ das SQUID durchsetzt. Wird der Strom I konstant gehalten, so hängt die über das SQUID abfallende Spannung vom magnetischen Fluss Φ ab. Im Diagramm wird dies beispielhaft durch die senkrechte Linie bei $1,5I_C$ markiert. Die I - V -Kennlinie eines dc-SQUIDs ähnelt somit für $\beta_L \ll 1$ der I - V -Kennlinie eines Josephson-Kontakts mit $\beta_C \ll 1$. Aus Gleichung (2.15) lässt sich auch ableiten, dass ein dc-SQUID ein Fluss-zu-Spannung-Transformator ist. Wird der Fluss Φ direkt gegen die Spannung aufgetragen, wie in Abbildung 2.3 (Rechts) dargestellt, ist aufgrund der Flussquantisierung die Φ - V -Beziehung periodisch. Die Amplitude ΔU

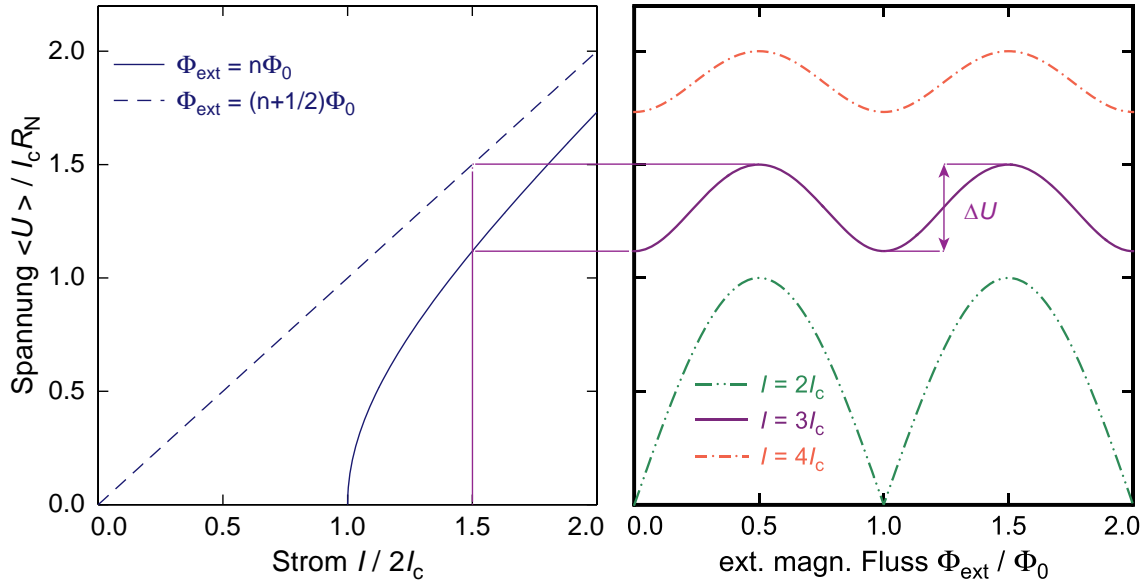


Abb. 2.3: (Links) I - V -Kennlinie eines dc-SQUIDs für zwei verschiedene Werte des externen Flusses Φ_{ext} . Für die Berechnung der Kennlinie wurde $\beta_L \ll 1$ und $\beta_C \ll 1$ angenommen. (Rechts) Φ - V -Kennlinie eines dc-SQUIDs für unterschiedliche Betriebsströme $I = 2I_C, 3I_C, 4I_C$.

der Φ - V -Kennlinie ist von der Differenz der I - V -Kennlinie bei konstantem Strom für maximalen und minimalen eingefangenen Fluss abhängig, wie man in Abbildung 2.3 an den horizontalen gepunkteten Linien erkennen kann. Um eine möglichst große Amplitude ΔU zu erhalten wird $\beta_L \approx 1$ gewählt [Tes77].

Da β_L von der SQUID-Induktivität L_S abhängt und die Struktur von SQUID-Schleifen in der Realität oft zu kompliziert für eine analytische Auswertung ist, muss L_S mit numerischen Mitteln bestimmt werden.

2.4 InductEx

InductEx [Fou16] ist ein kommandozeilenbasiertes, numerisches Programm zur Berechnung der Induktivitäten und Gegeninduktivitäten von dreidimensionalen Strukturen. InductEx wurde hierbei insbesondere für die Berechnung von supraleitenden Strukturen entwickelt. Die eigentliche Induktivitätsberechnung wird von FFH, einem auf FastHenry [Kam94] basierenden Stromfluss-Lösungs-Programm durchgeführt. FFH benötigt als Model für die Berechnung der Induktivitäten eine Aneinanderreihung von Filamenten, die die zu simulierende Struktur repräsentieren. In der Arbeitsgruppe, in der die vorgelegte Arbeit durchgeführt wurde, sind diese Modelle bisher von Hand erstellt worden, was einerseits sehr aufwändig ist. Andererseits

wurde bei einem solchen manuellen Vorgang nur eine vergleichsweise geringe Anzahl an Filamenten verwendet, so dass die Modellierung einer Struktur an Ecken oder dergleichen häufig sehr unpräzise war. InductEx kann das benötigte Filament-Model auf Grundlage der CAD-Dateien für die Mikroprozessierung und einer formatierten Prozessbeschreibung im LDF (siehe Kapitel 2.4.1) automatisiert erzeugen. Hierbei ist die Zahl der verwendeten Filamente nach oben unbegrenzt, so dass beispielsweise insbesondere Ecken von supraleitenden Strukturen korrekt abgebildet werden können. Das Filament-Model wird dann von InductEx an FFH übergeben, welches die einzelnen Induktivitäten bestimmt. Die grundlegende Funktionsweise von FFH wird im Kapitel 2.4.3 erläutert. Neben der CAD-Datei mit der zu simulierenden Struktur benötigt InductEx zwei weitere Dateien, um das Filament-Model zu erstellen und die Gegeninduktivitäten bestimmen zu können.

2.4.1 Layer Definition File

Das Layer Definition File (LDF) ist die Datei, in der die Materialeigenschaften und die Reihenfolge der einzelnen Lagen, die bei der Mikrostrukturierung nacheinander aufgebracht werden, angegeben ist. In Tabelle 2.1 wird aufgeführt, welche Schichten im Rahmen der Arbeit genutzt werden.

Tab. 2.1: Übersicht über die Art und Reihenfolge der verschiedenen Lagen, die bei der Simulation der verschiedenen Strukturen berücksichtigt wurden.

Schicht	Schichtdicke	Eindringtiefe λ_L	Material
NB1	250 nm	300 nm	Niob, supraleitend
ISO1	175 nm	–	SiO ₂ , Isolationsschicht
ISO2	175 nm	–	SiO ₂ , Isolationsschicht
NB2	500 nm	300 nm	Niob, supraleitend
M0	500 nm	300 nm	Niob, supraleitend; Resonatorlage

Im Fall einer supraleitenden Lage wird auch die London'sche Eindringtiefe in der Definition der entsprechenden Schicht festgelegt. Der Standardwert in InductEx für die London'sche Eindringtiefe ist 90 nm. Allerdings zeigten die Messungen von Nadine Foerster [Foe12], dass der Niobfilm, der in der Arbeitsgruppe produziert wird, eine Eindringtiefe von $\lambda_L = 270$ nm hat. Aus diesem Grund wurde als Simulationsparameter einen Eindringtiefe von 300 nm gewählt.

2.4.2 Netlist

In der Netlist wird ein vereinfachtes SPICE-Modell der Struktur angegeben, deren Induktivitäten und Gegeninduktivitäten berechnet werden soll. Hierbei werden den

in der CAD-Datei angegebenen Ports, zwischen denen die Induktivität der Struktur berechnet werden soll, Knoten zugeordnet. Zwischen diesen Knoten werden dann von FFH die Induktivitäten der entsprechenden Leiterschleifen bestimmt.

2.4.3 FFH

FFH ist ein auf FastHenry [Kam94] basierendes Programm zur numerischen Bestimmung von Induktivitäten und Widerständen dreidimensionaler Strukturen. Wie oben bereits erwähnt, benötigt FFH ein Filament-Model der zu simulierenden Struktur, die InductEx automatisch aus der CAD-Datei berechnet. Im Folgenden sollen die theoretischen Grundlagen der Induktivitätsberechnung mit FastHenry bzw. FFH kurz dargelegt werden. Zur Bestimmung der Induktivität wird die komplexe, von der Kreisfrequenz ω abhängende, Impedanz-Matrix $Z_{\mathbf{r}}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ von einer Struktur mit n Anschlüssen berechnet. Um $Z_{\mathbf{r}}(\omega)$ zu bestimmen wird ein Integralansatz verwendet. Hierbei wird berücksichtigt, dass sich der Verschiebungsstrom $\epsilon\omega\mathbf{E}$ im Rahmen der magnetisch quasi-statischen Näherung als vernachlässigbar angenommen werden kann und sich das Vektorpotential \mathbf{A} daher in Abhängigkeit von dem Strom \mathbf{J} in der Form

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.16)$$

schreiben lässt. Hierbei ist $\nabla \times \mathbf{A} = \mu\mathbf{H}$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ und V' bezeichnet das Volumen der Struktur. Für das Skalarpotential Φ folgt aus dem Faradayschen Gesetz und der Definition von \mathbf{A}

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi. \quad (2.17)$$

Wird der Leiter als ideal, dass heißt $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, angenommen, so ergibt sich aus Gleichung (2.16) und (2.17)

$$\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{\sigma} + \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = -\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (2.18)$$

Die Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ bildet mit (2.18) ein Gleichungssystem, durch dessen Lösung sich die Stromdichte und das Skalarpotential bestimmen lässt.

Im Rahmen der magnetisch quasi statischen Näherung kann man annehmen, dass der Strom innerhalb eines langen dünnen Leiters parallel zu seiner Oberfläche fließt. Daher bietet es sich an größere Strukturen in dünne Filamente zu unterteilen, in denen der Strom entlang der Filamentlänge fließt, um das Problem zu diskretisieren. Großflächige Strukturen mit zweidimensionaler Stromverteilung können in ein Filamentgitter zerlegt werden. Die Verbindung zwischen den Filamenten lassen sich

durch einen Graphen darstellen, wobei die Knoten n im Graph die Verbindungspunkte zwischen den Filamenten repräsentieren und die Kanten b die Filamente darstellen, in die die Struktur zerlegt wurde. Wenn der Strom in jedem Filament als konstant angenommen wird, kann die Stromverteilung durch

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) \approx \sum_{i=1}^b I_i w_i(\mathbf{r}) \mathbf{e}_i \quad (2.19)$$

genähert werden. Hierbei bezeichnet I_i den Strom innerhalb des Filaments, $w_i(\mathbf{r})$ den Einheitsvektor entlang des Filaments und $w_i(\mathbf{r})$ die Gewichtungsfunktion, die Null außerhalb und $\frac{1}{a_i}$ innerhalb des Filaments ist, wobei a_i die Querschnittsfläche des Filaments ist. Das Skalarprodukt aus der Gewichtungsfunktion w_i und Vektor-Integral-Gleichung (2.18) ergibt in Matrixform

$$(R + j\omega L)I_b = \tilde{\Phi}_A - \tilde{\Phi}_B, \quad (2.20)$$

wobei $I_b \in \mathbb{C}^b$ der Vektor der b Filamentströme ist. R ist die $b \times b$ -Diagonalmatrix der Filament-Gleichstromwiderstände, L ist die dichte $b \times b$ -Matrix der partiellen Induktivitäten und $\tilde{\Phi}_A$ und $\tilde{\Phi}_B$ sind die, über die Filamentquerschnittsflächen gemittelten, Potentiale.

Werden die Kontinuitätsgleichung und die Randbedingungen eingesetzt, lässt sich eine lösbare Impedanzmatrix Z erstellen. Allerdings ist der Rechenaufwand bei der direkten Lösung mit dem Gauss Verfahren mindestens von der Ordnung b^3 . Das heißt, dass für komplizierte Strukturen mit tausenden von Filamenten die Laufzeit leicht auf Tage ansteigen kann. Der erste Schritt zur Reduzierung des Rechenaufwands ist die Anwendung des Maschenstromverfahrens. Da sich die Stromverteilung in geschlossenen Schleifen, die keine anderen Schleifen einschließen, durch die Kirchhoff'schen Regeln berechnen lässt, kann mit dem Maschenstromverfahren die Anzahl der zu berechnenden Filamente reduziert werden. Da das Gauss-Verfahren zur direkten Lösung der Matrix, wie oben bereits erwähnt wurde, zu inakzeptabel hohen Laufzeiten führt, wird alternativ ein iteratives Verfahren mit konjugierten Residuen wie der Generalized Minimal Residual (GMRES) Algorithmus [Saa86] genutzt. Damit lässt sich der Rechenaufwand auf b^2 reduzieren. Außerdem kann der Rechenaufwand zur Erzeugung der Impedanzmatrix Z von der Ordnung b^2 auf b vermindert werden, wenn sie nicht explizit erstellt wird, sondern in Imaginär- und Realteil aufgespalten und mit Hilfe eines hierarchischen Multipol-Algorithmus erzeugt wird. Die ausführliche Beschreibung eines hierarchischen Multipol-Algorithmus ist sehr umfangreich und würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen. Weitere Informationen sind beispielsweise in [Gre88] zu finden. Des Weiteren lässt sich das iterative GMRES Verfahren deutlich beschleunigen, wenn, mit niedriger Laufzeit, eine gute Abschätzung der Lösung gefunden und als Startbedingung verwendet werden kann. Je nach Komplexität

der simulierten Schaltung gibt es verschiedene Ansätze eine gute Abschätzung zu finden. Für einfache Schaltungen ist eine Näherung über die lokalen Kopplungen am einfachsten, ein anderer Ansatz ist eine unvollständige LU-Zerlegung. Dabei wird die Matrix in eine linke unter und eine rechte obere Dreiecksmatrix zerlegt und durch Einsetzen gelöst. Weitergehende Beschreibungen zu den Lösungsmethoden, die FastHenry nutzt, sind in [Kam94] zu finden.

3. Simulation von existierenden SQUID-Designs

Um InductEx mit anderen numerischen Verfahren zu vergleichen, werden zunächst einfache rechteckige Washer simuliert. Im nächsten Schritt werden, in der Arbeitsgruppe bekannte und charakterisierte, rf- und dc-SQUIDs simuliert und die Simulationsergebnisse mit den Messungen verglichen, um die Eignung von InductEx für die Simulation von komplexen SQUID-Schaltungen zu testen.

3.1 InductEx-Funktionstest an Rechteckwashern

Für SQUIDs werden sehr häufig einfache, rechteckige Washergeometrien als SQUID-Induktivität verwendet [Cla04]. Dies liegt unter anderem daran, dass für diese Geometrien in der Vergangenheit auf der Grundlage von numerischen Simulationen ein empirischer Zusammenhang zwischen der Induktivität sowie der auftretenden charakteristischen Größe gefunden werden konnte. So beschrieben J.M. Jaycox und M.B. Ketchen [Jay81], dass die Induktivität von planaren, rechteckigen Washerstrukturen für große Leiterbahnbreiten w relativ zum Innendurchmesser d von oben gegen einen Grenzwert von $L = 1,25\mu_0d$ konvergiert, wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante ist. Um sicherzustellen, dass die mit InductEx gewonnenen Simulationsergebnisse mit anderen numerischen Verfahren vergleichbar sind und somit korrekte Simulationsparameter gefunden wurden, sind rechteckige Washer mit unterschiedlichen Leiterbahnbreiten w und Innendurchmessern d simuliert und mit den numerischen Ergebnissen aus [Jay81] verglichen worden. Zusätzlich zu dem dort angegebenen Grenzwert $L = 1,25\mu_0d$ wurde das Verhalten für kleine Leiterbahnbreiten relativ zum Innendurchmesser untersucht. Es wurden insgesamt 39 Simulationen von unterschiedlichen Kombinationen von Bahnbreiten w und Innendurchmessern d durchgeführt. Für die Simulationen wurden die Rechteckwasher mit entsprechenden Abmessungen gezeichnet. Für die London'sche Eindringtiefe wurde ein Wert von $\lambda_L = 90$ nm gewählt. In Abbildung 3.1 wurden die simulierten Induktivitäten L gegen die Bahnbreite w aufgetragen, wobei beide Größen mit dem Innendurchmesser d normiert wurden. Die in [Jay81] angegebenen Werte sind ebenfalls aufgetragen. Die rote Linie in der Abbildung entspricht dem in [Jay81] angegebenen Grenzwert $L = 1,25\mu_0d$. Die Induktivitäten folgen dem Verlauf der von Jaycox und Ketchen berechneten Werte und für große Leiterbahnbreiten relativ zum Innendurchmesser, das heißt $w/d > 1$, stellt sich der erwartete Grenzwert ein. Um zukünftig Washer leichter dimensionieren zu können, wird der Bereich von etwa 10^{-4} bis 10^{-2} w/d mit einer logarithmischen Funktion gefittet. Dieser Bereich entspricht den Simulationen mit Außendurchmessern von

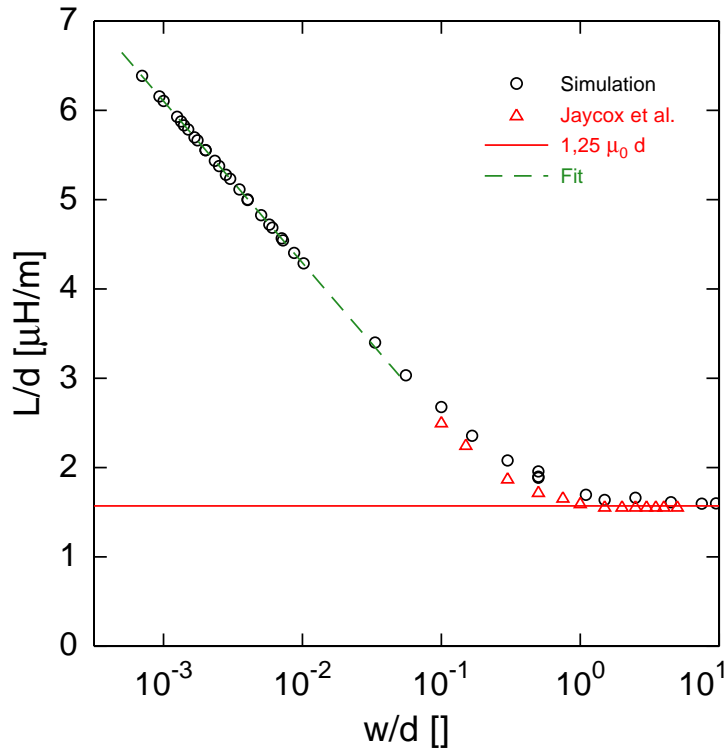


Abb. 3.1: Die schwarzen Kreise entsprechen den Simulationsergebnisse der rechteckigen Washer, die roten Dreiecke den Ergebnisse von Jaycox und Ketchen aus [Jay81]. Die rote Linie markiert die Schranke von $L = 1,25\mu_0 d$. In dem Bereich von 10^{-4} bis $1,1 \cdot 10^{-2} w/d$ wurde der im Text näher beschriebene Fit aufgetragen. Bahnweite w und Induktivität L sind jeweils mit dem Innendurchmesser d normiert.

350 μm bis 2000 μm . Explizit wurde die Funktion

$$f(x) = a \cdot \log(x) + c \quad (3.1)$$

an den entsprechenden Bereich angepasst. Der Fit ergibt die Koeffizienten

$$a = -1,8108 \pm 0,0029 \quad (3.2)$$

$$c = 0,6711 \pm 0,0076. \quad (3.3)$$

Der Fit ist in Abbildung 3.1 im entsprechenden Bereich aufgetragen. Aus der Abbildung ist zweifelsfrei zu erkennen, dass mit Werten von InductEx die in [Jay81] bestimmten Werte reproduziert werden konnten und damit die richtigen Startparameter für zukünftige Simulationen gefunden wurden.

3.2 Simulation von rf-SQUIDs

Bei vielen Anwendungen muss eine große Anzahl von Detektoren ausgelesen werden. In diesen Fällen ist es nicht möglich jeden Detektor über eine eigene Leitung auszulesen. Um die Anzahl an Leitungen zu reduzieren werden mehrere Detektoren mithilfe eines Multiplexverfahrens über eine gemeinsame Leitung ausgelesen. Eine Möglichkeit ein solches Multiplexverfahren zu realisieren, ist der sogenannte Mikrowellen-SQUID-Multiplexer [Kem12]. Bei dem Mikrowellen-SQUID-Multiplexer werden supraleitende Mikrowellenresonatoren unterschiedlicher Resonanzfrequenz kapazitiv an eine Durchgangsleitung gekoppelt. An jeden Resonator ist ein ungeschuntetes, nicht-hysteretisches rf-SQUID induktiv gekoppelt. Das rf-SQUID besteht aus einer supraleitenden Leiterschleife mit Induktivität L_S , die von einem einzelnen Josephson-Kontakt mit dem kritischen Strom I_C unterbrochen wird. Analog zum dc-SQUID lässt sich der Abschirmparameter

$$\beta_L = \frac{2\pi L_S I_C}{\Phi_0} \quad (3.4)$$

für das rf-SQUID definieren. Für Werte von $\beta_L < 1$ zeigt ein rf-SQUID ein nicht-hysteretisches Verhalten und kann als flussabhängige Induktivität $L_S(\varphi)$ betrachtet werden. Damit lässt sich über den Fluss im SQUID die Resonanzfrequenz des zugehörigen Mikrowellenresonators beeinflussen. Ein Kanal des Multiplexers wird ausgelesen, in dem der Resonator über eine Durchgangsleitung auf seiner Resonanzfrequenz angeregt wird. Das rf-SQUID wird abhängig vom einkoppelnden Fluss die Resonanzfrequenz des Kanals verschieben. Über eine Messung der Transmission des Kanals lässt sich das gemessene Signal auslesen. In der Arbeitsgruppe wurden zwei Varianten des hier betrachteten rf-SQUIDs entwickelt. Bei der ersten Variante (siehe Abbildung 3.2 Rechts) hat das SQUID kontinuierliche Washer, das heißt die Einkoppel- und Rückkoppelpule liegen, durch eine Isolationsschicht getrennt, auf einem Washer, der aus einer durchgehenden Niobfläche besteht. Die zweite Variante (siehe Abbildung 3.2 Links) hat geschlitzte Washer. Hierbei wird der Bereich direkt unter den auf dem Washer liegenden Spulen ausgespart, um die kapazitive Kopplung zwischen den Spulen und dem SQUID zu reduzieren. Anderweitig kann das hochfrequente Träger-signal aus der Durchgangsleitung den Detektor stören. Die Simulationsergebnisse für beide Versionen sind in Tabelle 3.1 eingetragen.

Bei den durchgeführten Simulationen ist zu beachten, dass die in der Arbeitsgruppe aktuell installierte Version von InductEx nicht in der Lage ist eine große dreidimensionale Massefläche zu simulieren. Das Programm bricht nach langer Laufzeit mit Fehlern ab. Daher konnte die Resonator-koppelinduktivität nicht, wie im Design eigentlich vorgesehen, von einer Massefläche umgeben werden. Diese Massefläche wurde durch eine Leiterbahn, die die drei unteren Kontakte der Resonator-koppelinduktivität verbindet, ersetzt, um diese Kontakte auf ein äquivalentes Potential

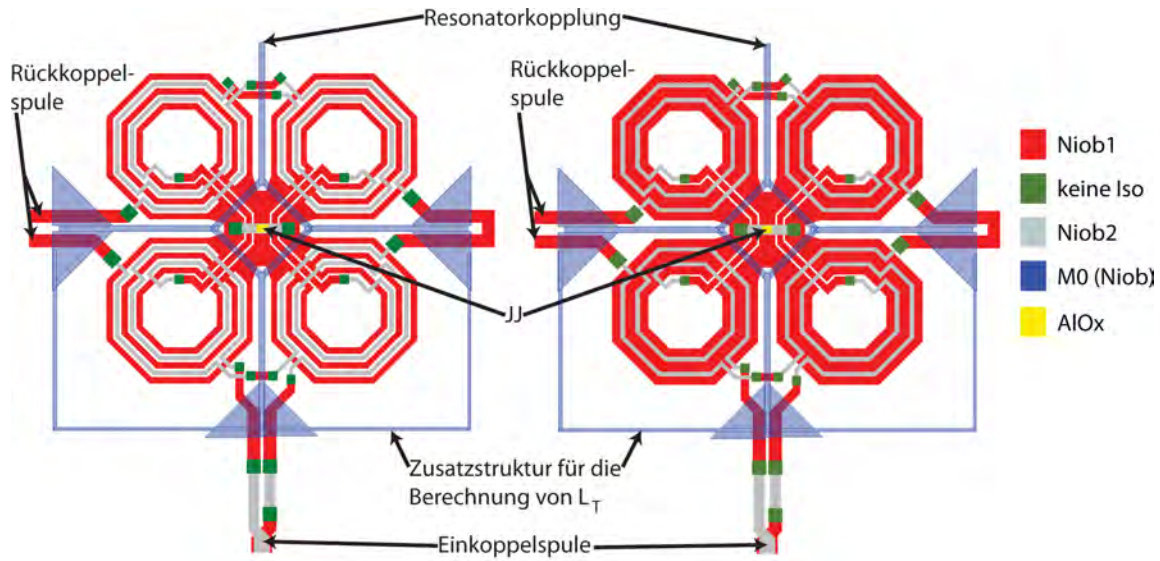


Abb. 3.2: (Links) Rf-SQUID mit geschlitzten Washern. (Rechts) Rf-SQUID mit kontinuierlichen Washern. JJ bezeichnet jeweils den Josephson-Kontakt.

Tab. 3.1: Simulationsergebnisse rf-SQUID mit $\lambda_L = 300\text{nm}$

	geschlitzte Washer	kontinuierliche Washer
SQUID-Induktivität L_S	39,8 pH	36,4 pH
Einkoppelinduktivität L_i	2311,0 pH	2011,0 pH
Rückkoppelinduktivität L_{fb}	838,5 pH	710,5 pH
Resonatorkoppelinduktivität L_T	222,9 pH	217,6 pH
inverse Kopplung		
$\frac{1}{M_{S,i}}$	$16,0 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$	$14,1 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
$\frac{1}{M_{S,fb}}$	$45,1 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$	$41,5 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
$\frac{1}{M_{i,fb}}$	$15,4 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$	$12,6 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
$\frac{1}{M_{S,T}}$	$297,2 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$	$302,7 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
$\frac{1}{M_{i,T}}$	$61,4 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$	$61,5 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
$\frac{1}{M_{fb,T}}$	$174,8 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$	$195,2 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$

zu bringen (siehe Abbildung 3.2). Dadurch sind die Simulationsergebnisse für L_T und $M_{S,T}$ mit Vorsicht zu genießen. Da die rf-SQUIDs Teil eines auf metallisch magnetischen Kalorimetern basierenden Detektorarrays mit integriertem Mikrowellen-SQUID-Multiplexer sind, ist die Einkoppelspule direkt mit dem Detektor supraleitend verbunden. Aus diesem Grund wird die SQUID-Induktivität durch den an die Einkoppelspule angeschlossenen Detektor teilweise abgeschirmt. Die abgeschirmte

SQUID-Induktivität L_S^* lässt sich mit Hilfe des Ausdrucks

$$L_S^* = \left(1 - k \frac{L_i}{L_i + L_p}\right) L_S, \quad (3.5)$$

berechnen, wobei k der Kopplungsfaktor zwischen Einkoppelspule- und SQUID-Induktivität ist und L_p die Induktivität des Detektors bezeichnet. Die Herleitung dieser Formel würde den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, allerdings ist sie in [Kem12] ausführlich diskutiert. Die Induktivität L_p des Detektors wurde, durch eine Simulation des Detektors mit InductEx, auf einen Wert von $L_p = 938$ pH bestimmt. Der Kopplungsfaktor k wurde ebenfalls von InductEx berechnet und kann mit $k = 0,542$ für den kontinuierlichen Washer angegeben werden. Mit Gleichung (3.5) ergibt sich die abgeschirmte SQUID-Induktivität des rf-SQUIDs mit kontinuierlichen Washern zu $L_S^* = 22,9$ pH. Mit der bekannten Formel $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ für die Gegeninduktivität zweier Induktivitäten L_1 und L_2 werden die neuen Kopplungen bzw. inversen Kopplungen für $M_{S,T}$ und $\frac{1}{M_{S,fb}}$ bestimmt. Die Kopplungsfaktoren k ergeben sich wieder aus der Simulation und liegen für $M_{S,T}$ bei 0,0767 und für $\frac{1}{M_{S,fb}}$ bei 0,310. Die Darstellung von $\frac{1}{M_{S,fb}}$ als inverse Kopplung und $M_{S,T}$ als direkte Kopplung wird gewählt, weil so der Vergleich mit den experimentellen Werten leichter ist. Damit ergibt sich für die abgeschirmten SQUID-Rückkoppelspulen-Kopplungen $\frac{1}{M_{S,fb}} = 52,3$ μ A. Experimentell wurde $\frac{1}{M_{S,fb,exp}} = 55,7$ μ A bestimmt, das heißt, dass der Simulationswert etwa 7% kleiner als der Messwert ist. Für die abgeschirmte SQUID-Resonator-Kopplung erhält man $M_{S,T} = 5,4$ pH, wobei sich experimentell $M_{S,T,exp} = 4,1$ pH ergibt, womit die Simulation 32% größer als der Messwert ist. Allerdings muss für die Resonatorinduktivität, wie oben beschrieben, eine höhere Ungenauigkeit, aufgrund der Vereinfachung der Massefläche, angenommen werden. Um die Genauigkeit der Simulation für L_S^* zu bestimmen wird die maximale Frequenzverschiebung Δf_r^{\max} bei der Resonanzfrequenz f_r nach

$$\Delta f_r^{\max} = \frac{4f_r^2 M_{S,T}^2}{Z_{LR} L_S} \frac{2\beta_L}{1 - \beta_L^2} \quad (3.6)$$

bestimmt, wobei für die Impedanz Z_{LR} ein Standardwert von 50Ω angenommen wird. Die Herleitung von Gleichung (3.6) ist ebenfalls in [Kem12] zu finden. Für die Resonanzfrequenz f_r , β_L und die SQUID-Resonantorkopplung $M_{S,T}$ werden die experimentell bestimmten Werte mit $f_r = 4,765$ GHz und $\beta_L = 0,77$ verwendet, da nur die Genauigkeit von L_S^* überprüft werden soll und weitere fehlerbehaftete Parameter die Aussage verfälschen würden. Es ergibt sich $\Delta f_r^{\max} = 5,04$ MHz. Dieser Wert weicht nur etwa 1% von dem experimentellen Wert von 5,1 MHz ab, weshalb angenommen werden kann, dass die Induktivität L_S^* sehr gut mit der tatsächlichen SQUID-Induktivität übereinstimmt.

Analog wird die Rechnung für das rf-SQUID mit geschlitzten Washern wiederholt.

Um die abgeschirmte SQUID-Induktivität zu berechnen, wird wieder der Kopplungsfaktor zwischen SQUID und Einkoppelspule benötigt. Für das rf-SQUID mit geschlitzten Washern gibt InductEx einen Kopplungsfaktor von $k = 0,427$ aus. Mit Gleichung (3.5), den Induktivitäten aus Tabelle 3.1 und der Detektorinduktivität L_p ergibt sich eine abgeschirmte SQUID-Induktivität von $L_S^* = 27,6$ pH. Mit dem, durch InductEx bestimmten, Kopplungsfaktor k für $M_{S,T}$ von 0,737 und für $\frac{1}{M_{S,fb}}$ von 0,251 werden die abgeschirmten Kopplungen auf $M_{S,T} = 5,78$ pH und $\frac{1}{M_{S,fb}} = 54,1 \mu A \Phi_0^{-1}$ bestimmt. Experimentell ergibt sich für die SQUID-Rückkoppelspulen-Kopplung $\frac{1}{M_{S,fb,exp}} = 55,6 \mu A \Phi_0^{-1}$, was einer Abweichung von 3% entspricht. Die SQUID-Resonatorkopplung weicht 13% von dem Messwert $M_{S,T} = 6,5$ pH ab, allerdings wurde, wie oben schon besprochen, die Massefläche in der Resonatorlage nicht berücksichtigt, was die hohe Ungenauigkeit erklärt. Analog zum rf-SQUID mit kontinuierlichen Washern wird mit Hilfe von Gleichung (3.6) getestet, ob die SQUID-Induktivität korrekt ist. Dabei werden, wie oben, die gemessenen Resonanzfrequenz von $f_r = 4,097$ GHz und der gemessene Abschirmparameter von $\beta_L = 0,56$, sowie die experimentell bestimmte SQUID-Resonatorkopplung $M_{S,T}$ genutzt. Damit ergibt sich $\Delta f_r^{\max} = 3,35$ MHz was 5% von der gemessenen maximalen Resonanzverschiebung $\Delta f_r^{\max} = 3,5$ MHz abweicht und damit auf eine hohe Genauigkeit der berechneten SQUID-Induktivität hinweist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass InductEx die Induktivitäten und Gegeninduktivitäten von rf-SQUIDs mit guter Genauigkeit bestimmen kann, allerdings aktuell nicht geeignet ist, das vollständige Modell eines rf-SQUIDs inklusive aller Masseflächen zu berechnen.

3.3 Simulation aktuellen dc-SQUID-Designs

Wie in Kapitel 2.3 besprochen wurde, stellen dc-SQUIDs empfindliche Fluss-zu-Spannungs-Wandler dar. Sie werden in der Arbeitsgruppe in vielen Anwendungen genutzt, zum Beispiel um metallische magnetische Kalorimeter auszulesen. In diesem Zusammenhang wurde in der Vergangenheit eine ganze Reihe von eigenentwickelten SQUIDs in der Arbeitsgruppe detailliert charakterisiert. Der dadurch entstandene Datensatz eignet sich hervorragend für einen Vergleich experimentell bestimmter Werte mit Vorhersagen von InductEx. Insgesamt existieren zwei leicht voneinander verschiedene dc-SQUID-Designs, die aktuell in der Arbeitsgruppe zur Herstellung von SQUIDs verwendet werden (vergleiche Abbildung 3.3). Bei Version 2 sollte die Induktivität der Einkoppelspule gesenkt werden, ohne, dass die Kopplung zwischen SQUID und Einkoppelspule reduziert wird. Aus diesem Grund wurden die Schlaufen auf Höhe der Josephson-Kontakte und in der Washermitte und die Ausbuchtung bei den Einkoppel- und Rückkoppelspulen-Zuleitungen entfernt, da sie kaum in das SQUID

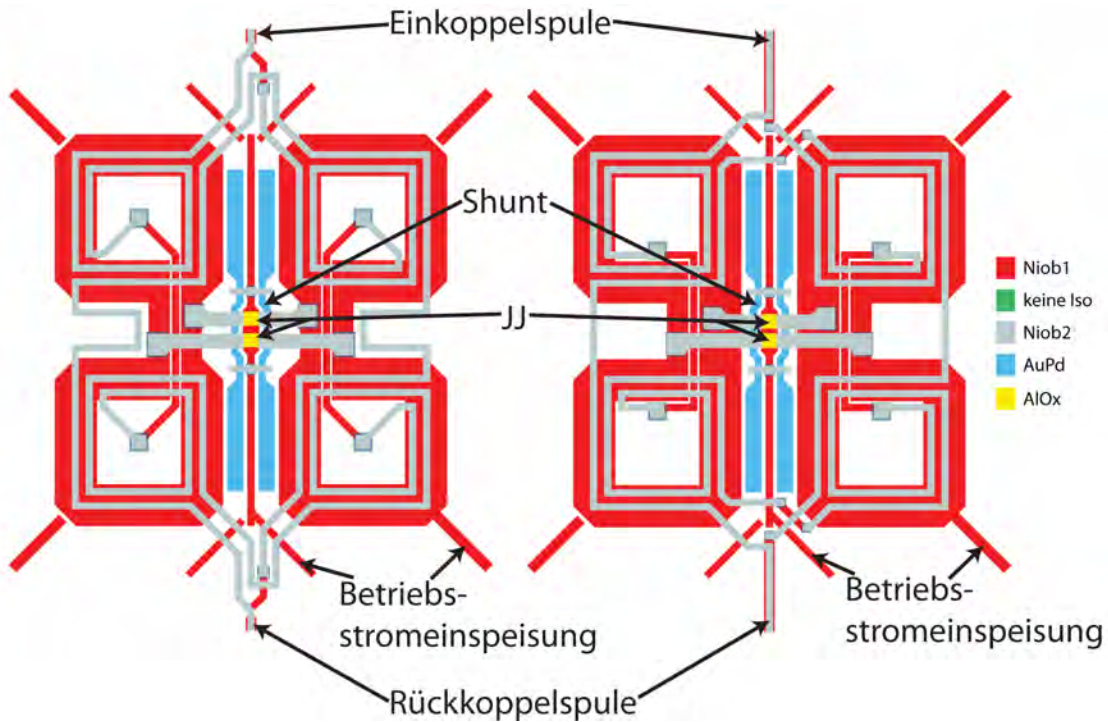


Abb. 3.3: Das dc-SQUID-Design, wie es aktuell in der Arbeitsgruppe vorhandene ist, in Version 1 (links) und Version 2 (rechts). JJ markiert die Josephson-Kontakte.

koppeln. Version 1 wurde in [Kem15] ausführlich charakterisiert, für Version 2 liegen in der Arbeitsgruppe ebenfalls umfangreiche Messwerte vor. Die Simulations- und Messergebnisse sind in Tabelle 3.2 zu finden. Für Version 1 stimmen sie gut überein. Die höchste Abweichung ergibt sich für die Einkoppelinduktivität L_i , bei der der Messwert 22% kleiner als das Simulationsergebnis ist. Die Abweichung zwischen Simulation und Messung für die SQUID-Induktivität L_S , die Kopplungen zwischen SQUID und Einkoppelspule $\frac{1}{M_{S,i}}$ und zwischen SQUID und Rückkoppelspule $\frac{1}{M_{S,fb}}$ ist kleiner als 5%. Für die parasitäre Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule $\frac{1}{M_{i,fb}}$ ergibt sich eine Abweichung von 15%.

Für Version 2 zeigt die Simulation auch eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Die Kopplung zwischen SQUID und Einkoppelspule $\frac{1}{M_{S,i}}$ und SQUID und Rückkoppelspule $\frac{1}{M_{S,fb}}$ zeigt eine Abweichung von unter 2%. Allerdings weichen die simulierte und die gemessene Einkoppelinduktivitäten L_i 30% voneinander ab. Es fällt auf das bei der Simulation beider Versionen die Induktivität der Einkoppelspule jeweils etwa 400 pH größer als der Messwert ist. Die Ursache hierfür ist nicht verstanden, insbesondere da InductEx bisher immer eine sehr guter Übereinstimmung mit der Messung hatte.

Tab. 3.2: Simulationsergebnisse von dc-SQUIDs im Vergleich mit Messwerten, für die leeren Felder liegen keine Daten vor.

	Version 1		Version 2	
	sim	exp	sim	exp
SQUID-Induktivität L_S in pH	49,3	50,1	44,5	
Einkoppelinduktivität L_i in pH	2033,4	1600	1835,9	1280
Rückkoppelinduktivität L_{fb} in pH	811,1		692,3	
SQUID-Ein.-Kopplung $\frac{1}{M_{S,i}}$ in $\mu A \Phi_0^{-1}$	12,4	12,7	12,6	12,4
SQUID-Rück.-Kopplung $\frac{1}{M_{S,fb}}$ in $\mu A \Phi_0^{-1}$	35,4	35,5	35,9	35,8
Ein.-Rück.-Kopplung $\frac{1}{M_{i,fb}}$ in $\mu A \Phi_0^{-1}$	20,7	23,9	14,2	

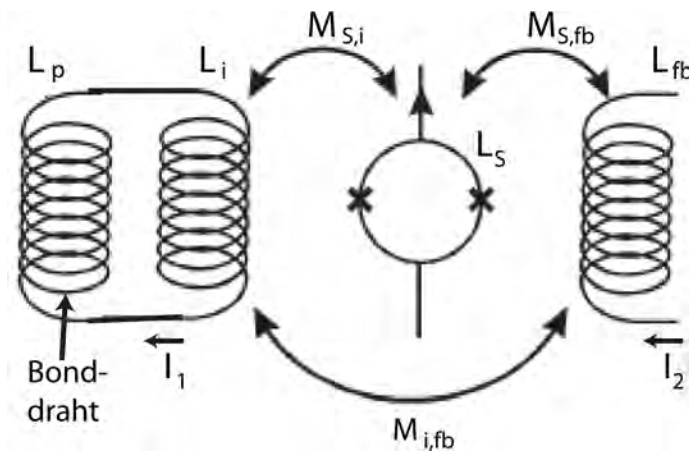


Abb. 3.4: Schematische Darstellung der Kopplungen innerhalb eines SQUIDs, mit kurzgeschlossener Einkoppelspule.

3.3.1 Bestimmung der parasitären Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule

Messung und Simulation des aktuellen dc-SQUID-Design zeigen eine starke Kopplung zwischen der Einkoppel- und Rückkoppelspule, die vergleichbar mit der Kopplung zwischen SQUID und Einkoppelspule ist. Eine ähnlich starke parasitäre Kopplung zeigen die Simulationsergebnisse der rf-SQUIDs. In diesem Abschnitt soll die Messung der parasitären Kopplung im Fall eines dc-SQUIDs genauer diskutiert werden. In Abbildung 3.4 kann man sehen, dass die parasitäre Kopplung die Einkoppel- und Rückkoppelspule induktiv miteinander verbindet. Bei der Auslesung von magnetischen Kalorimetern oder Rauschthermometern kann es dadurch zu einem unerwünschten Übersprechen zwischen der Rückkoppelspule und der Einkoppelspule kommen, wodurch das Rückkoppelsignal direkt in den Detektor einkoppeln kann. Bei dem aktuellen dc-SQUID-Design, das in Abbildung 3.3 zu sehen ist, winden sich

die Einkoppel- und Rückkoppelspule um dasselbe Washerloch, aufgrund der Flussfokussierung des SQUIDs und der räumlichen Nähe koppeln die beiden Spulen stark. Zur experimentellen Bestimmung der parasitären Kopplung wird die Einkoppelspule mit einem supraleitenden Niob-Bonddraht kurzgeschlossen. Wird über die Rückkoppelspule magnetischer Fluss in die kurzgeschlossene Einkoppelspule eingekoppelt, so bilden sich, aufgrund der Flusserschaltung in geschlossene supraleitenden Kreisen, Abschirmströme δI_1 . Die Summe der Ströme

$$L_{\text{ges}}\delta I_1 + M_{i,\text{fb}}\delta I_2 = 0 \quad (3.7)$$

ist daher gleich Null, wobei $M_{i,\text{fb}}\delta I_2$ der, durch den Strom δI_2 in der Rückkoppelspule, eingekoppelte Fluss ist und $L_{\text{ges}}\delta I_1$ die Abschirmströme mit der Gesamtinduktivität $L_{\text{ges}} = L_i + L_p$ der kurzgeschlossenen Einkoppelspule und L_p die Induktivität des Niob-Bonddrahts. Im allgemeinen setzt sich der, in das SQUID einkoppelnde, Netto-Fluss Φ_S^{netto} aus den Flüssen durch die Einkoppel- und die Rückkoppelspule zusammen. Im Fall der kurzgeschlossenen Einkoppelspule ist der magnetische Fluss komplett durch den Strom I_2 in der Rückkoppelspule gegeben, womit sich die Relation

$$\delta I_2 M_{S,\text{fb}} + \delta I_1 M_{S,i} = \Phi_S^{\text{netto}} = M_{S,\text{fb}}^{\text{geschl}} \delta I_2 \quad (3.8)$$

ergibt, wobei $M_{S,\text{fb}}^{\text{geschl}}$ die Kopplung zwischen SQUID und Rückkoppelspule im Fall der kurzgeschlossenen Einkoppelspule ist. Wird das System aus Gleichung (3.7) und (3.8) bezüglich $M_{i,\text{fb}}$ gelöst, so ergibt sich

$$M_{i,\text{fb}} = \frac{M_{S,\text{fb}}^{\text{geschl}} - M_{S,\text{fb}}}{M_{S,i}} L_{\text{ges}}. \quad (3.9)$$

Eine ausführliche Herleitung findet sich in [Fle98]. Die Kopplungen zwischen SQUID und Einkoppel- beziehungsweise Rückkoppelspule lassen sich durch die Periodizität der Φ - V -Kennlinie bestimmen, wie in Kapitel 4.2 beschrieben. Damit ergibt sich für den Fall der kurzgeschlossenen Einkoppelspule eine Kopplung zwischen SQUID und Rückkoppelspule von $37,9 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und die Kopplungen für die offene Einkoppelspule sind mit $\frac{1}{M_{S,\text{fb}}} = 35,5 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und $\frac{1}{M_{S,i}} = 12,7 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ bereits bekannt. Um die Gesamtinduktivität L_{ges} zu bestimmen, wird die Einkoppelspule mit einem Al-Bonddraht kurzgeschlossen und ein Rauschfit an die entstehende RL -Tiefpasscharakteristik gemacht. Diese Methode ist in Kapitel 4.2 zur Bestimmung der Einkoppelspuleninduktivität genauer erklärt. Es ergibt sich eine Gesamtinduktivität von $L_{\text{ges}} = 3,93 \text{ nH}$. Die parasitäre Kopplung beträgt dann nach Gleichung (3.9) $\frac{1}{M_{i,\text{fb}}} = 23,9 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$. Der simulierte Wert weicht, wie oben bereits erwähnt, um 15% von diesem Messwert ab.

4. Entwicklung eines neuen dc-SQUID-Design

In Kapitel 3.3 wurde gezeigt, dass die aktuell in der Arbeitsgruppe hergestellten SQUIDs eine große parasitäre Kopplung zwischen der Einkoppel- und der Rückkoppelpule zeigen. Diese parasitäre Kopplung kann in einigen experimentellen Fällen zu signifikanten Störungen der eigentlichen Messung führen. Aus diesem Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe von InductEx ein neues dc-SQUID-Design entwickelt, bei dem diese parasitäre Kopplung deutlich reduziert ist. Zugleich wurde darauf geachtet, dass die Induktivität der Einkoppelpule im Bereich zwischen 1 nH und 1,3 nH liegt, da dieser Wert „ideal“ für hochauflösende magnetische Kalorimeter für weiche Röntgenstrahlung ist [Kem15]. Da InductEx die genaue Bestimmung der Induktivitäten vor der eigentlichen Realisierung ermöglicht, war es möglich, das neu entwickelte SQUID-Design auf diese beiden Punkte hin zu optimieren. In diesem Zusammenhang wurde als Nebenbedingung darauf geachtet, dass die Breite der im SQUID verwendeten supraleitenden Strukturen so klein ist, dass das Eindringen von Vortices in diese Bahnen verhindert wird [Sta04]. Die zufällige Bewegung von Vortices in diesen Strukturen kann ansonsten zu einem niederfrequenten Rauschbeitrag führen, der sich negativ auf die Sensitivität des SQUIDs auswirkt.

4.1 Beschreibung des neuen dc-SQUID-Design

Wie schon die aktuellen Designs, ist das neue dc-SQUID-Designs als Gradiometer zweiter Ordnung angelegt. Der Grund hierfür ist, dass auf diese Weise das Einkoppeln externer homogener oder linearer Gradientenfelder deutlich reduziert ist und so das SQUID unanfälliger gegen die magnetische Umgebung ist. Bei einem Gradiometer erster Ordnung werden zwei identische Spulen parallel oder in Serie geschaltet und ihr Windungssinn so gewählt, dass der durch ein externes Magnetfeld induzierte Strom sich aufhebt, wie man in Abbildung 4.1 a) und b) sehen kann. In Abbildung 4.1 c) ist ein Parallelgradiometer zweiter Ordnung zu sehen, bei dem sich auch die durch einen linearen Feldgradienten induzierten Ströme aufheben. Wie in der Abbildung zu erkennen ist werden hierfür vier identische Induktivitäten parallel verschaltet. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte SQUID ist als Parallelgradiometer zweiter Ordnung realisiert. Hierfür wurden vier identische Induktivitäten L_W parallel verschaltet, so dass sich die Gesamtinduktivität des SQUIDs zu $L_S = \frac{L_W}{4}$ ergibt. Entsprechend dem generellen Entwurf eines Washer-SQUIDs [Jay81] wurde auf diese Strukturen die Einkoppelpule sowie die Rückkoppelpule gelegt, wobei die verschiedenen Teilspulen jeweils seriell miteinander verschaltet sind. In Abbildung

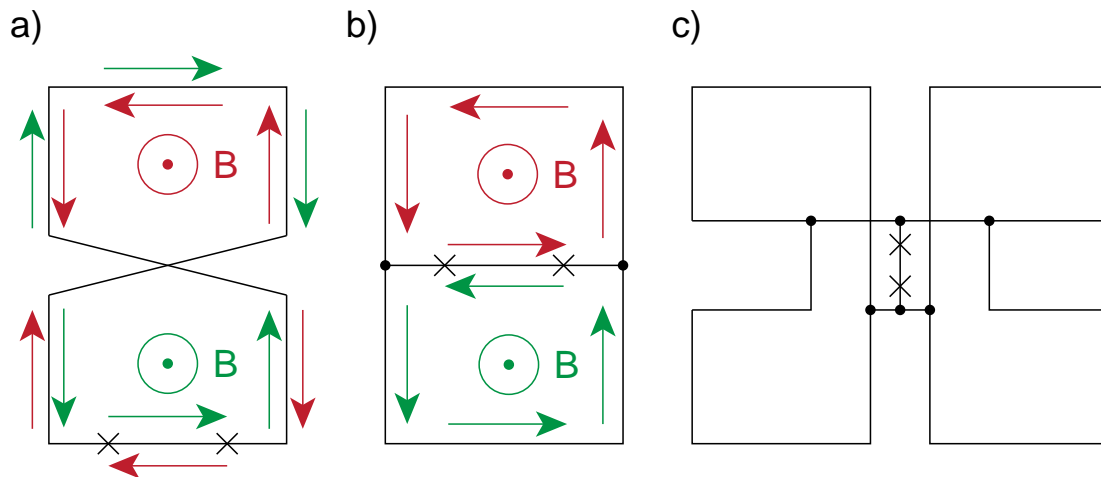


Abb. 4.1: Schematische Darstellung eines a) seriellen Gradientometers und b) Parallelgradientometers erster Ordnung in einem Magnetfeld B . c) Schematische Darstellung eines Parallelgradientometers zweiter Ordnung. Die Kreuze den Schaltungen markieren die Position der Josephson-Kontakte.

4.2 ist (Oben) die schematische Darstellung des finalen Designs zu sehen und (Unten) zeigt ein Foto des fertig produzierten SQUIDs. Es wurde die Kleeblatt-Struktur des aktuellen Designs übernommen, da durch den symmetrischen Aufbau die Gradienteneigenschaften des SQUIDs unterstützt werden sollten, in dem die einzelnen Washer gleich auf externe Magnetfelder reagiert. Wie oben bereits erwähnt, wurde die Breite der supraleitenden Leiterbahnen auf maximal $6\ \mu\text{m}$ beschränkt, um das Eindringen von Vortices zu vermeiden. Dadurch ist es jedoch nicht möglich, mehrere Windungen der Einkoppelspule auf einen Washer zu legen, da die aktuell in der Arbeitsgruppe verwendeten Fertigungstechniken nur mit hohem Aufwand Leiterbahnen mit einer Breite unter $2,5\ \mu\text{m}$ zulassen. Für eine möglichst gute Kopplung wird die Einkoppelspule daher so viel wie möglich auf oder an dem SQUID-Washer entlang geführt. Dabei können die Induktivitäten der Einkoppel- und Rückkoppelspule über die Länge der Spule eingestellt werden. Um die parasitäre Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule zu reduzieren werden sie räumlich getrennt. Wenn Einkoppel- und Rückkoppelspule auf demselben Washer liegen, wie dies bei dem aktuellen Design der Fall ist (vergleiche Kapitel 3.3.1), so koppeln die beiden Spulen aufgrund der Flussfokussierung des Washers stark miteinander. Wird der Washer jedoch mit zwei Löchern versehen und die Einkoppel- und Rückkoppelspule um die beiden verschiedene Löcher gelegt, so können die Spulen räumlich getrennt werden und koppeln nicht über die Flussfokussierung des Washers. Da das Design möglichst symmetrisch um die Josephson-Kontakte sein soll, um sehr gute Gradienteneigenschaften zu erhalten, und die Einkoppelspule eine deutlich höhere Induktivität als die Rückkoppelspule hat, wird die Rückkoppelspule um das kleinere Washerloch im

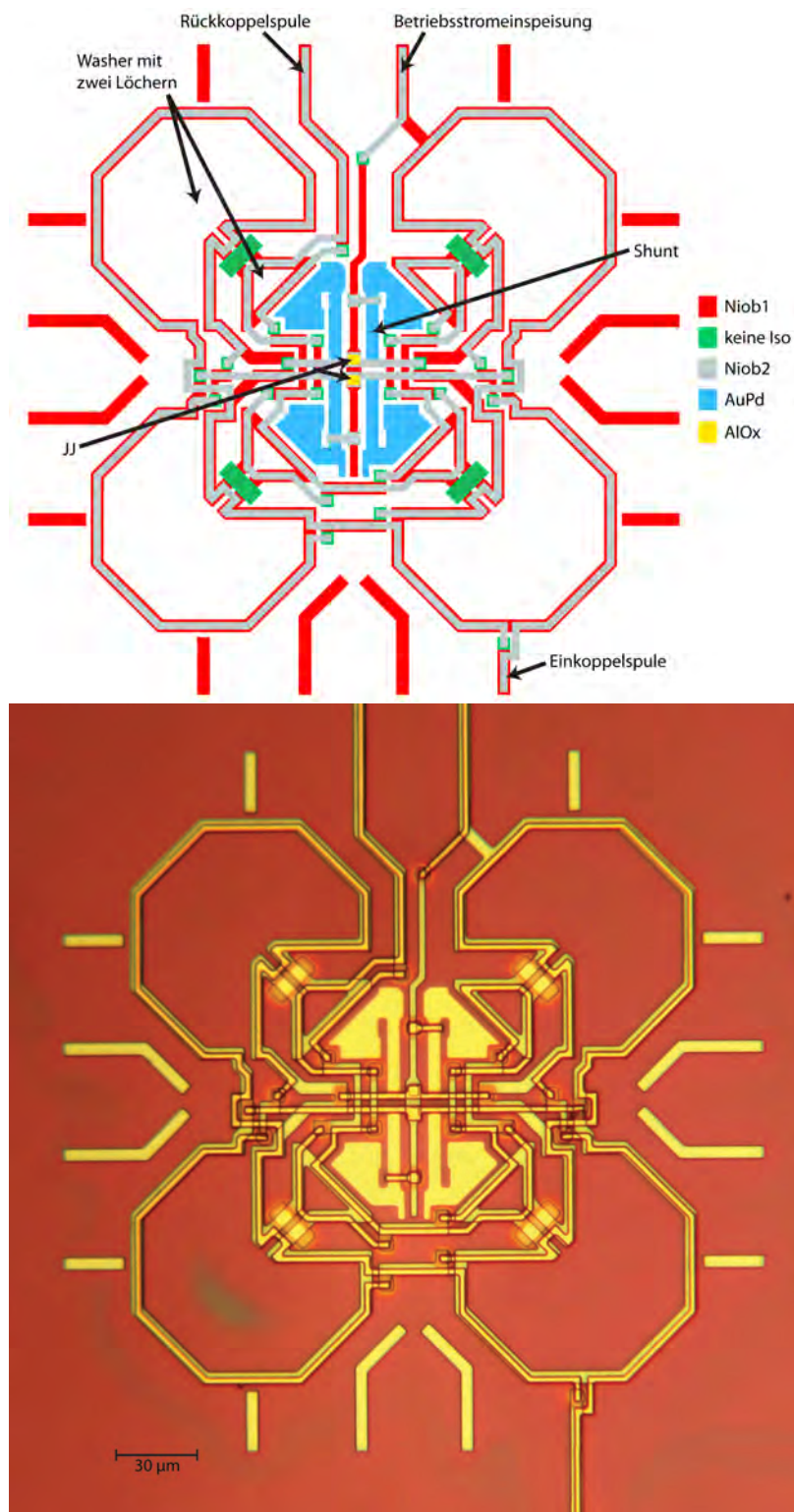


Abb. 4.2: (Oben) Schematische Darstellung des im Rahmen der Arbeit entwickelten dc-SQUIDs. JJ bezeichnet die beiden Josephson-Kontakte im Zentrum des SQUIDs. (Unten) Mikroskopische Aufnahme des fertig produzierten dc-SQUIDs

Tab. 4.1: Simulationsergebnisse für das neue dc-SQUID-Design

SQUID-Induktivität L_S	85,6 pH
Einkoppelinduktivität L_i	1141,9 pH
Rückkoppelinduktivität L_{fb}	360,8 pH
Kopplung SQUID-Einkoppelspule $\frac{1}{M_{S,i}}$	11,3 $\mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
Kopplung SQUID-Rückkoppelspule $\frac{1}{M_{S,fb}}$	113,0 $\mu\text{A}\Phi_0^{-1}$
Kopplung Einkoppel-/Rückkoppelspule $\frac{1}{M_{i,fb}}$	194,3 $\mu\text{A}\Phi_0^{-1}$

Zentrum des SQUIDs platziert und die Einkoppelspule um das größere Washerloch an der Außenseite des SQUIDs. Durch die Positionierung der Josephson-Kontakte im Zentrum des SQUIDs ist es außerdem notwendig, die Washer, die rechts und links von den Josephson-Kontakten angeordnet sind, mit einer langen Brücke zu verbinden. Da das SQUID an sich ziemlich klein ist, der Gesamtdurchmesser liegt bei etwa 200 μm was halb so viel ist wie bei dem aktuellen Design, und die Josephson-Kontakte aus Symmetriegründen in der Mitte des SQUIDs liegen, sind die Shunt-Widerstände ebenfalls im Inneren des SQUIDs positioniert. Dadurch ist für die Kühlflächen nur sehr wenig Platz, da die Induktivitäten sehr stark anwachsen wenn die Washer weiter auseinander bewegt werden, zusätzlich vermindern sich die Kopplungen. Es besteht die Möglichkeit, dass sich das SQUID durch die zu kleinen Kühlflächen selbst heizt, was zu einem erhöhten weißen Rauschen führen würde.

Tabelle 4.1 zeigt die Simulationsergebnisse der finalen Version des neuen dc-SQUID-Designs, das in Abbildung 4.2 zu sehen ist. Die Einkoppelspuleninduktivität L_i ist kleiner als bei dem aktuellen Design und liegt genau im gewünschten Bereich. Wie in Abbildung 4.2 zu sehen ist wurde der Washer mit zwei Löchern realisiert, um die parasitäre Kopplung zu reduzieren. Die Simulationsergebnisse zeigen eine deutliche Reduktion der Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule um fast eine Größenordnung. Außerdem kann man in Abbildung 4.2 auch sehen, dass das komplette SQUID aus sehr schmalen Niobbahnen besteht, womit Vortex Trapping verhindert werden soll. Die zwischen dem Washerloch für die Einkoppelspule und dem für die Rückkoppelspule liegenden Rechtecke sind Öffnungen in den Isolationsschichten für optionale Washer-Shunt-Widerstände, die allerdings in den hier betrachteten SQUIDs nicht prozessiert wurden. Da die SQUID-Induktivität L_S deutlich höher als bei dem aktuellen Design ist, muss der kritische Strom neu eingestellt werden. Nach Gleichung (2.13) lässt sich der kritische Strom I_C für $\beta_L = 1$ auf $I_C = \frac{\Phi_0}{2L_S} = 12,1 \mu\text{A}$ bestimmen. Unter Berücksichtigung einer gewissen Toleranz wurde ein kritischer Strom von $I_C \approx 8 \mu\text{A}$ gewählt, was mit der erwarteten kritischen Stromdichte eines Josephson-Kontakts von $j_c = 0,5 \frac{\mu\text{A}}{\mu\text{m}^2}$ eine Fläche von $4 \times 4 \mu\text{m}^2$ ergibt.

4.2 Charakterisierung des entwickelten dc-SQUID-Designs und Vergleich mit Simulationswerten

Auf der Grundlage des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten dc-SQUID-Design wurde im institutseigenen Reinraum von der Arbeitsgruppe eine Reihe von SQUIDs hergestellt. Genauere Informationen über das hierfür verwendete Mikroprozessierungsverfahren sind in [Kem13, Weg13, Fer15] zu finden. Es sind jeweils vier SQUIDs gemeinsam auf einem $3\text{ mm} \times 3\text{ mm}$ großen Chip positioniert, wobei die SQUIDs unabhängig voneinander sind und einzeln gemessen werden können. Zur Charakterisierung wurden die SQUID-Chips auf eine Leiterplatte aufgeklebt und mit Al-Bonddrähten elektrisch kontaktiert. Die SQUIDs wurden dann in ein Transportgefäß für flüssiges Helium eingetaucht und so auf eine Temperatur von $4,2\text{ K}$ abgekühlt. Zum Betrieb der einzelnen SQUIDs sowie zu deren Auslesung wurde eine breitbandige SQUID-Elektronik XXF-1 der Firma Magnicon-GmbH verwendet. Externe Magnetfelder wurden durch ein weichmagnetisches Kryoperm- und ein supraleitendes Niob-Schild abgeschirmt beziehungsweise konstant gehalten. Im Zuge der Charakterisierung der einzelnen SQUIDs wurde die I - V - und Φ - V -Kennlinien mit einem Speicheroszilloskop aufgezeichnet. Um die Kopplung zwischen dem SQUID und Einkoppelpule beziehungsweise Rückkoppelpule zu bestimmen, wurde die Periodizität der Φ - V -Kennlinie gegenüber dem Strom in der jeweiligen Spule gemessen. Außerdem lässt sich nach [Dru96, Vos81] der kritische Strom I_C mit Hilfe der Beziehung

$$I_C \approx \frac{I_{\max}}{2} + \frac{k_B T}{\Phi_0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{I_{\max}}{k_B T / \Phi_0}} \right) \quad (4.1)$$

aus dem Betriebsstrom I_{\max} , bei dem der Hub der Φ - V -Kennlinie maximal ist, bestimmen. Es wurden insgesamt sechs SQUIDs von zwei verschiedenen Wafern vermessen, die mit leicht unterschiedlichen Prozessparametern hergestellt wurden. So wurde bei Wafer 1 eine im Vergleich zu Wafer 2 geringfügig höhere kritische Stromdichte gewählt. Für Wafer 1 ergibt sich im Mittel $\bar{I}_{\max}^1 = 5,47\ \mu\text{A}$ und für Wafer 2 $\bar{I}_{\max}^2 = 3,81\ \mu\text{A}$. Mit Gleichung (4.1) können die kritischen Ströme der SQUIDs auf den Wafern zu $\bar{I}_C^1 = 3,16\ \mu\text{A}$ und $\bar{I}_C^2 = 2,26\ \mu\text{A}$ berechnet werden. Bei der Entwicklung wurden die Josephson-Kontakte auf einen kritischen Strom von $I_C \approx 8\ \mu\text{A}$ ausgelegt, wodurch mit Gleichung (2.13) sichergestellt ist, dass die SQUID kein hysteretisches Verhalten aufweisen. In der I - V -Kennlinie der SQUIDs (vergleiche Abbildung 4.3) ist ebenfalls keine Hysterese erkennbar.

Die Struktur des SQUIDs ist auf den Wafern 1 und 2 identisch, weshalb die Induktivitäten und die Gegeninduktivitäten vergleichbar sind. Das Mittel der SQUID-Einkoppelpulen-Kopplungen ergibt $\langle \frac{1}{M_{S,i}} \rangle = 11,27\ \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und weicht damit weniger als 1% von dem Simulationswert ab. Damit ist die Kopplung zwischen SQUID und Einkoppelpule sogar 12% stärker als bei dem aktuellen dc-SQUID-Design, das in

Tab. 4.2: Messwerte verschiedener dc-SQUIDs, die auf dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten SQUID-Design basieren.

SQUID	I_{\max} [μA]	$\frac{1}{M_{S,i}}$ [$\mu\text{A}\Phi_0^{-1}$]	$\frac{1}{M_{i,fb}}$ [$\mu\text{A}\Phi_0^{-1}$]
HDSQ3-w1-1A10-SQ1	4,99	11,11	114,40
HDSQ3-w1-2A10-SQ1	5,80	11,23	118,93
HDSQ3-w1-2A10-SQ3	5,30	11,23	119,75
HDSQ3-w1-2A10-SQ4	5,80	11,25	120,60
HDSQ3-w2-4A10-SQ1	3,80		119,84
HDSQ3-w2-4A17-SQ1	3,81	11,51	123,38

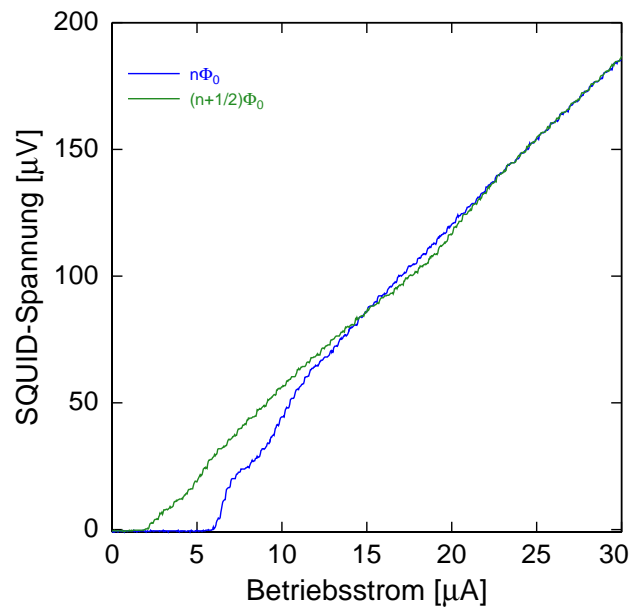


Abb. 4.3: I - V -Kennlinie des SQUIDs HDSQ3-w1-2A10-SQ1 bei einem magnetischen Fluss von $n\Phi_0$ und $(n + \frac{1}{2})\Phi_0$.

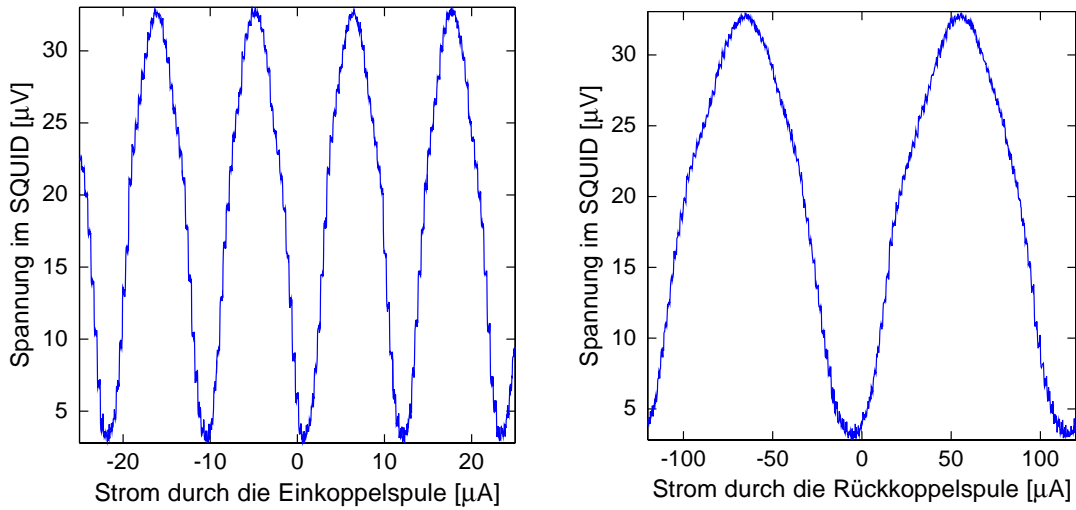


Abb. 4.4: Φ - V -Kennlinie des SQUIDs HDSQ3-w1-2A10-SQ1. Im Fall (links) wurde der magnetische Fluss im SQUID durch einen Strom durch die Einkoppelspule und im Fall (rechts) durch einen Strom durch die Rückkoppelspule erzeugt.

Kapitel 3.3 besprochen wurde. Für die SQUID-Rückkoppelspulen-Kopplung erhält man im Mittel $\langle \frac{1}{M_{S,fb}} \rangle = 119,48 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$, was 6% von den Simulationswerten abweicht. In Abbildung 4.4 sind die Φ - V -Kennlinien für die Einkoppel- und die Rückkoppelspule des SQUIDs HDSQ3-w1-2A10-SQ1 zu sehen. Anhand der unterschiedlichen Periodizität lassen sich gut die verschiedenen Werte der Kopplungen sehen.

Mit einem Spektrum-Analyzer wurde das Rauschen von SQUID HDSQ3-w1-2A10-SQ1 in dem Frequenzbereich von 10^{-1} bis 10^5 Hz gemessen. Das entsprechende Rauschspektrum ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Von 150 Hz bis zur Abschneidefrequenz der SQUID-Elektronik die durch den Abfall des Rauschspektrums bei hohen Frequenzen vorgegeben wird, ist das gemessene Rauschspektrum weiß und zeigt einen Wert von $\sqrt{S_{\Phi,w}} = 4,21 \mu\Phi_0/\sqrt{\text{Hz}}$. Das weiße Rauschen setzt sich hierbei aus zwei Anteilen zusammen. So trägt das thermische Rauschen der Shunt-Widerstände bei, der dominante Beitrag ist jedoch durch das Eingangsspannungsrauschen der SQUID-Elektronik gegeben. Dieses beträgt $\sqrt{S_V} = 0,33 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, das sich mit dem gemessenen Fluss-zu-Spannungs-Transferkoeffizienten $V_\Phi = 93,44 \mu\text{V}/\Phi_0$ in ein weißes Flussrauschen von $\sqrt{S_\Phi} = 3,53 \mu\Phi_0/\sqrt{\text{Hz}}$ übersetzt. Das weiße Rauschen der Shunt-Widerstände des SQUIDs entspricht der quadratischen Differenz des Stromrauschens $\sqrt{S_V}$ und des gemessenen Rauschwerts $\sqrt{S_{\Phi,w}}$ und liegt damit bei $\sqrt{S_{\Phi,s}} = 2,29 \mu\Phi_0/\sqrt{\text{Hz}}$. Für Frequenzen unter 150 Hz lässt sich im Rauschspektrum ein zusätzlicher frequenzabhängiger Rauschbeitrag beobachten. Die Frequenzabhängigkeit dieses Betrags ist durch $\frac{1}{f^\alpha}$ mit $\alpha = 0,821$ gegeben. Die Amplitude $\sqrt{S_{\Phi_{1/f}}}(1 \text{ Hz})$ nimmt einen Wert von $12,72 \mu\Phi_0/\sqrt{\text{Hz}}$ an. Sowohl der beobachtete Rauschexponent α als auch die gemessene Rauschamplitude $\sqrt{S_{\Phi_{1/f}}}(1 \text{ Hz})$ weichen hierbei von den Werten ab, die

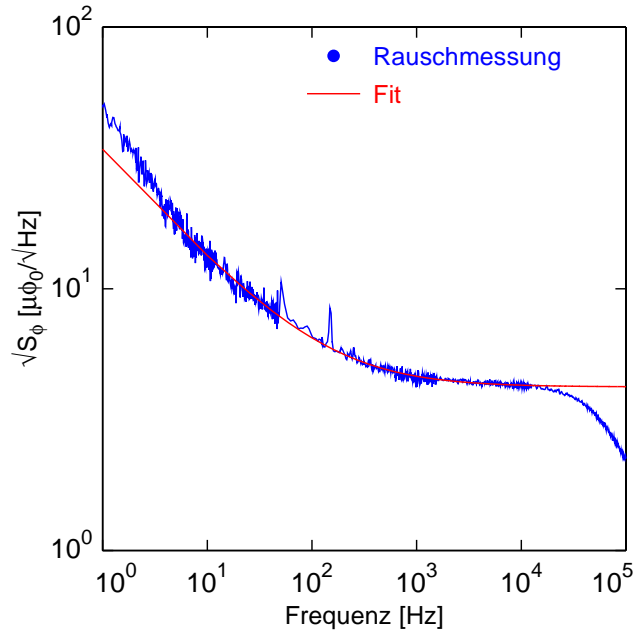


Abb. 4.5: Gemessenes Rauschspektrum von SQUID HDSQ3-w1-2A10-SQ1

in der Vergangenheit an anderen SQUIDs aus der Arbeitsgruppe gemessen wurden [Kem15]. Der Grund hierfür ist nicht bekannt und wird aktuell experimentell untersucht.

Die Induktivität der Einkoppelspule L_i wurde mit einem zweistufigen SQUID-Aufbau aus einem SQUID, dessen Einkoppelspule mit einem Al-Bonddraht kurzgeschlossen ist, und einem SQUID-Array, das als rauscharmer Vorverstärker bei tiefen Temperaturen fungiert, bestimmt. Aluminium hat eine kritische Temperatur von 1,2 K [Buc04] und ist damit bei einer Temperatur von 4,2 K in flüssigem Helium normalleitend. Der Bonddraht erzeugt ein von seinem Widerstand R und der Temperatur T abhängiges Stromrauschen im Einkoppelkreis, das sich nach dem Johnson-Nyquist-Theorem [Joh28, Nyq28] mit Hilfe der Formel

$$S_I(f) = \frac{4k_B T}{R} \quad (4.2)$$

beschreiben lässt. Aus diesem Grund ist das gemessene Rauschspektrum dieses Aufbaus eine Überlagerung aus dem Stromrauschen des Bonddrahts und dem Rauschen des zweistufigen Aufbaus. Bonddraht und Einkoppelspule bilden einen RL -Tiefpass, der dazu führt, dass das Stromrauschen des Al-Bonddrahtes mit der zugehörigen Filtercharakteristik abgeschnitten wird. Man erwartet deshalb für das gemessene Rauschspektrum einen Verlauf

$$S_\Phi(f) = M_{S,i}^2 \left(\frac{4k_B T}{R} \right) \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi f L}{R} \right)^2} \right) + S_{\Phi,SQ} \quad (4.3)$$

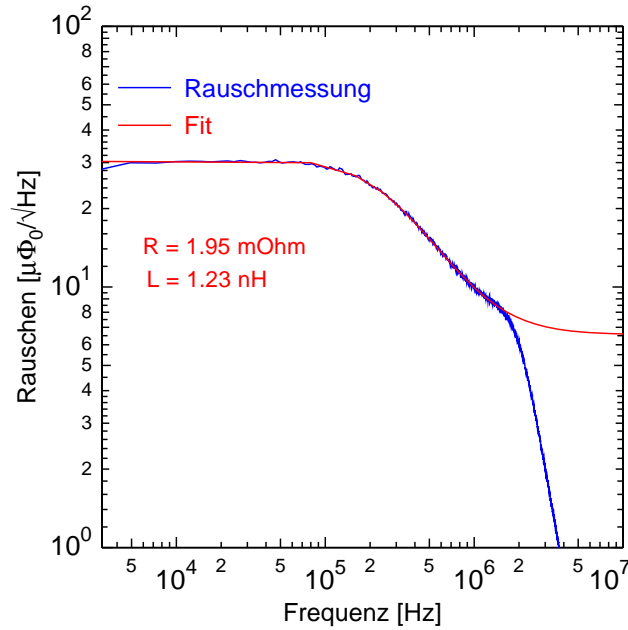


Abb. 4.6: Gemessenes Rauschspektrum des zweistufigen Aufbaus zur Bestimmung der Einkoppelspuleninduktivität L_i des SQUIDs HDSQ3-w1-2A10-SQ1. Als rauscharmer Vorverstärker wurde das ebenfalls von der Arbeitsgruppe hergestellte SQUID-Array HDSQ3-w2-3A19-Array1 verwendet.

bei dem der erste Term das Rauschen des Bonddrahtes und der zweite Term das Rauschen des SQUID-Aufbaus beschreibt. Durch numerische Anpassung von Gleichung (4.3) an das gemessene Rauschspektrum können die verschiedenen, auftretenden Größen bestimmt werden. Die Gesamtinduktivität L setzt sich dabei aus der Einkoppelspuleninduktivität L_i und der Bonddrahtinduktivität L_b zusammen. Für die Induktivität L_b des Bonddraht wird ein Wert von $L_b = 0,25$ nH angenommen, was sich in der Vergangenheit in anderen Messungen als realistisch herausgestellt hat. Damit ergibt sich eine Einkoppelspuleninduktivität von $L_i = 0,98$ nH. Die geplante Induktivität von 1 nH konnte somit exakt erreicht werden und die Simulation weicht mit einem Wert von $L_{i,\text{sim}} = 1,14$ nH nur geringfügig von diesem Messwert ab.

Um die parasitäre Kopplung zwischen der Einkoppel- und der Rückkoppelspule zu bestimmen, wird der gleiche Messaufbau wie in Kapitel 3.3.1 genutzt. Wie dort beschrieben, lässt sich die Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelspule bestimmen, indem die Einkoppelspule mit einem supraleitenden Niob-Bonddraht kurzgeschlossen wird, sodass eine supraleitende Schleife entsteht. Es wird dann jeweils die Kopplung zwischen SQUID und Rückkoppelspule für die Fälle mit und ohne supraleitendem Kurzschluss gemessen. Insgesamt wurden vier Messungen durchgeführt, jeweils zwei an HDSQ3-w1-2A10-SQ3 und an HDSQ3-w1-2A10-SQ4. Für SQ3 er-

geben sich die Kopplungen $\frac{1}{M_{S,fb,1}^{\text{geschl}}} = 109,4 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und $\frac{1}{M_{S,fb,2}^{\text{geschl}}} = 109,6 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$, was im Mittel $\langle \frac{1}{M_{S,fb}^{\text{geschl}}} \rangle = 109,5 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ ergibt. Die Kopplungen $\frac{1}{M_{S,fb}} = 119,75 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und $\frac{1}{M_{S,i}} = 11,23 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ sind bekannt. Mit der Gesamtinduktivität $L = 1,23 \text{ nH}$ ergibt sich aus Gleichung (3.9) eine parasitäre Kopplung von $-191,0 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$. Das negative Vorzeichen bezeichnet eine negative Gegenkopplung und bedeutet, dass sich die Flüsse der Spulen aufgrund von Windungssinn und Stromrichtung in den Spulen nicht addieren, sondern subtrahieren. Tatsächlich wurde auch von InductEx eine negative Kopplung vorausgesagt, in den Ergebnistabellen wurden allerdings, da nicht auf die Kopplungsrichtung optimiert werden sollte, immer der Betrag der Simulationsergebnisse aufgetragen. Für die parasitäre Kopplung wurde von InductEx ein Wert von $-194,2 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ berechnet, was unter 2% von dem Messwert für SQ3 abweicht. Analog zu SQ3 wurde für SQ4 ebenfalls die Kopplung $\frac{1}{M_{S,fb,1}^{\text{geschl}}} = 111,0 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und $\frac{1}{M_{S,fb,2}^{\text{geschl}}} = 111,2 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ bestimmt, was ein Mittel von $\langle \frac{1}{M_{S,fb}^{\text{geschl}}} \rangle = 111,1 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ ergibt. Für die Kopplung $\frac{1}{M_{S,fb}}$ wurde ein Wert von $120,60 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ und für $\frac{1}{M_{S,i}}$ wurde $11,25 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ gemessen. Damit folgt aus Gleichung (3.9) und der Gesamtinduktivität $L = 1,23 \text{ nH}$ eine parasitäre Kopplung von $-211,4 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$, womit der Simulationsergebniswert 8% von der Messung abweicht. Die parasitäre Kopplung ist mit etwa $200 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ um eine Größenordnung schwächer als die parasitäre Kopplung des aktuellen dc-SQUID-Designs, die in Kapitel 3.3.1 bestimmt wurde. Damit konnte das wichtigste Designziel bei der Entwicklung dieser neuen dc-SQUID-Designs erfüllt werden.

5. Zusammenfassung

Supraleitende Quanteninterferenzdetektoren (SQUIDs) sind aktuell die präzisesten Messgeräte mit zugleich hoher Bandbreite für magnetische Flussänderungen. Sie finden daher vielfach Anwendung und werden beispielsweise zur Auslesung von magnetischen Kalorimetern oder anderen Tieftemperaturteilchendetektoren verwendet. Die Leistungsfähigkeit eines SQUIDs ist dabei empfindlich von der Eigeninduktivität des SQUIDs sowie den Induktivitäten potentieller weiterer Spulen, wie etwa einer Einkoppelspule im Fall eines Stromsensor-SQUIDs, und den damit verbundenen Gegeninduktivitäten abhängig. Da die Geometrie von SQUIDs zu komplex für eine analytische Berechnung der Induktivitäten und Gegeninduktivitäten ist, muss in der Regel auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden. In der vorliegenden Arbeit wurde hierfür das Simulationsprogramm InductEx verwendet, da es einerseits intrinsisch geeignet ist, um supraleitende Spulen zu simulieren und es sich andererseits, als Quasi-Standard für die Simulation von supraleitenden Digital Schaltkreisen, die ebenfalls aus Josephson-Kontakten bestehen, etabliert hat. Um zunächst zu verifizieren, dass InductEx auch zur Simulation komplexer SQUID-Strukturen geeignet ist, wurden bereits in der Arbeitsgruppe etablierte SQUIDs simuliert und die Simulationsergebnisse mit Messungen verglichen. Zusätzlich wurde mit der Hilfe von InductEx ein neues dc-SQUID-Design entwickelt, das eine besonders niedrige Kopplung zwischen der Einkoppel- und der Rückkoppelspule und eine Einkoppelspuleninduktivität von $L_1 = 1 \text{ nH}$ besitzt. Dieses SQUID soll zukünftig zur Auslesung von hochauflösenden Röntgendetektoren, die auf magnetischen Kalorimetern basieren, sowie für die Rauschthermometrie bei tiefen Temperaturen verwendet werden.

Zunächst wurden mit InductEx einfache, rechteckige Washer simuliert, um die Ergebnisse mit den veröffentlichten Werten von Jaycox und Ketchen [Jay81] zu vergleichen. Hierbei konnte unter anderem der in [Jay81] gefundene Zusammenhang zwischen der Induktivität des Washers sowie dessen Innendurchmesser reproduziert werden. Dadurch wurde sichergestellt, dass die Simulationsergebnisse von InductEx vergleichbar mit anderen numerischen Verfahren sind und die richtigen Simulationsparameter gefunden wurden. Im nächsten Schritt wurden bekannte rf-SQUIDs, die in der Arbeitsgruppe als Teil eines Mikrowellen-SQUID-Multiplexers verwendet werden, simuliert und die Simulationsergebnisse mit Messwerten verglichen. Hierbei wurde ebenfalls festgestellt, dass mit Hilfe von InductEx die Induktivitäten und Gegeninduktivitäten komplexer Geometrien präzise berechnet werden können. Auf äquivalente Art und Weise wurde InductEx zur Simulation der auftretenden Induktivitäten und Gegeninduktivitäten bei dc-SQUIDs verwendet, die in der Arbeitsgruppe

pe in der Vergangenheit unter Zuhilfenahme empirischer Induktivitäten entwickelt wurden. Hier zeigt sich, dass die empirisch bestimmten Werte von den Simulationen abweichen, letztere sich aber wiederum sehr gut mit den Messwerten decken. Bei der Betrachtung der SQUID-Resonator-Kopplung wurde allerdings beobachtet, dass schon geringe Änderungen oder Vereinfachungen des Designs zu sehr großen Abweichungen, in diesem Fall bis zu 30%, führen.

Für das im Rahmen dieser Arbeit neu zu entwickelnde dc-SQUID wurden mehrere Designziele verfolgt. Die parasitäre Kopplung zwischen Einkoppel- und Rückkoppelpule sollte, wie oben bereits erwähnt, reduziert werden. Die Einkoppelpuleninduktivität sollte zudem auf einen Wert von $L_i = 1 \text{ nH}$ optimiert und die Kopplung zwischen SQUID und Einkoppelpule so weit wie möglich maximiert werden. Für das neue dc-SQUID-Design wurden die Designideen des aktuellen Designs übernommen und um die oben genannten Anforderungen erweitert. Daher führt das neue Design die Kleeblatt-Struktur des aktuellen Designs fort, wobei jedoch Washer mit zwei Löchern genutzt wurden. Dadurch können die Einkoppel- und Rückkoppelpule räumlich voneinander getrennt werden, wodurch ihre Kopplung auf $\frac{1}{M_{i,fb}} = 194,3 \mu\text{A}\Phi_0^{-1}$ reduziert werden sollte. Die Einkoppelpuleninduktivität konnte auf $L_i = 1,14 \text{ nH}$ eingestellt werden, was sehr nahe am beabsichtigten Wert liegt. Auf Grundlage des entwickelten Designs wurden von der Arbeitsgruppe dann einige SQUIDs hergestellt, welche dann wiederum im Rahmen dieser Arbeit charakterisiert wurden. Es wurde hierbei festgestellt, dass sich die Simulationsparameter sehr gut mit den Messwerten decken.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte somit gezeigt werden, dass sich InductEx in den meisten Fällen zur Simulation komplexer SQUID-Strukturen eignet. Diese Tatsache wird es zukünftig ermöglichen, SQUIDs zu entwickeln, die an spezielle Anwendungen angepasst sind ohne hierfür empirisch gewonnene Erfahrungswerte zur Berechnung der Induktivitäten und Gegeninduktivitäten verwenden zu müssen. Vielmehr können die wichtigen Parameter quasi a-priori vorhergesagt werden. Dies wird es ermöglichen, z.B. speziell für magnetische Kalorimeter optimierte SQUIDs zu entwickeln, mit denen zukünftig mit hoher Wahrscheinlichkeit sogar die magische Schranke von 1 eV Energieauflösung unterschritten werden kann.

Literaturverzeichnis

- [Bar57] J. Bardeen, L. N. Cooper und J. R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.*, **108**(5), 1175–1204, 1957.
- [Buc04] W. Buckel und R. Kleiner, *Superconductivity, Fundamentals and Applications*, Wiley-VCH, Weinheim, 2004.
- [Cla04] J. Clarke und A. I. Braginski (Ed.), *The SQUID Handbook: Vol. I Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*, Wiley-VCH, 2004.
- [Dea61] B. S. Deaver und W. M. Fairbank, Experimental Evidence for Quantized Flux in Superconducting Cylinders, *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 43–46, 1961.
- [Dol61] R. Doll und M. Näbauer, Experimental Proof of Magnetic Flux Quantization in a Superconducting Ring, *Phys. Rev. Lett.*, **7**, 51–52, 1961.
- [Dru96] D. Drung, F. Ludwig, W. Müller, U. Steinhoff, L. Trahms, H. Koch, Y. Q. Shen, M. B. Jensen, P. Vase, T. Holst, T. Freltoft und G. Curio, Integrated $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ magnetometer for biomagnetic measurements, *Appl. Phys. Lett.*, **68**, 1421–1423, 1996.
- [Ens05a] C. Enss (Ed.), *Cryogenic Particle Detection*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [Ens05b] C. Enss und S. Hunklinger, *Low-temperature physics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [Fer15] Anna Ferring, *Entwicklung von dc-SQUIDs zur Auslesung von metallischen magnetischen Kalorimetern*, Diplomarbeit, Kirchhoff-Institut für Physik, 2015.
- [Fle98] Andreas Fleischmann, *Hochauflösendes magnetisches Kalorimeter zu Detektion von einzelnen Röntgenquanten*, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik, 1998.
- [Fle05] A. Fleischmann, C. Enss und G. M. Seidel, *Cryogenic Particle Detection*, volume 99 of *Topics in applied physics*, chapter Metallic Magnetic Calorimeters, 151–216, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

- [Foe12] Nadine Foerster, *Entwicklung eines kalorimetrischen Tieftemperatur-Detektors mit supraleitendem Temperatursensor für die hochauflösende Röntgenspektroskopie*, Diplomarbeit, Kirchhoff-Institut für Physik, 2012.
- [Fou16] Coenrad J. Fourie, *InductEx User Manual Version 5.03*, Stellenbosch University, 2016.
- [Gre88] L. Greengard, *The Rapid Evaluation of Potential Fields in Particle Systems*, MA: M.I.T. Press, Cambridge, 1988.
- [Gro14] Rudolf Gross und Achim Marx, *Festkörperphysik*, Oldenbourg, München, 2. überarbeitete und erweiterte auflage edition, 2014.
- [Hun09] Siegfried Hunklinger, *Festkörperphysik*, Oldenbourg-Verl., München, 2., verb. aufl. edition, 2009.
- [Irw05] K. D. Irwin und G. C. Hilton, *Cryogenic Particle Detection*, volume 99 of *Topics in applied physics*, chapter Transition Edge Sensors, 63–149, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [Jay81] J. M. Jaycox und M. B. Ketchen, Planar coupling scheme for ultra low noise DC SQUIDS, *IEEE T. Magn.*, **17**, 400–403, 1981.
- [Joh28] J. B. Johnson, Thermal Agitation of Electricity in Conductors, *Phys. Rev.*, **32**(1), 97–109, 1928.
- [Jos62] B. D. Josephson, Possible new effects in superconductive tunneling, *Phys. Lett.*, **1**(7), 251–253, 1962.
- [Kam94] Mattan Kamon, Michael J. Tsuk und Jacob K. White, FASTHENRY: A Multipole-Accelerated 3-D Inductance Extraction Program, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **42**(9), 1750–1758, 1994.
- [Kem12] S. Kempf, *Entwicklung eines Mikrowellen-SQUID-Multiplexers auf der Grundlage nicht-hysteretischer rf-SQUIDS zur Auslesung metallischer magnetischer Kalorimeter*, Dissertation, Kirchhoff-Institut für Physik, Universität Heidelberg, 2012.
- [Kem13] S. Kempf, A. Ferring, A. Fleischmann, L. Gastaldo und C. Enss, Characterization of the reliability and uniformity of an anodization-free fabrication process for high-quality Nb/Al–AlO_x/Nb Josephson junctions, *Supercond. Sci. Tech.*, **26**, 065012, 2013.
- [Kem15] S. Kempf, A. Ferring, A. Fleischmann und C. Enss, Direct-current superconducting quantum interference devices for the readout of metallic magnetic calorimeters, *Supercond. Sci. Tech.*, **28**(4), 045008, 2015.

- [Lon50] F. London, *Superfluids*, Structure of matter series, Wiley, New York, 1950.
- [McC68] D. E. McCumber, Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions, *J. Appl. Phys.*, **39**(7), 3113–3118, 1968.
- [Nyq28] H. Nyquist, Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors, *Phys. Rev.*, **32**(1), 110–113, 1928.
- [Rot13] Daniel Simon Rothfuß, *Thermische Eigenschaften von supraleitenden massiven metallischen Gläsern bei ultratiefen Temperaturen*, Dissertation, Kirchhoff-Institut für Physik, Universität Heidelberg, 2013.
- [Saa86] Y. Saad und M. H. Schulta, GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Scientific Statistical Computing*, **7**, 856–869, 1986.
- [Sta04] Gheorghe Stan, Stuart B. Field und John M. Martinis, Critical field for complete vortex expulsion from narrow superconducting strips, *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 097003, 2004.
- [Ste68] W. C. Stewart, Current-Voltage Characteristics of Josephson Junctions, *Appl. Phys. Lett.*, **12**(8), 277–280, 1968.
- [Tes77] C. Tesche und J. Clarke, dc SQUID: Noise and Optimization, *J. Low Temp. Phys.*, **29**, 301–331, 1977.
- [Vos81] R. F. Voss, Noise characteristics of an ideal shunted Josephson junction, *J. Low Temp. Phys.*, **42**(1-2), 151–163, 1981.
- [Weg13] Mathias Wegner, *Entwicklung eines 64-Pixel-Detektor-Arrays basierend auf mikrostrukturierten metallischen magnetischen Kalorimetern mit integrierem Mikrowellen-SQUID-Multiplexer*, Diplomarbeit, Kirchhoff-Institut für Physik, 2013.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 16.12.2016

.....

(Felix Herrmann)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich beim Schreiben dieser Arbeit unterstützt haben. Besonders bedanken möchte ich mich bei:

Herrn PROF. CHRISTIAN ENSS

Für die Möglichkeit die Bachelorarbeit in seiner Arbeitsgruppe durchzuführen und den tiefgehenden Einblick in die Welt der Tieftemperaturdetektoren.

DR. SEBASTIAN KEMPF

Für umfassende Betreuung, Rat und viele Verbesserungsvorschläge.

MATHIAS WEGNER

Für Hilfe beim Umgang mit Cadance und Erklärungen zur Funktionsweise von rf-SQUIDs in Mikrowellen-SQUID-Multiplexern.

ANNA FERRING

Für die Beantwortung aller Fragen die ich zu Josephson-Kontakten und dc-SQUIDs hatte.

DANIEL RICHTER

Für die Unterstützung und Rat im Labor und bei der Auswertung.

Außerdem möchte ich Matthäus Krantz, Albert Hertel, David Uhrig und Michael Keller für zahlreiche kleine, informative Gespräche danken.

Mein besondere Dank gilt dem Reinraumteam, das das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte SQUID-Design schnell und zuverlässig hergestellt hat.

Abschließend möchte ich meinen Freunden und meiner Familie danken für die Hilfe und Unterstützung ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.