Staatsexamensarbeit

Bau und Test eines chaotischen Pendels mit Wirbelstrombremse

Michael Oehmig

Mai 2000

Inhalt

Bau und Test eines chaotischen Pendels mit Wirbelstrombremse-

Im Rahmen dieser Staatsexamensarbeit wurde ein Demonstrationsobjekt entwickelt und gebaut, an dem mehrere Schwingungszustände verdeutlicht werden können. Ein auf einer Achse gelagerter Pendelkörper kann mit Hilfe eines Schrittmotors zu Schwingungen angeregt werden. Das Drehmoment des Motors wird über eine Spiralfeder indirekt auf das Pendel übertragen. Eine solche Konstruktion ist dazu nötig, daß sich Motor und Pendel auch entgegengesetzt bewegen können. Die Ansteuerung des Motors erfolgt über einen Computer, der parallel dazu auch noch einen Drehgeber ausliest. Die Informationen des Drehgebers bestimmen die Pendelposition mit einer Auflösung von 13 Bit. Diese Information kann nun im Computer so umgesetzt werden, daß verschiedene Schwingungsformen entstehen. Es kann zum Beispiel eine gedämpfte Schwingung dadurch simuliert werden, daß der Motor immer der Pendelposition folgt. Die Anregung kann auch so gestaltet werden, daß die Anzahl der Motorschritte genau die Reibungsverluste kompensieren. So kann das Pendel zu einer theoretisch endlosen Schwingung mit konstanter Amplitude angeregt werden. Weitaus interessanter ist der Fall, bei dem die Amplitude so groß gewählt wird, daß sich das Pendel überschlägt. Durch leichte Veränderungen an den Werten der Amplitude oder Frequenz der äußeren Anregung und der Reibung des Systems, kann das Verhalten des Pendels in einen chaotischen Zustand gebracht werden. Der geschwindigkeitsabhängige Reibungsterm kann an der Wirbelstrombremse eingestellt werden.

Dieses Dokument wurde mit dem Textsatzsystem LaTeX gesetzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der Physik wird seit jeher versucht, die Objekte der Natur zu beobachten und ihre Eigenschaften, Zustände und Zustandsänderungen zu beschreiben. Doch in manchen Systemen ist es nicht möglich, eine exakte Gesetzmäßigkeit zu formulieren. Solche Phänomene, über deren zeitliche Entwicklung keine Aussage getroffen werden kann, werden als chaotisch bezeichnet. Erscheinungen dieser Art treten in mechanischen Oszillatoren wie Pendel oder vibrierenden Objekten auf, in rotierenden oder erhitzten Flüssigkeiten, in der Laserphysik oder bei manchen chemischen Reaktionen [1]. Der Aufbau, an dem ein solches Verhalten beobachtet, demonstriert und interpretiert werden kann, muß einige Anforderungen erfüllen. Die Anordung des Systems sollte übersichtlich und so gestaltet sein, daß die physikalischen Hintergründe schnell erkannt und verstanden werden können. Es sollte weiterhin möglich sein, daß sowohl das erwünschte chaotische, als auch ein periodisches Verhalten gezeigt werden kann. Schließlich ist auch noch zu beachten, daß die geometrischen Dimensionen so gewählt werden, daß das Objekt zu Anschauungszwecken, zum Beispiel im Rahmen einer Vorlesung, eingesetzt und auch ohne größeren Aufwand transportiert werden kann.

Einen solchen Versuchsaufbau zu finden, mit dem der Unterschied zwischen einem chaotischen und einem periodischen Verhalten einsichtigt demonstriert werden kann, diesen zu dimensionieren und in Betrieb zu nehmen soll Ziel dieser Arbeit sein.

2 Theoretische Grundlagen

Der momentane Zustand eines klassisch-mechanischen Systems läßt sich mit Hilfe des Phasenraummodells eindeutig festlegen. Dort wird durch eine Zuordnung jedem Massenpunkt m ein Paar $(\vec{x}(t), \vec{p}(t))$ zugewiesen, welches über den momentanen Ort und Impuls Auskunft gibt. Auf diese Weise wird der reale mechanische Bewegungsablauf eines Massenpunktes zu einer Bewegung eines Bildpunktes im Phasenraum transformiert. Die so entstehende Kurve, die Phasenraum-Bahn, ist durch die Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt und mit den Funktionen $\vec{x}(t)$ und $\vec{p}(t)$ lassen sich Ort und Impuls zu jedem Zeitpunkt t bestimmen. Die Geometrie solcher Bahnen gibt Aufschluß über die Art der Dynamik des betrachteten Systems. Zum Verständnis soll ein einfaches Beispiel dienen.

2.1 Der eindimensionale harmonische Oszillator

Dieses einfache Modell besteht aus einem Massenpunkt m, dessen Bewegung nur in einer Dimension ablaufen kann. Die ausgezeichnete Richtung ist hier die x-Achse, in deren Ursprung sich die Ruhelage des Systems befinden soll. Wird m aus dieser Ruhelage ausgelenkt, wirkt auf ihn die Rückstellkraft F, die stets in Richtung des Ursprungs zeigt und deren Betrag zur Auslenkung von m aus der Ruhelage proportional ist. Mit diesem Proportionalitätsfaktor D, die Federhärte oder auch Richtkraft, ergibt sich für die Kraft $F = -Dx$ und für die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators :

$$m\ddot{x} = -Dx \tag{1}$$

Die Bewegung von m entspricht einer Schwingung um die Ruhelage. Die damit verbundene Eigenfrequenz ω_0 des harmonischen Oszillators ergibt sich aus dem Lösen der Bewegungsgleichung:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{2}$$

Sei zum Zeitpunkt $t = 0$ die Anfangslage des Massenpunktes durch x_0 und dessen Anfangsimpuls durch p_0 gegeben. Der Aufenthaltsort und der Impuls des Massenpunktes m können für jeden Zeitpunkt t durch die Funktionen:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \tag{3}$$

$$p(t) = p_0 \cos \omega_0 t - m x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \tag{4}$$

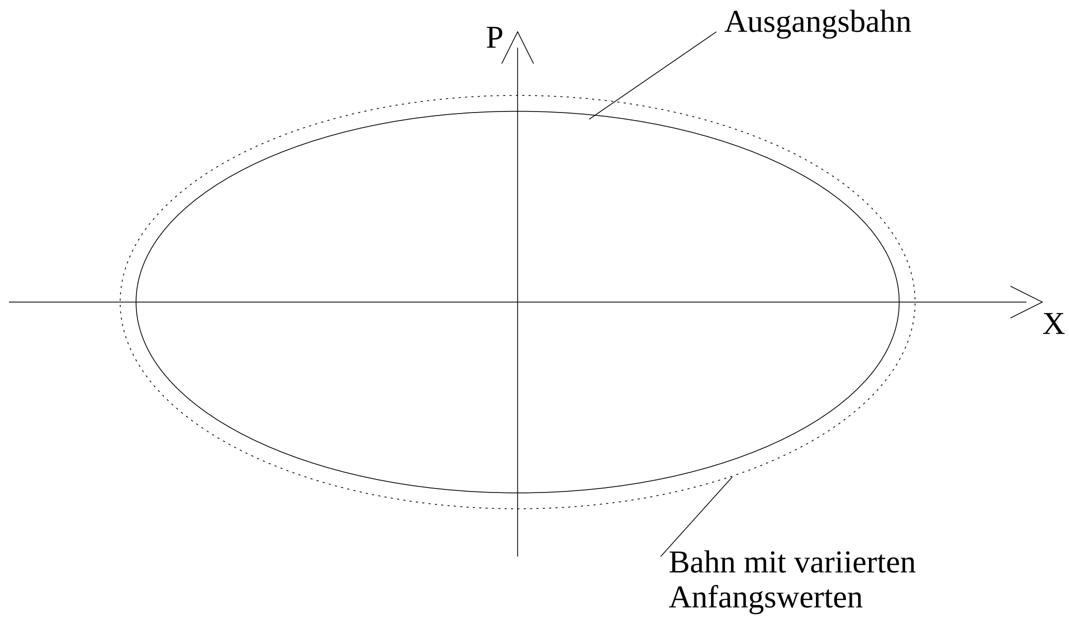

Abbildung 1: Phasenraum-Bahn des harmonischen Oszillators

berechnet werden, da durch die Anfangsbedingungen die Phasenraum-Bahnen schon festgelegt sind. Doch was passiert, wenn die Lage des Ausgangspunktes im Phasenraum leicht variiert wird? Im Falle infinitesimal kleiner Änderungen δx des Ortes oder δp des Impulses, ergibt sich für die Abweichung von den Ausgangsbahnen:

$$\delta x(t) = \cos(\omega_0 t)\delta x_0 + \frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t)\delta p_0 \tag{5}$$

$$\delta p(t) = \cos(\omega_0 t)\delta p_0 - m\omega_0 \sin(\omega_0 t)\delta x_0 \tag{6}$$

Eine Abschätzung dieser Abweichungen ergibt:

$$\mid \delta x(t) \mid \leq \mid \delta x_0 \mid + \mid \frac{\delta p_0}{m\omega_0} \mid \tag{7}$$

$$\mid \delta p(t) \mid \leq \mid \delta p_0 \mid + \mid \delta x_0 \omega_0 m \mid \tag{8}$$

Es ist zu erkennen, daß die Abweichungen von der ursprünglichen Bahn stets endlich und von der Zeit unabhängig sind. Hieraus läßt sich folgern, daß die zeitliche Entwicklung zweier Zustände des harmonischen Oszillators, die sich nur minimal voneinander unterscheiden, auf zwei benachbarten Bahnen im Phasenraum ablaufen. Dieser Sachverhalt wird in Abbildung 1 dargestellt. Dabei verdeutlicht die durchgezogene Linie die Bahn des harmonischen Oszillators mit den Startwerten x und p, und die unterbrochene Linie die Bahn des um δx und δp veränderten Anfangswertes.

2.2 Chaotische Systeme

Die für den harmonischen Oszillator gültige Aussage, daß zu benachbarten Anfangszuständen Phasenraum-Bahnen gehören, die einen sehr ähnlichen Verlauf aufweisen, ist nicht allgemeingültig. Vielmehr gibt es Systeme, bei denen

> '...kann es passieren, daß kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen sehr große in den Endergebnissen bewirken. Ein kleiner Fehler zu Beginn wird einen enormen Fehler am Ende verursachen. Eine Vorhersage wird unmöglich und man beobachtet zufällige Phänomene.'
> (H.Poincaré, 1913) [6].

Solche unvorhersehbaren zeitlichen Entwicklungen vieler nichtlinearer Systeme wurden 'Chaos' genannt. Die Chaostheorie ist als Studium solcher komplexer, nichtlinearer dynamischer Systeme definiert.
Ein leicht verständliches Beispiel für chaotisches Verhalten findet sich in der Ströhmungslehre für Flüssigkeiten. Ausgehend von dem Extremfall einer ruhenden Flüssigkeit, die sich in einem Rohr befindet, ist es trivial, daß die weitere zeitliche Entwicklung eines Teilchens bestimmt werden kann. Für niedrige Geschwindigkeiten der Flüssigkeit entsteht in dem Rohr eine laminare Strömung, deren Verlauf vorhergesagt werden kann. Im Bild des Phasenraummodells ist es hier so, daß bei kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen, Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit oder Ausgangslage des zu beobachtenden Teilchens, die benachbarten Anfangszustände auch benachbarte Phasenraum-Bahnen aufweisen. Übersteigt die Strömungsgeschwindigkeit jedoch einen kritischen Wert, führt dies dazu, daß sich in der Flüssigkeit Wirbel ausbilden. Aus der laminaren wird eine turbulente Strömung [3], bei der der Verlauf nicht mehr vorhergesagt werden kann.
Demnach kann ein chaotisches System nie, auch nicht einmal annähernd, sein vergangenes Verhalten wiederholen. Die Suche nach einer allgemeingültigen Formulierung, wann bei einem System chaotisches Verhalten beobachtet werden kann, hat zu den beiden folgenden notwendigen Bedingungen geführt:

1. das System hat mindestens 3 voneinander unabhängige dynamische Variablen

2. die Bewegungsgleichung enthält mindestens einen nichtlinearen Term, der die einzelnen Variablen miteinander verbindet [1]

Um chaotisches Verhalten zu untersuchen und zu demonstrieren, ist es sinnvoll, einen möglichst einfachen Aufbau, der diese Bedingungen erfüllt, zu finden.

2.3 Das physische Pendel

Ein Körper mit der Masse M und dem Trägheitsmoment Θ_S, bezüglich seines Schwerpunktes S, der um eine horizontale, nicht durch S gehende Achse A drehbar gelagert ist, heißt physisches Pendel. Sei $\mid \vec{r} \mid$ der Abstand zwischen A und S, so ist das Trägheitsmoment des Pendels bezüglich der Achse nach dem Satz von Steiner durch $\Theta = \Theta_S + M \mid \vec{r} \mid^2$ gegeben. Wird der Körper um den Winkel ϑ aus der Ruhelage herausbewegt, so greift in S infolge der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ die Kraft $\vec{F_S} = m\vec{g}$ an. Das hieraus entstehende Drehmoment läßt sich mit:

$$\vec{T}_{gew} = \vec{r} \times \vec{F}_S \qquad \Rightarrow \qquad \mid \vec{T}_{gew} \mid = M\, \vec{g} \cdot \vec{r}\, sin(\vartheta) \tag{9}$$

bestimmen. Wird der Körper losgelassen, so bewirkt $\vec{T}_{gew}$, daß das Pendel eine beschleunigte Drehbewegung um A ausführt. Die Winkelbeschleunigung $\ddot{\vartheta} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ ist gegeben durch $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{|\vec{T}_{gew}|}{\Theta}$. Im Idealfall, also mit den Annahmen, daß zum einen keinerlei Reibungskräfte wirken, und zum andern die Auslenkungen $\mid \vartheta \mid \ll \frac{\pi}{2}$ sind, wird der Körper periodisch, mit konstanter Amplitude von einem Umkehrpunkt zu dem anderen schwingen. Seine Phasenraum-Bahn wird wie die des harmonischen Oszillators in einer Dimension aussehen. Die Eigenfrequenz der Schwingung ist gegeben durch:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M\vec{g} \cdot \vec{r}}{\Theta}} \tag{10}$$

Hierbei wurde die für kleine Auslenkungen $\mid \vartheta \mid \ll \frac{\pi}{2}$ übliche Näherung $\sin\vartheta \approx \vartheta$ benutzt. Der Drehimpuls $\vec{L}$ des Pendels ist das Produkt $\Theta \cdot \vec{\omega}$ von Trägheitsmoment mit Winkelgeschwindigkeit. Mit Hilfe des Drehimpulssatzes: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}$ und der Substitution $\mid \vec{\omega} \mid = \frac{d\vartheta}{dt}$, läßt sich die Bewegungsgleichung wie folgt bestimmen:

$$\Theta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -M\vec{g} \cdot \vec{r} \sin\vartheta \tag{11}$$

Diese Bewegungsgleichung ist auch dann noch gültig, wenn die Schwingung des physischen Pendels eine Amplitude $\mid \vartheta \mid > \frac{\pi}{2}$ besitzt. Da die Näherung $\sin\vartheta \approx \vartheta$ jetzt nicht mehr gültig ist, ändert sich in diesem Fall die Eigenfrequenz des Pendels zu:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M\vec{g} \cdot \vec{r}}{\Theta}}\ [1 + (\frac{1}{2})^2 \sin^2(\frac{\vartheta}{2}) + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 \sin^4(\frac{\vartheta}{2}) + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 \sin^6(\frac{\vartheta}{2}) + ...]^{-1} \tag{12}$$

Wird die Reibung des Systems nicht vernachlässigt, so führt dies dazu, daß der Körper, nach einer bestimmten Zeit, wieder in seiner Ruhelage verharrt, da durch die

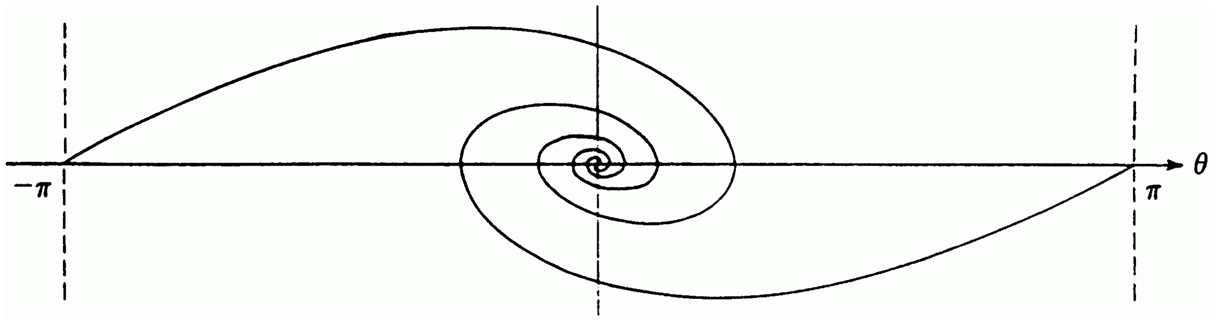

Abbildung 2: Phasenraum-Bahn des gedämpften Pendels

Reibungskraft ein Drehmoment wirkt, welches zur Geschwindigkeit proportional und zu dieser immer entgegengesetzt gerichtet ist. Die Bewegungsgleichung muß wie folgt abgeändert werden:

$$\Theta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -b\frac{d\vartheta}{dt} - M\vec{g} \cdot \vec{r} \sin\vartheta \tag{13}$$

Der bei dem zusätzlichen Drehmoment benutzte Proportionalitätsfaktor b wird als Reibungskoeffizient bezeichnet. Die Phasenraum-Bahn einer solchen gedämpften Schwingung ist vergleichbar mit einer Spirale, die am Anfangspunkt ihr energetisches Maximum hat, und ihr Minimum, die Ruhelage, im Koordinatenursprung erreicht. Abbildung 2 zeigt den Verlauf zweier solcher Bahnen mit den Anfangsauslenkwinkeln $\theta = -\pi$ bzw. $\theta = \pi$. Diese beiden, und auch die Bahnen für alle anderen Startpositionen θ, enden im Koordinatenursprung, der somit zu einem Attraktor dieser Bewegung wird. Die oben gewonnene Bewegungsgleichung läßt sich mit dem Ansatz $\vartheta = \vartheta_0 e^{\lambda t}$ leicht lösen, und somit der Grad der Dämpfung bestimmen. Grundsätzlich müssen drei unterschiedliche Fälle betrachtet werden:

1. Schwingfall: schwache Dämpfung $b < 2\sqrt{mD}$
2. Aperiodischer Grenzfall: mittlere Dämpfung $b = 2\sqrt{mD}$
3. Kriechfall: starke Dämpfung $b > 2\sqrt{mD}$

Soll jedoch verhindert werden, daß der Körper zur Ruhe kommt, so muß ein ausreichend großes äußeres Drehmoment induziert werden. Für eine solche gedämpfte und erzwungene Schwingung ergibt sich, mit einer sinusförmigen Anregung der Frequenz ω_D und der Amplitude M_0, für die Bewegungsgleichung:

$$\Theta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -b\frac{d\vartheta}{dt} - M\vec{g} \cdot \vec{r} \sin(\vartheta) + M_0 \cos(\omega_D t) \tag{14}$$

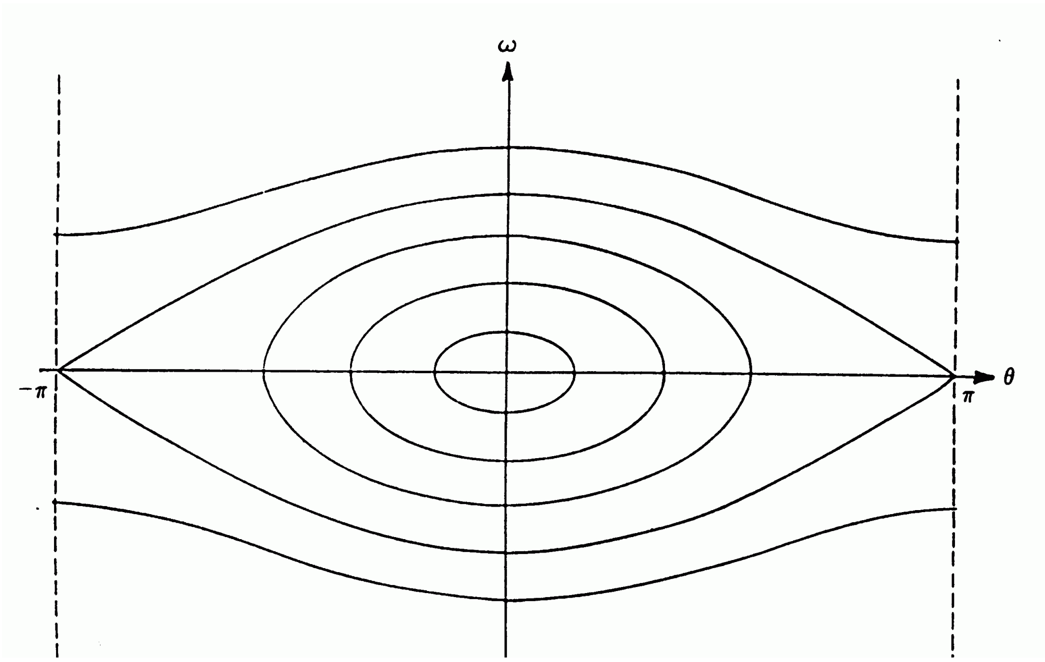

Abbildung 3: Phasenraum-Bahn einer erzwungenen Schwingung

Nach Umformung und der Variablentransformation: $\hat{t} := \omega_D t$ schreibt sich die Bewegungsgleichung in dimensionsloser Form wie folgt:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\hat{t}^2} + \frac{b}{\Theta\omega_0}\frac{d\vartheta}{d\hat{t}} + \sin(\vartheta) = \frac{M_0}{\Theta\omega_0^2}\cos(\frac{\omega_D}{\omega_0}\hat{t}) \tag{15}$$

Hierbei wurde schon die Substitution $\omega_0 = \sqrt{\frac{M\vec{g}\cdot\vec{r}}{\Theta}}$ benutzt. Durch die Definitionen $q = \frac{\Theta\omega_0}{b}$, $\hat{\omega}_D = \frac{\omega_D}{\omega_0}$ und $\hat{M}_0 = \frac{M_0}{\Theta\omega_0^2}$ wird die Bewegungsgleichung sehr übersichtlich [1]:

$$\frac{d^2\vartheta}{d\hat{t}^2} + \frac{1}{q}\frac{d\vartheta}{d\hat{t}} + \sin(\vartheta) = \hat{M}_0\cos(\hat{\omega}_D\hat{t}) \tag{16}$$

Für kleine Auslenkungen ϑ ist das Verhalten hinreichend bekannt. Nach einer Einschwingphase wird sich ein periodisches Verhalten einstellen, das sich mit der Erregerfrequenz ändert. Je nach Dämpfung und Anregung werden sich unterschiedliche periodische Schwingungen beobachten lassen. In Abbildung 3 sind einige der Phasenraum-Bahnen verschiedener erzwungener Schwingfälle dargestellt. Die Frequenz einer solchen erzwungenen Schwingung ist gleich der, der äußeren Anregung. Jedoch ist ein Phasenunterschied

$$\varphi = arctan[\frac{b\,\omega_D}{\Theta(\omega_0^2 - \omega_a^2)}] \tag{17}$$

zwischen der Auslenkung des Pendels und der externen Kraft zu beobachten [8].

2.4 Das Chaotische Pendel

Die Periodizität eines Systems steht natürlich genau im Gegensatz zu einem chaotischen Phänomen, da sich jeder Zustand regelmäßig wiederholt. Doch äquivalent zu dem Beispiel der laminaren Strömung in einem Rohr, existiert auch bei dem Pendel ein 'kritischer Punkt', an dem sich das periodische Verhalten schlagartig ändert und zu einem chaotischen werden kann. Daß ein solcher Wert existieren muß, folgt aus einer genaueren Betrachtung der Bewegungsgleichung. Wird die Gleichung 16 in drei Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben, so ist offensichtlich die erste der oben aufgeführten Voraussetzungen für ein chaotisches System erfüllt:

- $\frac{d\omega}{d\hat{t}} = -\frac{1}{q} - \sin(\vartheta) + \hat{M}_0 \cos(\phi)$
- $\frac{d\vartheta}{d\hat{t}} = \omega$
- $\frac{d\phi}{d\hat{t}} = \hat{\omega}_D$

Hierbei wurde ϕ als Phase der externen Anregung eingeführt. Die für ein mögliches chaotisches Verhalten mindestens benötigten drei Variablen der Bewegung sind durch das Tripel $(\omega, \vartheta, \phi)$ gegeben. Auch die zweite Bedingung, daß mindestens ein nichtlinearer Term die Variablen miteinander verbindet, ist mit den Ausdrücken $\sin\vartheta$ und $\hat{M}_0 \cos\phi$ erfüllt. Somit ist klar, daß sich das Verhalten unter bestimmten Voraussetzungen so ändert, daß der weitere Verlauf nicht mehr vorhersehbar ist.

Doch für welche Werte ist dies möglich? Da, wie schon festgestellt, das Verhalten für eine sinusförmiger Anregung mit $|\ \vartheta\ | < \pi$ immer periodisch ist, muß eine der Voraussetzungen eng mit diesem Wert der Amplitude des Pendels verbunden sein. Nimmt die Auslenkung Werte an, die größer sind als π, bedeutet dies, daß das Pendel oben über den Scheitelpunkt kippt. Dieser Punkt ist vergleichbar mit dem kritischen Wert der Strömungsgeschwindigkeit aus dem obigen Beispiel, bei dem sich schlagartig die Eigenschaften des Systems ändern. So kippt mit dem Pendel auch die Richtung, in die die rücktreibende Kraft wirkt, um. In Abbildung 4 sollen einige mögliche Situationen erläutert werden. Dabei symbolisieren die durchgezogenen Pfeile immer die durch die Gravitation verursachte Kraft $\vec{F}_S$ und die unterbrochenen Pfeile die Kraft der externen Anregung $\vec{F}_{ext}$. Die Reihe 1 zeigt einen periodischen Verlauf. In 1(a) hat das Pendel den Umkehrpunkt erreicht ($|\ \vartheta\ | < \pi$). Es ändert seine Bewegungsrichtung und schwingt zurück in die Ruhelage; Bild 1(b). Hier hat das Pendel seine größte Geschwindigkeit, die dafür sorgt, daß es sich über die Ruhelage hinaus weiter bewegt. Ob die externe Kraft

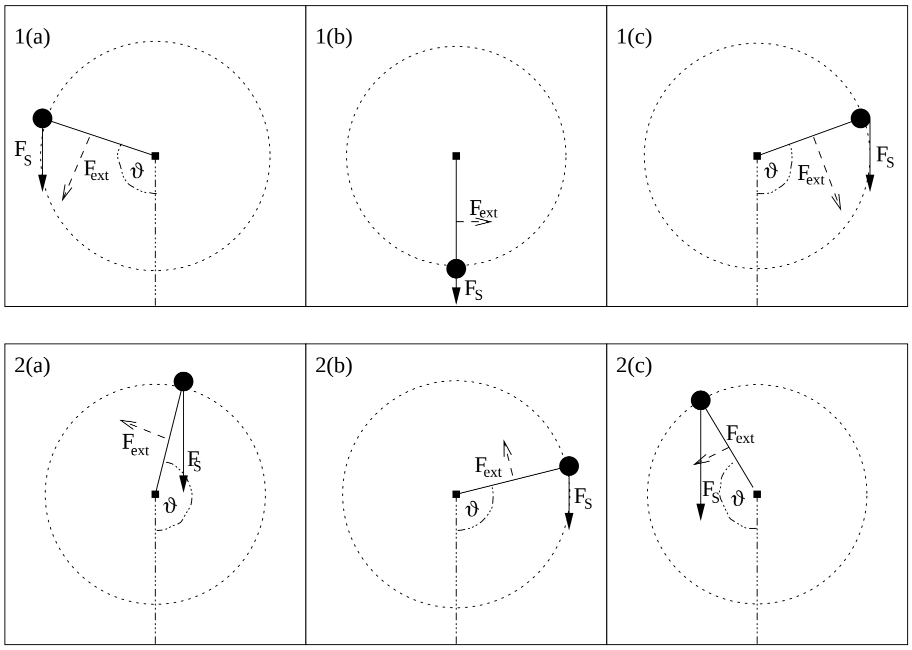

Abbildung 4: Momentbilder einer periodischen Bewegung 1(a)-(c)
und einer Schwingung mit Überschlag 2(a)-(c).

im tiefsten Punkt die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit hat, wie in 1(b) gezeigt, oder die entgegengesetzte, hängt von der Phasenverschiebung φ aus Gleichung 17 ab. Durch den sinusförmigen Verlauf der Anregung nimmt die externe Kraft immer mehr ab und kehrt sich in die andere Richtung. Ist die Summe von ihr und der wirkenden Gravitationskraft so groß geworden, daß sie die Bewegung des Pendels kompensiert, ist wieder ein Umkehrpunkt der Bewegung erreicht - Bild 1(c).
Wird der Scheitelpunkt von dem Pendel überschritten, was in Bild 2(a) gezeigt wird, wirken plötzlich die beiden Kräfte in entgegengesetzte Richtungen. Ob das Pendel danach direkt zur Ruhelage durchschwingt - Bild 2(b), oder zuerst den Scheitelpunkt passiert - Bild 2(c), hängt davon ab, welche der beiden Kräfte betragsmäßig größer ist. Ist der Unterschied zwischen den Kräften sehr gering, kann durch kleine Änderungen der Voraussetzungen die resultierende Kraft ihre Richtung ändern und sich somit das Verhalten des Systems völlig ändern. Besseres Verständnis für die möglichen Bewegungen des Pendels läßt sich durch eine Computeranimation erreichen [2].
Ob ein Verlauf chaotisch ist, oder ob sich eine periodische Schwingung mit einem oder mehreren Überschlägen des Pendels einstellt, hängt nur von der Wahl der drei Variablen q, $\hat{M}_0$ und $\hat{\omega}_D$ aus Gleichung 16 ab. Das Überschlagen des Pendels ist also eine notwendige aber keine hinreichende Bedingung für ein nicht vorhersehbares Verhalten.

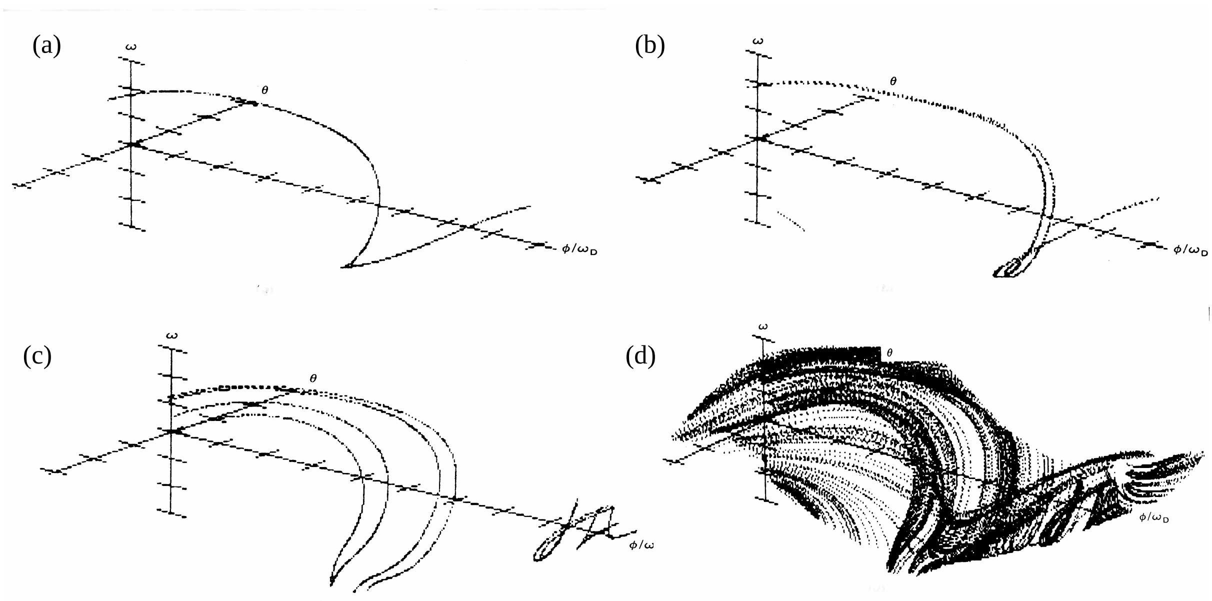

Abbildung 5: 3-dimensionales Phasenporträt mit den Werten $q = 2$, $\hat{\omega}_D = \frac{2}{3}$ und
(a) $\hat{M}_0 = 0,90$ (b) $\hat{M}_0 = 1,07$ (c) $\hat{M}_0 = 1,47$ (d) $\hat{M}_0 = 1,50$

Bei genauerer Untersuchung zeigt sich, daß sich die Bereiche, in denen das Pendel periodisch schwingt, mit den Bereichen abwechselt, in denen chaotische Verhalten auftritt. Es existieren also für jeden 'Überschlag', den das Pendel macht, zwei verschiedene Gebiete, deren Grenzen von dem obigen Tripel $(q, \hat{M}_0, \hat{\omega}_D)$ bestimmt werden. Ein solches Gebiet, in dem ein Bereich mit chaotischem Verhalten beinhaltet ist, wurde von Gwinn und Westervelt schon 1985 mit den Werten: $q = 2$, $\hat{\omega}_D = \frac{2}{3}$ und $0,5 \leq \hat{M}_0 \leq 1,5$ gefunden [4]. Bei diesem Beispiel kann also durch leichtes variieren von $\hat{M}_0$ chaotisches oder periodisches Verhalten des Pendels demonstriert werden. Dieses läßt sich dann durch Visualisierung der dynamischen Variablen (θ, ω, ϕ) darstellen. Abbildung 5 zeigt den Verlauf für vier verschiedene Werte von $\hat{M}_0$ im 3-dimensionalen Raum $P = (\theta, \omega, \frac{\phi}{\omega_D})$. Die Abbildungen 5 (a) bis (c) zeigen periodischen Verlauf. Die Abbildung 5 (d) hingegen hebt sich deutlich von den ersten drei ab und läßt erkennen, daß sich eine Vorhersage für die weitere Entwicklung des Zustandes nicht treffen läßt. Eine solche dreidimensionale Darstellung der dynamischen Variablen ist aufwendig und für eine Betrachtung unhandlich. Es gibt Aufzeichnungsmöglichkeiten, die technisch einfacher sind und sich auch leichter deuten lassen.

2.5 Poincaré-Schnitte

Bei einer Momentaufnahme eines Zustands im Phasenraum wird meist Ort und Impuls gegeneinander aufgetragen. Da sich die Bewegung des Pendels jedoch auf eine Kreisbahn beschränkt, ist es sinnvoller, die bei einer Kreisbewegung relevanten Variablen, Auslenkwinkel θ und Winkelgeschwindigkeit ω, gegeneinander aufzutragen. Diese Tatsache wurde schon bei den Abbildungen 2 bis 5 benutzt. Eine elegante Möglichkeit der Aufzeichnung ist, nur zu bestimmten, äquidistanten Zeitpunkten die Kombination von θ und ω zu notieren. Das so entstehende Bild wird Poincaré-Schnitt genannt. Die Methode ist vergleichbar mit der Betrachtung einer Bewegung unter Stroboskoplicht. Entspricht der Abstand der Zeitpunkte gerade einer Periodendauer der betrachteten Schwingung, so wird immer der gleiche Phasenzustand beobachtet werden und der Poincaré-Schnitt enthält nur diesen einen Punkt. Wird der Abstand der Beobachtungspunkte halbiert, so verdoppelt sich die Anzahl der Punkte in der Aufzeichnung. Doch egal wieviele Punkte in dem Schnitt zu sehen sind, entscheidend ist, daß bei periodischen Systemen nur endlich viele isolierte Punkte vorkommen können. Bei chaotischen Zuständen hingegen, steigt die Anzahl der beobachteten Punkte beliebig mit der Zeit. Die Abbildungen 6 (a) bis (d) zeigen sowohl die Projektionen der Phasenraumbahnen, als auch die dazugehörigen Poincaré-Schnitte. Es wurden die gleichen Ausgangsparameter benutzt wie bei Abbildung 5. Bei den Übergängen von (a) nach (b) und von (b) nach (c) verdoppelt sich jeweils die Periode der Pendelbewegung. Somit verdoppeln sich auch die in den Schnitten aufgetragenen Punkte. Bild (d) zeigt wieder einen chaotischen Verlauf und die dafür typische Linie im Poincaré-Schnitt. Die Tatsache, daß auch bei (d) noch einzelne Punkte zu erkennen sind, liegt an der nur endlichen Dauer der Aufzeichnung. Für den Grenzfall einer unendlichen Messung wäre die Linie durchgezogen und in der Projektion der Phasenraum-Bahn nur eine schwarze Fläche erkennbar, außerhalb derer nur die Punkte liegen, die durch die energetischen Voraussetzungen nicht erreicht werden können.

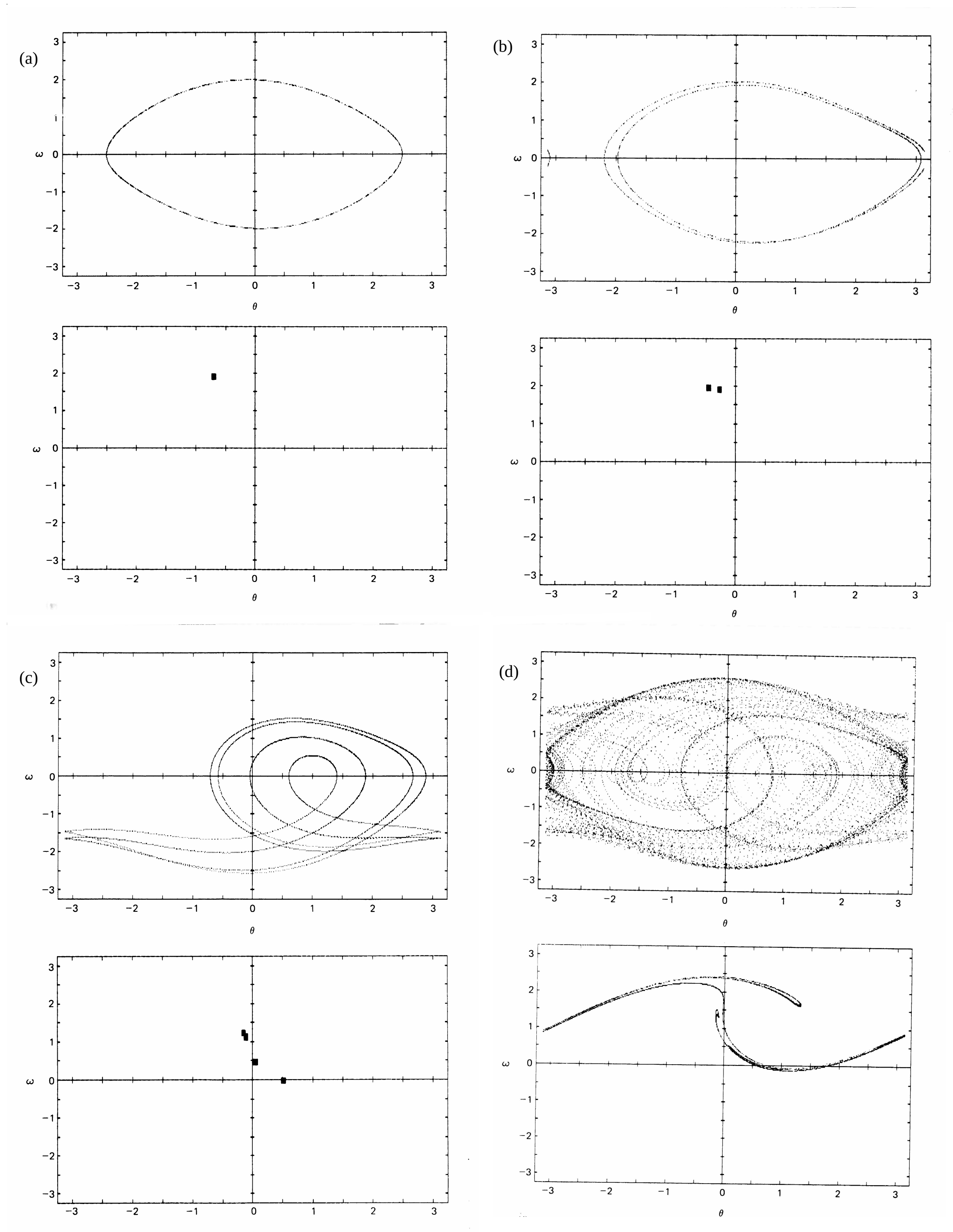

Abbildung 6: Phasenraum-Bahnen und Poincaré-Schnitte für die Werte $q = 2$, $\hat{\omega}_D = \frac{2}{3}$ und (a) $\hat{M}_0 = 0,90$ (b) $\hat{M}_0 = 1,07$ (c) $\hat{M}_0 = 1,47$ (d) $\hat{M}_0 = 1,5$

3 Realisierungkonzepte

Im vergangenen Kapitel wurden die theoretischen Grundprinzipien eines chaotischen Pendels betrachtet. Im Folgenden soll nun eine Möglichkeit zur Realisierung eines solchen Systems gesucht werden. Diese soll dazu eingesetzt werden können, chaotisches Verhalten, zum Beispiel im Rahmen einer Vorlesung, zu demonstrieren. Zunächst muß geklärt werden, wie die geometrischen Proportionen gewählt werden müssen, wie ein einstellbares Drehmoment proportional zur Winkelgeschwindigkeit erzeugt werden kann, wodurch das äußere Drehmoment hervorgerufen werden soll und wie dieses dann auf das Pendel übertragen werden kann. Da die geometrischen Einzelheiten des Aufbaus von der gewählten Lösung abhängen, muß dieser Punkt als letzter bearbeitet werden.
Die Grundidee zur Erzeugung einer geschwindigkeitsabhängigen Reibungkomponente ist eine Wirbelstrombremse. Auf die Achse, auf der auch der Pendelkörper aufgehängt ist, wird eine Bremsscheibe so befestigt, daß sie zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten hindurchläuft. Durch variieren des Stroms I, der durch die Spulen des Elektromagneten fließt, läßt sich auch der Reibungskoeffizient b verändern.

Für die Anregung des Pendels kommen mehrere Möglichkeiten in Betracht. Daher soll im Folgenden , nach den unterschiedlichen Ansätzen differenziert werden und auf Vor- und Nachteile der jeweiligen Realisierung eingegangen werden.

3.1 Elektromagnetische Anregung

Ein auf den ersten Blick vielversprechender Ansatz ist die Verwendung eines magnetischen Pendels, welches sich in einem periodisch wechselnden Magnetfeld bewegt. Das Feld wird durch Wechselstrom erzeugt, der durch die Achse fließt, an der auch das Pendel aufgehängt ist. Diese Realisierung ist jedoch aus den folgenden Gründen nicht durchführbar:
Zwar erfahren die beiden Pole des Magneten durch das vom Strom induzierte Magnetfeld eine Kraft, jedoch nimmt diese linear mit dem Abstand x zur Achse ab. Da das Drehmoment linear mit dem Abstand zur Achse zunimmt, sind beide Werte an den Polen des Magneten gleich groß, unabhängig davon, wie weit sie von der Achse entfernt sind. Durch die Punktsymmetrie des zirkularen Feldes sind sie immer entgegengesetzt gerichtet und heben sich somit gegenseitig auf. Das resultierende Drehmoment ist also $= 0$. Damit gibt es keine Möglichkeit, diese Idee als externe Anregung zu benutzen.

Es muß eine Lösung gefunden werden, die ohne diese elektromagnetische Anregung auskommt.

3.2 Anregung durch Elektromotor

Eine mögliche Lösung des Problems besteht darin, das Pendel durch einen Elektromotor anzutreiben. Das externe Drehmoment ist dann direkt durch den Strom am Motor steuerbar. So ist die erwünschte sinusförmige Anregung sehr leicht durch einen sinusförmigen Stromverlauf zu verwirklichen. Ein großer Nachteil bei dieser Anordung ist die innere Reibung des anregenden Motors. Diese wird hauptsächlich durch die im Kern des Elektromotors montierten Permanentmagneten verursacht. Sind diese einerseits notwendig dafür, daß sich die Achse überhaupt in Bewegung setzt, stören sie andererseits dadurch, daß durch ihr permanentes Magnetfeld ein Gegenstrom in die Spulen induziert wird, sobald sich das Pendel bewegt. Dies ist ein Effekt, der nicht unerheblich sein kann, und somit die Beobachtung des gewünschten Verhaltens unmöglich machen kann. Als extremes Beispiel, das den Sachverhalt erklärt, dient die Situation, bei der kein Strom durch den Motor fließt. Der Idealfall sollte sein, daß dann die Bewegung des Pendels ganz unabhängig von dem Motor verlaufen kann. Doch durch eben diese tritt eine stetige Flußänderung in den Spulen des Motors auf und damit auch der schon erwähnte Gegenstrom. Dieser bewirkt in den Spulen ein Gegenfeld, das dem Verursacher, der Pendelbewegung, entgegen wirkt und diese somit hemmt. Zwar tritt die Situation, daß kein Strom fließt nur zweimal pro Periode auf, nämlich an den Umkehrpunkten, der Effekt des Gegenstroms ist aber auch in der restlichen Zeit der Schwingung vorhanden. Diese Realisierungsmethode ist somit auch nicht zur Lösung des Problems geeignet.

3.3 Anregung durch Schrittmotor

Die Funktionsweise eines Schrittmotors unterscheidet sich wesentlich von der eines Elektromotors. Im Innern ist zwar auch ein Permanentmagnet auf der Achse montiert, jedoch befinden sich am Rand Spulen, die beliebig mit digitalen Signalen angesteuert werden können. Dies wird hauptsächlich in der Positionierung benutzt, da so eine Achse genau auf eine gewünschte Position gefahren, und diese dann auch gehalten werden kann. Ist zum Beispiel die in Abbildung 7 gezeigte Spule A aktiviert, so wird der Magnet in der Mitte sich auf die Stellung $\theta = 0°$ zubewegen. Sind hingegen die

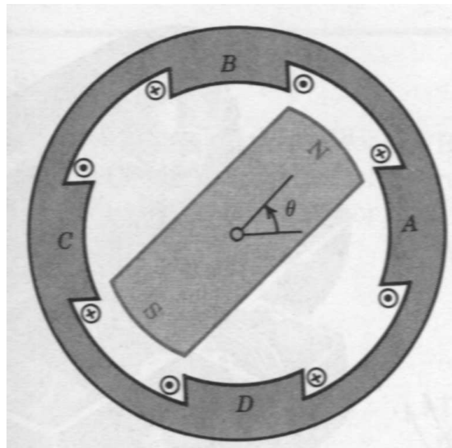

Abbildung 7: Schrittmotor

Spulen B und C gleichzeitig aktiv, wird das entstehende Feld den Rotor auf die Position $\theta = 135°$ drehen. Das Erhöhen der Spulenzahl verringert die Gradzahl, die pro Schritt gedreht wird [7]. Allein einen Schrittmotor zum Erzeugen des äußeren sinusförmigen Drehmoments zu benutzen wäre nicht sinnvoll, da eigentlich nur die Funktionsweise eines Elektromotors nachgeahmt werden würde. Es zeigt sich, daß durch eine kleine Modifikation des Aufbaus der Antrieb mit einem Schrittmotor eine sehr gute Lösung für die hier gegebene Aufgabe darstellt. Die Anforderung an das System ist es, ein äußeres Drehmoment $T_{ext} = M_0 \cos(\omega_D t)$ zu erzeugen. Dabei sollen die Amplitude M_0 und die Anregungsfrequenz ω_D fest, jedoch frei wählbar sein.

Wird zum Erzeugen des äußeren Drehmoments eine Spiralfeder benutzt, so beträgt dieses immer $T_{ext} = -D^o\psi$, wobei ψ den Auslenkwinkel der Feder in Bezug zu ihrer Position in entspanntem Zustand angibt, und die Proportionalitätskonstante D^o das Richtmoment ist, welches nur von den geometrischen Gegebenheiten der Spiralfeder abhängt. Der Winkel muß so eingestellt werden, daß auf das Pendel das momentan erwünschte Drehmoment wirkt. Oder anders gesagt, es muß zu jedem Zeitpunkt t die Gleichung

$$M_0 \cos(\omega_D t) = -D^o\psi \qquad \Rightarrow \qquad \psi(t) = -\frac{M_0 \cos(\omega_D t)}{D^o} \tag{18}$$

gelten. Wird also eine Spiralfeder dazu benutzt, das äußere Drehmoment zu erzeugen, ist die gewünschte Form genau dann erreicht, wenn der Winkel ψ in der obigen Form eingestellt werden kann. Die technische Durchführung besteht nun darin, mit einem Drehgeber ständig die momentane Position der Achse, und damit des Pendels, zu bestimmen und durch obige Gleichung den benötigten Winkel ψ zwischen dem Pendel und der Feder zu berechnen. Wird die Spiralfeder auf der Achse eines Schrittmotors befestigt, kann diese, durch Ansteuern des Motors, genau auf die Position gedreht werden, in der der Winkel zwischen ihr und dem Pendel den gewünschten Wert ψ annimmt.

Somit ist das Problem darauf reduziert worden, durch einen Drehgeber die Achsstellung auslesen zu lassen, diese Daten einem Computer zu übermitteln und durch geeignete Software den Auslenkwinkel ϑ des Pendels zu berechnen. Das gleiche Programm berechnet auch das benötigte Drehmoment T_{ext}und den dufür erforderlichen Winkel ψ zwischen Pendel und Feder, rechnet diesen Winkel in die Anzahl der Schritte, die der Motor machen muß, um und teilt diesem die Schrittzahl und Richtung mit.

4 Dimensionierung

Nachdem der prinzipielle Versuchsaufbau im vorherigen Kapitel umrissen wurde, sollen im folgenden Abschnitt die einzelnen Bestandteile genauer beschrieben und dimensioniert werden. Dabei muß darauf geachtet werden, daß die Kombination aller Teile die gewünschten Anforderungen erfüllen kann.

4.1 Anordnung

Durch die Vorgaben, daß ein Schrittmotor das Pendel indirekt über eine Spiralfeder antreibt und ein Drehgeber ständig dessen Position bestimmt, ist die Anordnung schon grob gegeben. In der Abbildung 8 wird diese veranschaulicht. Das Pendel befindet sich an dem einen Ende einer Achse, an deren anderem Ende der Drehgeber fixiert ist. Zwischen beiden ist auf der Achse die Bremsscheibe montiert, welche Bestandteil der Wirbelstrombremse ist. Der Polschuh für die Bremse ist aus Gründen der Übersicht in der Zeichnung weggelassen worden. Die Achse des Schrittmotors, der auf der anderen Seite des Pendels montiert wird, bildet zwar eine räumliche Verlängerung der Pendelachse, jedoch sind beide nur indirekt über die Feder miteinander verbunden, da sie sich unterschiedlich bewegen lassen müssen. Die Feder ist mit ihrem inneren Ende auf der Schrittmotorachse befestigt und mit ihrem äußeren an dem Pendel.

4.2 Pendelkörper

Der eigentliche Pendelkörper besteht aus einer parallel zum Boden verlaufenden Achse, aus der Bremsscheibe für die Wirbelstrombremse und aus dem Pendel. Diese drei Teile sind fest miteinander verbunden und bilden zusammen das schwingende Element der Anordnung. Gelagert wird es auf der einen Seite durch ein Kugellager und auf der anderen Seite dadurch, daß es starr mit der Achse des Drehgebers verbunden ist. Die einzelnen Abmessungen und Eigenschaften der drei Elemente und des gesamten Pendelkörpers werden im Folgenden genauer beschrieben.

- Das Pendel besteht aus einem zylindrischen Aluminiumstab der Länge $l_P = 20\,cm$ und dem Radius $r_P = 1\,cm$. Es ist durch eine Bohrung, deren Abstand zum Schwerpunkt des Pendels $r = 5\,cm$ beträgt, befestigt. In die beiden Enden des Stabes wurden je ein Gewinde geschnitten, um zum einen die Verbindung zu der Spiralfeder befestigen zu können und zum andern ein zusätzliches Gewicht

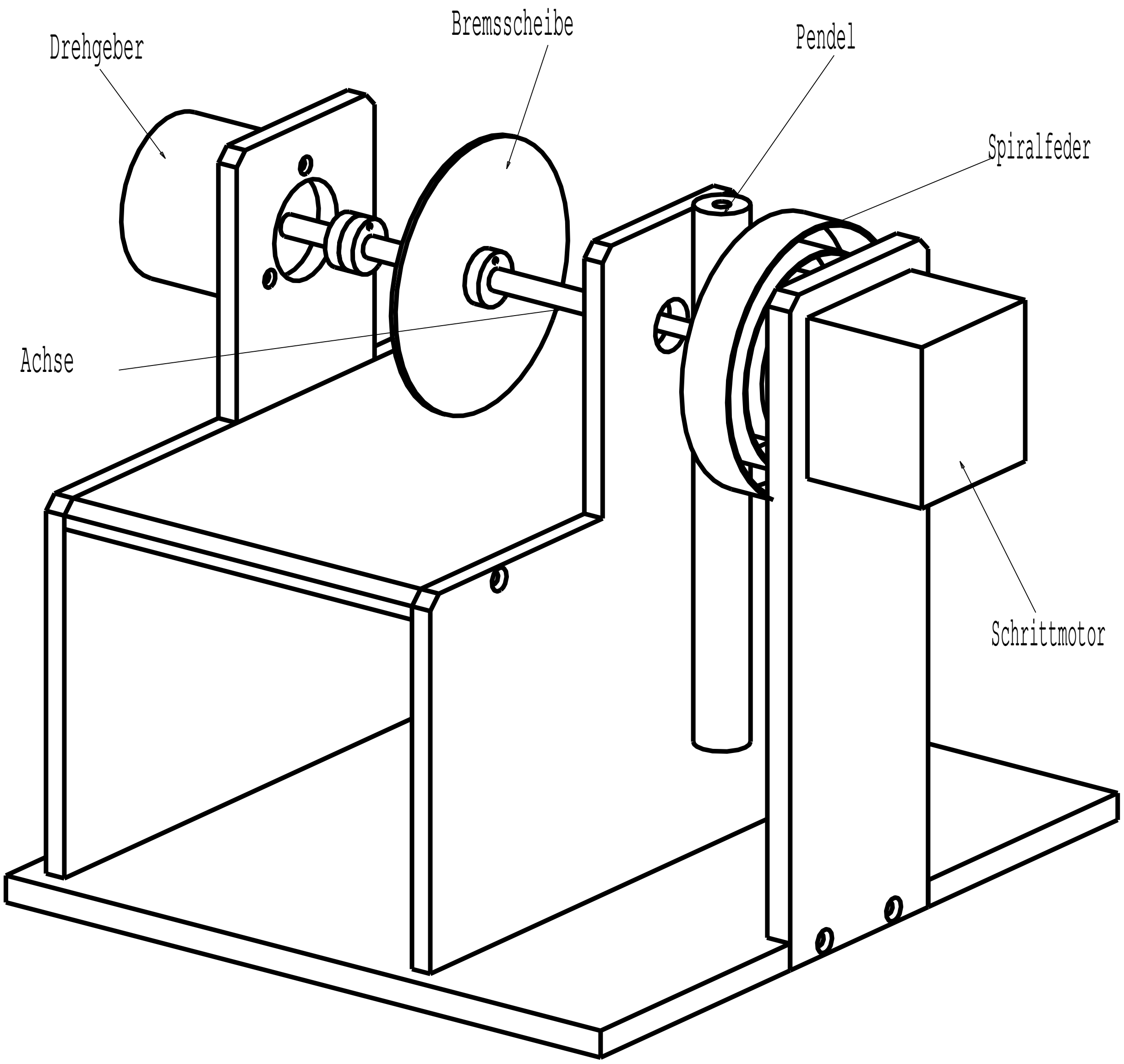

Abbildung 8: Der Aufbau

montieren zu können. Damit läßt sich das Gesamtgewicht, die Lage des Schwerpunktes, das Trägheitsmoment, so wie das Drehmoment des Pendelkörpers variieren. Das Volumen des Stabes beträgt abzüglich der Gewinde und der Bohrung $V_P = 60,9\,cm^3$. Bei der Dichte $\rho_{Al} = 2,7\,\frac{g}{cm^3}$ von Aluminium ergibt das eine Masse von $M_P = 164,4\,g$. Da die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt des Pendels verläuft, muß wie schon angegeben, das Trägheitsmoment mit Hilfe des Satzes von Steiner berechnet werden. Für das Trägheitsmoment bezüglich der Achse erhält man $\Theta_P = \Theta_S + Mr^2 = 9590\,g\,cm^2$.

- Das zusätzliche Gewicht aus Edelstahl hat ebenfalls zylindrische Form. An der Oberseite ist ein Gewinde befestigt, das eine Verbindung zu dem Pendel herstellt. Der Radius beträgt $r_G = 1,75\,cm$ und die Höhe $h_G = 3\,cm$. Zusammen mit dem Gewinde hat es ein Volumen von $V_G = 29,1\,cm^3$. Mit einer Dichte von $\rho_{115CrV3} = 7,84\,\frac{g}{cm^3}$ ergibt sich für die Masse des zusätzlichen Gewichtes $M_P = 228\,g$. Durch das Anbringen des Zusatzgewichtes verändert sich die Lage des Schwerpunktes. Der Abstand zwischen diesem und der Achse beträgt nun $r_Z = 11,7\,cm$. Das Trägheitsmoment, bezüglich der späteren Drehachse, bestimmt sich wiederum mit Hilfe des Steiner'schen Satzes zu $\Theta_G = 6,22\,g\,m^2$.

- Die Bremsscheibe hat einen Radius von $r_B = 5\,cm$ und eine Dicke von $d_B = 3\,mm$. In ihrer Mitte ist eine Aussparung von $8\,mm$, durch welche die Achse verläuft. Eine weitere Bohrung wird dazu benötigt, einen Mitnehmerstab befestigen zu können, um die Scheibe mit Hilfe von zwei Muffen auf der Achse zu fixieren. Das verbleibende Volumen der Scheibe beträgt $V_B = 20,8\,cm^3$. Auf Grund der besseren elektro-magnetischen Eigenschaften in Bezug auf das gewünschte Verhalten der Wirbelstrombremse, ist die Bremsscheibe aus Kupfer. Die Dichte von Kupfer beträgt $\rho_{Cu} = 8,96\,\frac{g}{cm^3}$, was zu der Masse $M_B = 186,4\,g$ und zu einem Trägheitsmoment $\Theta_B = 2330\,g\,cm^2$ der Scheibe führt.

- Die Achse hat eine Gesamtlänge von $l_A = 16,3\,cm$. Davon hat ein Teil der Länge $l_1 = 12,8\,cm$ den Radius $r_1 = 4\,mm$, und der andere Teil mit der Länge $l_2 = 3,5\,cm$ den Radius $r_2 = 3mm$. Die unterschiedlichen Radien der Achse haben zum einen den Grund, daß das angepasste Kugellager nicht auf der Achse wandern kann und zum andern, daß die Verbindung zu der Drehgeberachse leichter hergestellt werden kann. Die Dichte des benutzten Präzisionsstahls 115CrV3 beträgt $\rho_{115CrV3} = 7,84\,\frac{g}{cm^3}$, was bei einem Volumen der Achse von $V_A = 7,4\,cm^3$

zu der Masse $M_A = 58,3\,g$ und dem Trägheitsmoment $\Theta_A = 4,4\,g\,cm^2$ der Achse führt.

Die bei der Befestigung der Bauteile benötigten Halterungen haben zusammen eine Masse von $M_H = 10,7\,g$ und das Trägheitsmoment $\Theta_H = 5,6\,g\,cm^2$. Somit ergeben sich für die Trägheitsmomente Θ und Θ_Z, bei dem noch das zusätzliche Gewicht mitberücksichtigt ist, bezüglich der Drehachse folgende Werte:

$$\Theta = \Theta_P + \Theta_B + \Theta_A + \Theta_H = 1,19\,g\,m^2 \qquad (19)$$

$$\Theta_Z = \Theta_P + \Theta_B + \Theta_A + \Theta_H + \Theta_G = 7,42\,g\,m^2 \qquad (20)$$

Da von allen genannten Elementen nur die Schwerpunkte des Pendels und des Zusatzgewichtes nicht auf der Drehachse liegen, sind die relevanten Massen in der Bewegungsgleichung durch $M = M_P = 164,4\,g$ bzw. durch $M_Z = M_P + M_G = 392,4\,g$ gegeben. Die Maximalwerte der wirkenden rücktreibenden Drehmomente, die durch die Gravitation hervorgerufen werden, betragen somit:

$$T_{gew,max.} = M\vec{g} \cdot \vec{r} sin(90°) = 80,6 \cdot 10^{-3}\,N\,m \qquad (21)$$

$$T_{gew,max.,Z} = M\vec{g} \cdot \vec{r}_Z sin(90°) = 450,4 \cdot 10^{-3}\,N\,m \qquad (22)$$

Hiermit lassen sich die theoretischen Werte für die Eigenfrequenzen des Pendels und damit auch die Schwingungszeiten T und T_Z berechnen. Diese betragen, wieder mit den Annahmen, daß keinerlei Reibungskräfte vorhanden sind und $\sin\vartheta \approx \vartheta$ benutzt werden kann:

$$\omega_0 = 8,22\,Hz \qquad \Rightarrow \qquad T_{theo} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,76\,s \qquad (23)$$

$$\omega_{0,Z} = 7,79\,Hz \qquad \Rightarrow \qquad T_{Z,theo} = \frac{2\pi}{\omega_{0,Z}} = 0,81\,s \qquad (24)$$

Bei der Betrachtung von großen Auslenkungen muß die in Gleichung 12 gemachte Entwicklung zur Bestimmung der Eigenfrequenz benutzt werden, da diese ja von der Amplitude abhängt. Bei einer angenommenen Auslenkung von $\vartheta = 90°$ liefern die ersten Terme der Formel 12 die Werte $\omega_0 \approx 7,2\,Hz$ und $\omega_{0,Z} \approx 6,7\,Hz$. Da bei allen Werten hier die Reibungseinflüsse vernachlässigt wurden, wird der tatsächliche Wert noch etwas tiefer sein als die hier errechneten Ergebnisse.

4.3 Spiralfeder

Die Spiralfeder dient dazu, das benötigte Drehmoment auf das Pendel zu übertragen. Durch spannen der Feder wird ein Drehmoment erzeugt, welches linear mit der Auslenkung ψ ansteigt: $T_S = -D^o\psi$. Der Linearitätsfaktor D^o ist nur von den Eigenschaften des benutzten Materials abhängig:

$$D^o = \frac{Ehe^3}{12L} \tag{25}$$

Hierbei ist e die Dicke, h die Breite und L die Länge des Bandes. Die stoffspezifische Größe E wird als Materialzahl von Young bezeichnet [5]. Für den zumeist für solche Federn benutzten Federstahl hat diese den Wert: $E = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$. Das Band, aus dem die Feder gewickelt ist, hat die Dicke $e = 0,8\,mm$ und die Breite $h = 25\,mm$. Die Länge der Feder muß so gewählt werden, daß sie montiert werden kann, ohne daß eine Vorspannung herrscht. Das heißt, die Feder wird in einem Abstand von $5\,cm$ von ihrer Achse abgeschnitten. Dies hat zur Folge, daß ihre Länge $L = 65cm$ beträgt. Somit errechnet sich das Richtmoment zu $D^o = 345 \cdot 10^{-3}\,Nm$. Mit diesem Wert läßt sich bestimmen, bei welcher Auslenkung ψ die maximal zu erwartenden Drehmomente aus den Gleichung 21 und 22 erreicht werden. Das Drehmoment $T_{gew,max.,Z}$ wird bei einer Auslenkung von $\psi_Z = 72°$ und $T_{gew,max.}$ schon bei $\psi = 13°$ erzielt.

4.4 Schrittmotor

Die Spiralfeder überträgt zwar das Drehmoment auf das Pendel, jedoch muß die Feder vorher durch den Schrittmotor gespannt werden. Somit wird natürlich die Energie, die von außen in das System gespeist wird, von dem Schrittmotor geliefert, indem er immer den Winkel zwischen Pendel und Feder nachjustiert. Das von ihm erzeugbare Drehmoment muß somit größer sein als, das maximal Benötigte. Um den schon zuvor angesprochenen Spielraum zu haben, das Pendel auch mit zusätzlichen Gewichten in Betrieb nehmen zu können, wird ein Motor mit dem maximalen Haltedrehmoment von $T_{max.Motor} = 494 \cdot 10^{-3}\,N\,m$ verwendet. Dieser benötigt eine 12 Volt Versorgungsspannung und hat einen Nennstrom von 0.48 Ampere. Der Schrittwinkel des Motors beträgt 1.8°. Das bedeutet, daß eine ganze Drehung der Motorachse in 200 Schritte unterteilt ist. Es ist auch möglich, den Motor im Halbschrittmodus zu betreiben. Somit verdoppelt sich die Schrittzahl auf 400 pro Umdrehung. Die Genauigkeit, mit welcher der Schrittwinkel angenommen wird, ist mit 5% angegeben. Die maximale Schrittfrequenz liegt bei ca. 1kHz im Voll- und bei ca. 2kHz im Halbschrittmodus. Dies ergibt eine maximale Drehfrequenz des Motors von 5 Hz. Angesteuert wird der Schrittmotor über eine Treiberplatine, die direkt die vier Spulen des Motors ansteuert. Die Belegung des Motorkabels und die weitere Verschaltung ist in Tabelle 2 im Anhang aufgelistet.

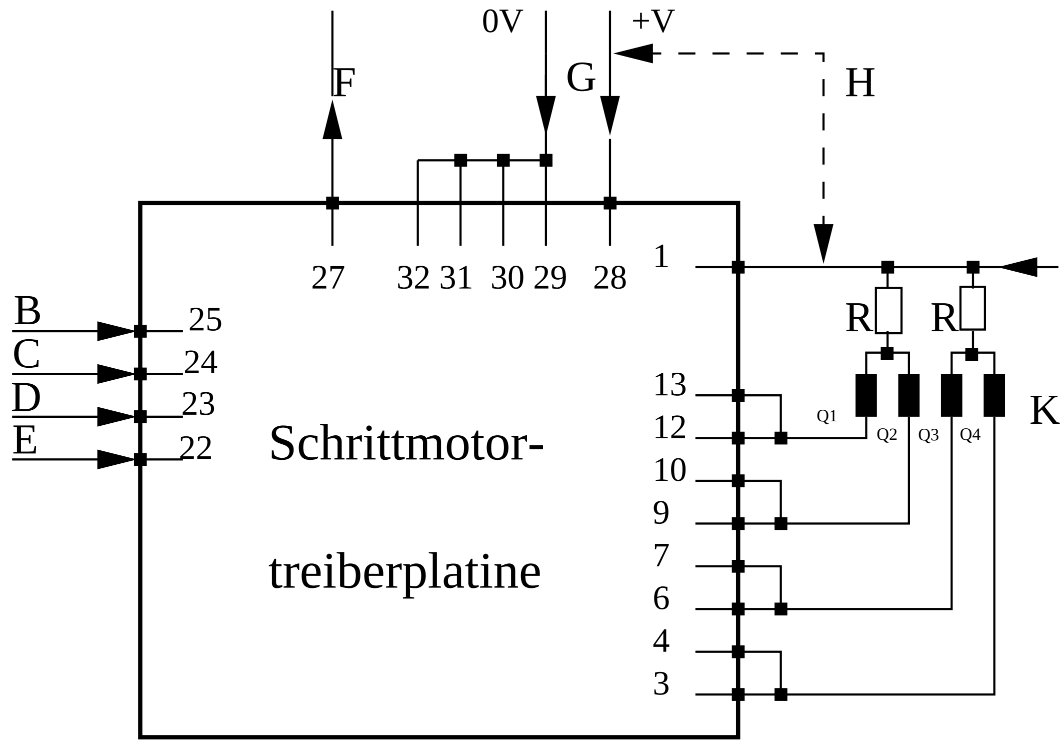

Abbildung 9: Schrittmotortreiberplatine

4.5 Schrittmotortreiberplatine

Das Layout der Ansteuerplatine für den Schrittmotor ist in Abbildung 9 schematisch dargestellt. Wie zu sehen ist, sind die Pins mit den Nummern 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12 und 13 die direkten Ausgänge, die die Spulen K des Motors steuern. Auf Pin 28 werden die für die Platine benötigten +15 Volt Versorgungsspannung G angelegt und auf die Pins 29 bis 32 das entsprechende Nullniveau. Der Pin 27 liefert eine Hilfsspannung F von +12 Volt, die extern benutzt werden kann. Es ist möglich, den Motor mit der gleichen Spannungsquelle zu versorgen wie die Platte. Dies wird hier mit der Verbindungslinie H demonstriert. Die eigentlichen Steuereingänge E, D, C und B liegen auf den Pins 22 bis 25. Diese haben die folgende Belegung:

- B - Voll-/Halbschrittmodus: Niveau 0 - Halbschritt, Niveau 1 - Vollschritt
- C - Signalpulse
- D - Richtung: Niveau 0 - gegen den Uhrzeigersinn, Niveau 1 - mit dem Uhrzeigersinn bei Aufsicht auf die Achse
- E - Voreinstellung

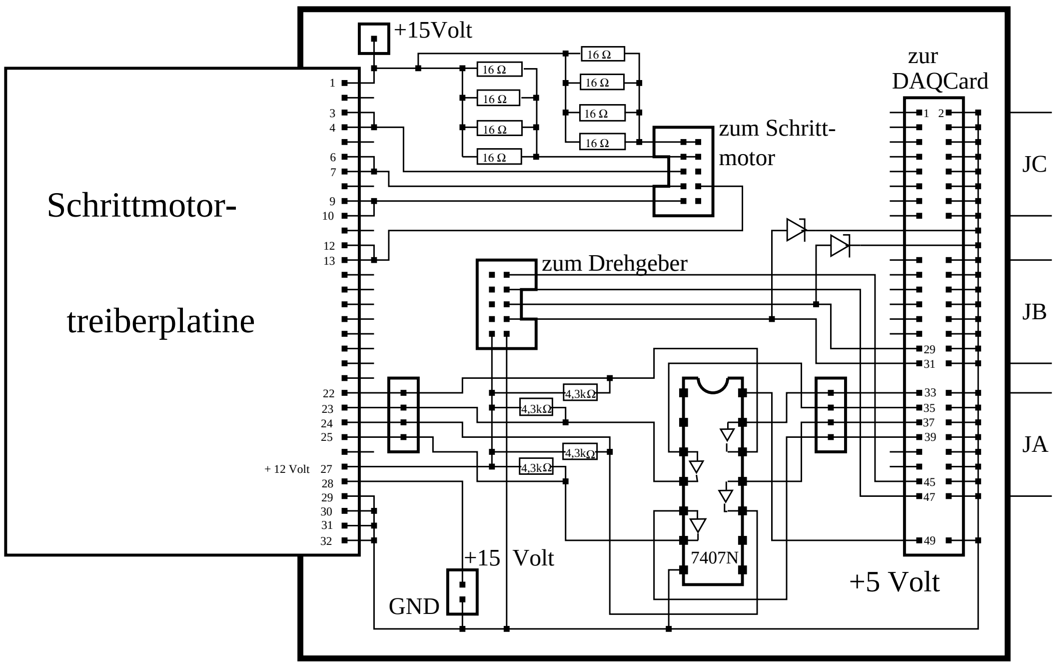

Abbildung 10: Schaltung

Vor jeder Inbetriebnahme des Motors sollte die Leitung E einmal von Niveau 0 auf 1 geschaltet werden und muß dann diesen Wert beibehalten. Mit B und C werden Schrittmodus und Richtung gewählt und auf C ein Pulssignal angelegt. Bei jeder negativen Signalflanke dreht sich der Anker des Motors um einen Voll- bzw. Halbschritt in die eingestellte Richtung weiter. Die Pulsbreite muß dabei mindestens $10\mu s$ betragen und die Pulsfrequenz im Bereich zwischen 1Hz und 25kHz liegen. Diese verringert sich erheblich, da die maximale Schrittfrequenz des Motors nur ca. 2kHz im Halbschrittmodus beträgt.

Da die Pulse als TTL-Signale von einem Computer eingespeist werden, beträgt für das Niveau 1 die Spannung nur 5V. Da die Platine jedoch CMOS-Signale mit einer Amplitude von 12V erwartet, muß vor die Eingänge B, C, D und E noch ein Treiberbaustein(7407N), der das Niveau entsprechend wandelt, eingebaut werden. Dieser wird zusammen mit den benötigten Widerständen und den Steckverbindungen für Motor, Drehgeber, Computer, Treiberplatine und Stromversorgung auf eine Platine gelötet. Deren Layout wird in Abbildung 10 gezeigt.

4.6 Drehgeber

Zum Auslesen der Achsstellung wird ein Drehgeber benutzt. Die maximale Auflösung beträgt 8192 Schritte, also 13 Bit, pro Umdrehung. Die Funktionsweise beruht auf einem optischen Verfahren. An der Achse sind für jedes Bit eine Scheibe befestigt. Bei der Ersten ist die eine Hälfte lichtdurchlässig und die andere nicht. Bei der Zweiten sind zwei Viertel lichtdurchlässig und mit jeder weiteren Scheibe verfeinert sich die Unterteilung in transparent und nichttransparent um den Faktor zwei. Eine interne Lichtquelle beleuchtet die Scheiben und liefert ein Ausleseergebnis, Licht - kein Licht, das als eine Zahl in Greycode ausgegeben wird. Da das benutzte Modell keinen parallelen Datenausgang besitzt, muß noch ein externer Takt an das Gerät angelegt werden. Mit der ersten fallenden Flanke des externen Taktes beginnt die Datenausgabe mit dem MSB(most significant bit). Danach werden die Positionsdaten Bit für Bit mit jeder weiteren fallenden Flanke ausgegeben. Der Abstand zweier Takte innerhalb eines solchen Taktbüschels darf nicht mehr als $30\,\mu s$ betragen, da sonst der Drehgeber in seine Ruhestellung(Niveau 1) geht und die Datenübertragung abbricht. Der Abstand zwischen zwei Taktbüscheln muß größer sein als $20\,\mu s$, da sonst nochmals die bereits übertragene Information wiederholt wird. Sowohl die Daten- als auch die Taktleitung besteht aus zwei getrennten Kanälen DAT, DATB bzw. TKT, TKTB. Dies hat den Sinn, daß jeweils auf der B-Leitung das invertierte Signal übertragen werden kann, um dann nicht das Signal selbst zu messen, sondern immer die Differenz von Signal und dem Invertierten. Durch die Subtraktion fallen Fehler, die in gleichem Maße auf beide Leitungen wirken, heraus. Diese vier Kanäle und zwei Leitungen für die Stromversorgung der Lichtquelle sind alle Anschlüsse, die für den Drehgeber benötigt werden. Die Belegung wird in Tabelle 3 im Anhang dokumentiert.

4.7 Systemansteuerung

Wie bereits erwähnt, erfolgt die Ansteuerung des Schrittmotors und das Auslesen des Drehgebers durch einen Computer. Das benötigte Steuerprogramm ist in C++ programmiert und im Anhang aufgelistet. Die Schnittstelle zum Computer ist eine Swap-Box, die als PCMCIA Steckverbindung das Benutzen einer digitalen Datenerfassungskarte erlaubt. Diese NI-DAQCard ist direkt mit der in Abbildung 10 gezeigten Schaltung verbunden. Mit ihrer Hilfe können die Werte einzelner Pins oder auch ganzer Ports ausgelesen oder verändert werden. Die Verknüpfungen der auf der Karte definierten Ports mit den zu steuernden Geräten ist in Tabelle 4 im Anhang aufgelistet.

Die von dem Hersteller mitgelieferte Software, die ein bequemes Ansteuern der Ports und Pins ermöglicht, erweist sich für die Anforderungen des Systems als zu langsam. Es ist zwar möglich, den Motor damit zu betreiben, aber das Auslesen des Drehgebers kann nicht erfolgen. Der Grund dafür ist, daß der kleinste Pulsabstand, der erzeugt werden kann, größer als $30\,\mu s$ ist. Dies hat zur Folge, daß der Drehgeber nach jedem Puls in seine Ruhestellung geht und nie mit der Datenübertragung beginnt. Da das Benutzen der Karte auch ohne die Software direkt über die Register erfolgen kann, verringert sich der Abstand zwischen zwei Pulsflanken auf ca. $2\,\mu s$. Ein Nachteil dieser direkten Ansteuerung ist jedoch, daß immer alle Pins angesprochen werden müssen. Da aber auf manchen Pins die Signale für den Motor anliegen, und diese beim Auslesen des Drehgebers nicht verändert werden dürfen, ist darauf bei der Programmierung besonders zu achten.

4.8 Wirbelstrombremse

Die Wirbelstrombremse besteht aus einer Bremsscheibe, die bereits näher beschrieben wurde, und einem Elektromagneten mit N Windungen. Der Elektromagnet ist auf einen fast geschlossenen ferromagnetischen Kern der Permeabilität μ und der Länge l aufgewickelt, damit in dem Spalt ein möglichst großes homogenes Magnetfeld herrscht. Der Betrag des Feldes zwischen den Polflächen ist durch

$$B = \frac{\mu_0 N I}{d + \frac{l}{\mu}} \tag{26}$$

gegeben. Dabei ist d die Breite des Spaltes, durch den die Bremsscheibe sich bewegt, und I der Strom, der durch die Spule fließt. Das Feld läßt sich also proportional zum Strom verändern. Damit kann der Wirbelstrom in der Bremsscheibe und somit das Haltedrehmoment der Bremse eingestellt werden. Dieses so gewonnene Drehmoment entspricht einer Reibungskraft, die nur von der Geschwindigkeit abhängt.

5 Test

In den letzten Kapiteln wurde die Grundidee für ein chaotisches Pendel besprochen, der Aufbau des Versuches beschrieben und die theoretisch zu erwartenden Eigenschaften des Systems berechnet. In Bild 11 ist der komplett montierte Versuch zu sehen. Anhand dieses Objektes soll nun überprüft werden, inwieweit das theoretische Verhalten mit dem tatsächlichen übereinstimmt.

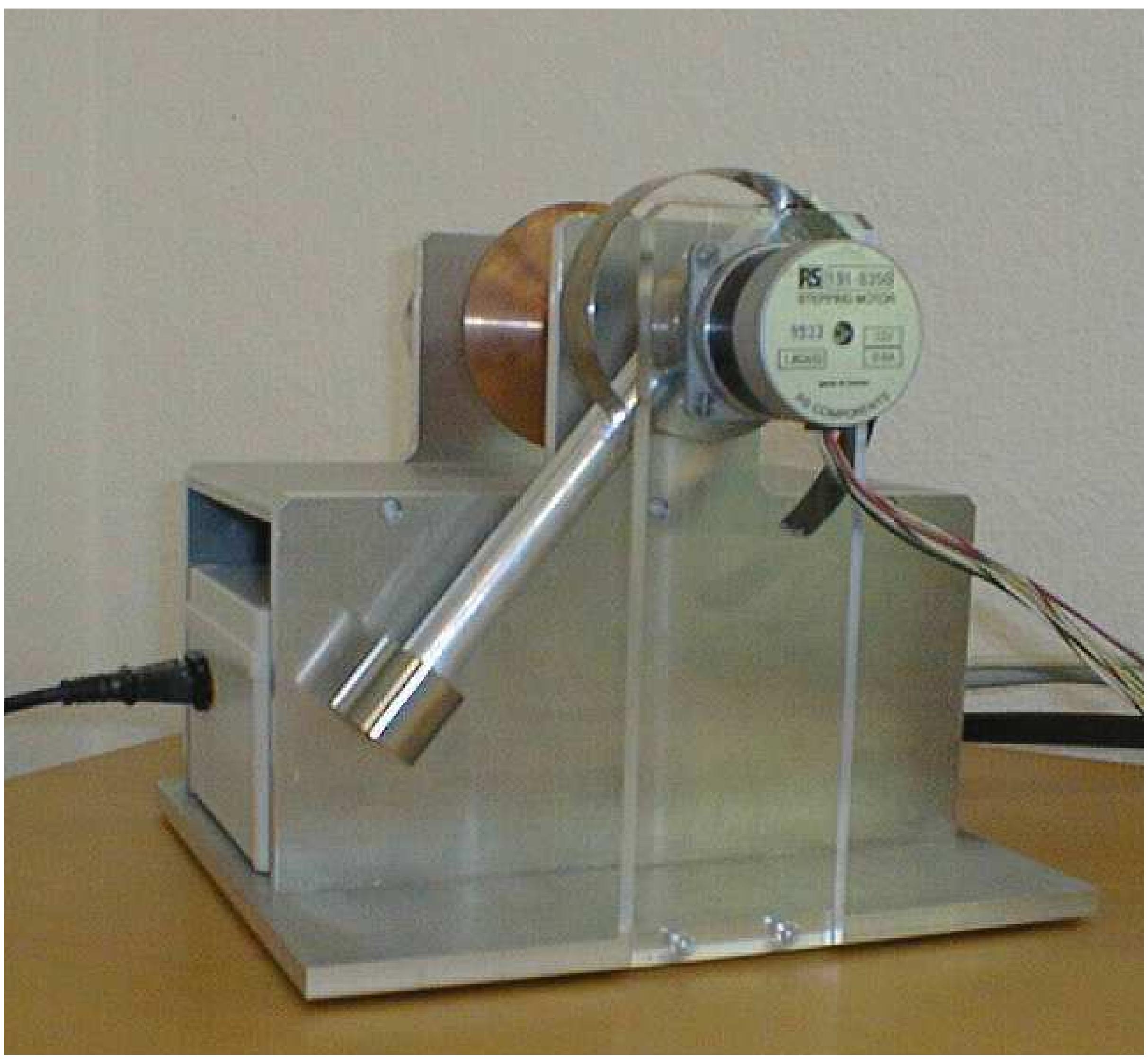

Abbildung 11: Der Versuchsaufbau

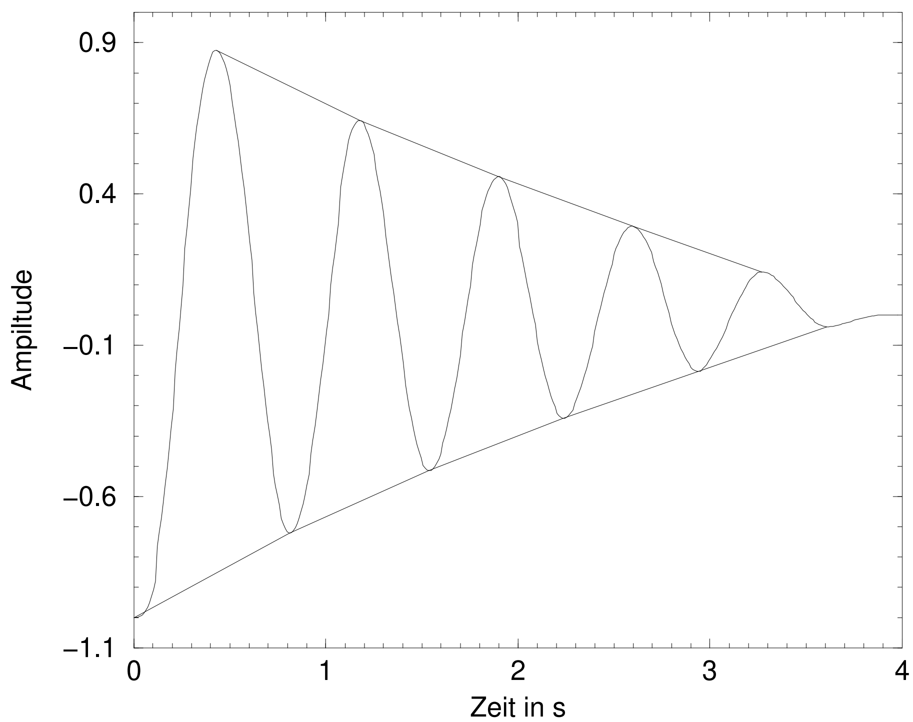

Abbildung 12: Schwingungsverlauf ohne Zusatzgewicht

5.1 Schwingungsdauer des Pendels

Zur Bestimmung der Eigenfrequenz werden zuerst die in Bild 11 zu sehende Feder, die Bremsscheibe und alle Verbindungselemente aus der Anordnung entfernt. Somit wirken auf das Pendel nur die Gravitation als rücktreibendes Drehmoment und die vorhandenen Reibungskräfte. Die zehn Messungen für die verschiedenen Periodenzahlen wurden jeweils mit und ohne Zusatzgewicht durchgeführt. Die mit einer Stoppuhr gemessenen Periodenzeiten und die daraus errechneten Mittelwerte für eine Periode sind in Tabelle 5 im Anhang aufgelistet. Die Tabelle 6 zeigt eine Vergleichsmessung, bei der die Bremsscheibe und Halterungen wieder auf die Achse montiert wurden. Die errechneten Mittelwerte für die Schwingungszeit des Pendels ohne das Zusatzgewicht sind $T_1 = 0,75\,s$, ohne Bremsscheibe, und $T_2 = 0.81\,s$, mit der Bremsscheibe. Für die analogen Zeiten des Pendels mit Zusatzgewicht ergibt sich $T_{Z,1} = 0,88\,s$ und $T_{Z,2} = 0.89\,s$.
Die hier erzielten Schwingungszeiten liegen schon sehr nahe bei den theoretiscehn Werten aus Gleichung 23. Wird aber der Drehgeber wieder in das System integriert, ergibt sich eine wesentlich genauere Methode die Schwingungsdauer des Systems zu bestimmen. Da der Drehgeber mit einer festen Frequenz getaktet ist, liefert er die Positionsdaten in äquidistanten Abständen. Dieser Zeitabstand läßt sich mit Hilfe eines

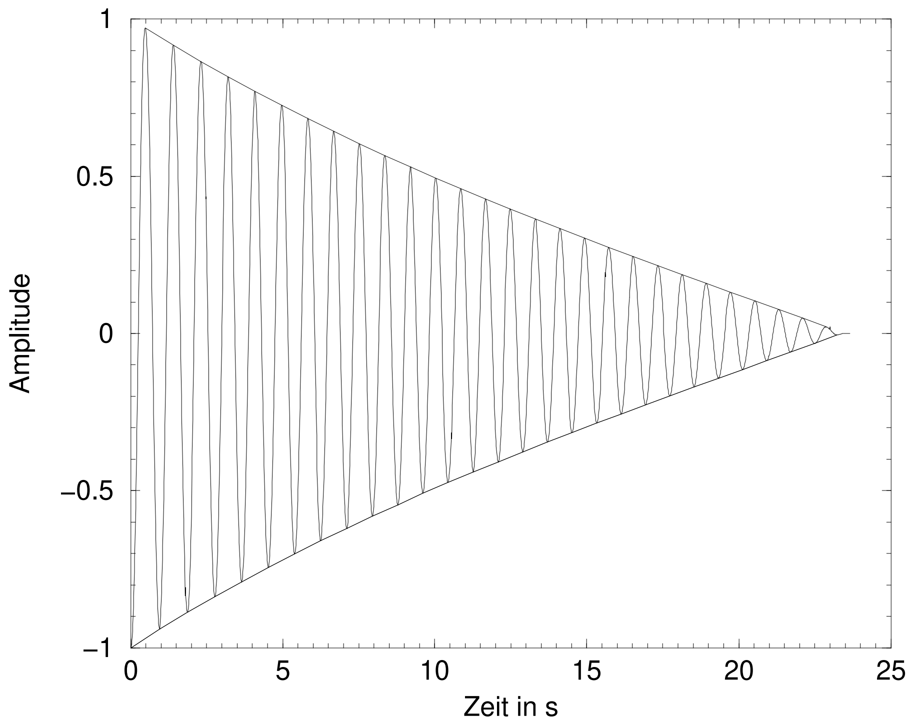

Abbildung 13: Schwingungsverlauf mit Zusatzgewicht

Oszillographen auf den Wert $\tau = (205 \pm 5)\,\mu s$ festlegen. Das Steuerprogramm schreibt die Positionsdaten zusammen mit der laufenden Taktzahl in eine Datei. Durch Umeichen mit Hilfe von τ in Echtzeit, lassen sich die auf eins normierten Positionsdaten über der Zeit abtragen. Die Schaubilder 12 und 13 zeigen das unterschiedliche Schwingverhalten des Pendels ohne und mit dem zusätzlichen Gewicht.

Das Auswerten dieser Messdaten liefert zwei neue Werte der Schwingungsdauer für die unterschiedlichen Massen. Ohne das Zusatzgewicht beträgt $T_D = (0,72 \pm 0,01)\,s$ und mit dem Gewicht $T_{Z,D} = (0,86 \pm 0,01)\,s$. In Tabelle 1 sind alle Messwerte und die Theoriewerte aufgeführt. Die Auflistung, der theoretischen und der experimentell bestimmten Werte in Tabelle 1 läßt erkennen, wie sich die Werte in den verschiedenen Messungen geändert haben. Die experimentellen Werte sollten eigentlich alle über dem theoretischen Wert liegen, da durch die Dämpfungskonstante die Kreisfrequenz der Schwingung verringert wird. In beiden Fällen ist zu erkennen, daß sich der Wert der zweiten Messung, gegenüber dem der ersten, vergrößert hat. Dies ist auch nachvollziehbar, da die zweite Messung mit der montierten Bremsscheibe durchgeführt wurde. Diese vergrößert das Trägheitsmoment des Systems und somit auch die Schwingungsdauer. Die letzte Messung, bei der der Drehgeber zum Auslesen benutzt wurde, sollte,

	ohne Gewicht	**mit Gewicht**
theoretischer Wert	$T_{theo} = 0,76s$	$T_{Z,theo}0,81$
erste Messung	$T_1 = (0,75 \pm 0,02)s$	$T_{Z,1} = (0,88 \pm 0,02)S$
zweite Messung	$T_2 = (0,81 \pm 0,02)s$	$T_{Z,2} = (0,89 \pm 0,02)S$
Drehgeber Messung	$T_D = (0,72 \pm 0,05)s$	$T_{Z,D} = (0,85 \pm 0,06)s$

Tabelle 1: Schwingungszeiten

wenn man davon ausgeht, daß die Reibung dieses optischen Gerätes zu vernachlässigen ist, eigentlich sehr änlich Werte liefern. Da der Computer jede einzelne Schwingungsdauer notiert, ist es bei den Messungen mit dem Drehgeber möglich, die Veränderung der Schwingungszeiten exakt festzustellen. Beträgt eine Periodendauer zu Beginn der Messung, also bei einer Amplitude zwischen 0.9 und 1.0, noch ca. $0.91\,s$, reduziert sich dieser Wert auf $0.79\,s$ nach 25 Schwingungen. Die Werte T_D und $T_{Z,D}$ aus Tabelle 1 sind die Mittelwerte über alle Schwingungszeiten und so lassen sich auch die doch recht großen Fehlergrenzen erklären. Durch das Einbinden des Drehgebers in den Aufbau, entstehen Veränderungen, die sich auch auf die Schwingungszeiten auswirken können. Da die Achse nur auf einem Kugellager gelagert ist und der Drehgeber als zweite Aufhängung benutzt wird, kann seine Hinzunahme eine Verringerung der Reibungseinflüsse bewirken. Dies ist aber nur dann richtig, wenn die Drehgeberachse und die Pendelachse konzentrisch angeordnet sind. Unterscheiden sich die Mittelpunkte der beiden Achsen, werden sie sich gegenseitig verkanten und sich nachteilig auf das Schwingverhalten auswirken.

Eine weitere Veränderung der Periodendauer wird sich einstellen, wenn das Pendel wieder mit der Spiralfeder verbunden wird. Durch das Richtmoment D^o wirkt ein zweites rücktreibendes Drehmoment auf das Pendel. In die Bewegungsgleichung 13 muß noch ein weiterer Term eingefügt werden.

$$\Theta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -b\frac{d\vartheta}{dt} - M\vec{g}\cdot\vec{r}\sin\vartheta - D^o\vartheta \qquad (27)$$

Da die Spiralfeder fest mit der Motorachse verbunden ist, diese sich aber nicht mitbewegen darf, muß der Motor so angesteuert werden, daß er seine Anfangsposition beibehält. Mit dieser Ansteuerung kann gleichzeitig auch eine grobe Überprüfung des Richtmomentes D^o durchgeführt werden. Durch Auslenken des Pendels wird die Feder

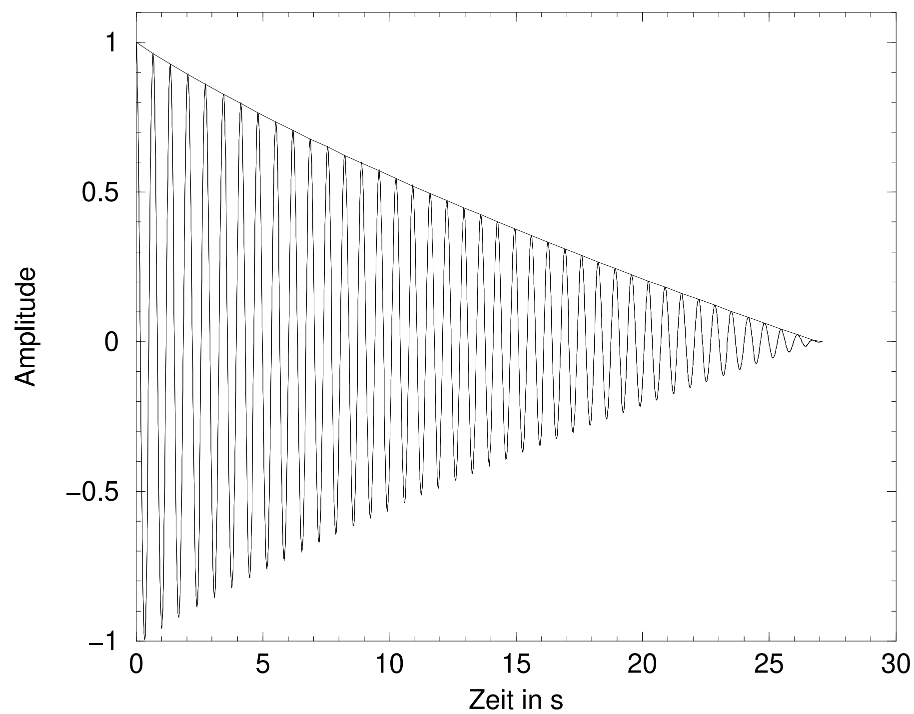

Abbildung 14: Schwingung mit zwei Rückstellmomenten

gespannt und der Motor muß das entstehende Drehmoment kompensieren. Das maximale Haltemoment des Motors beträgt $T_{max.Motor} = 494 \cdot 10^{-3}\, N\, m$. Übersteigt das Drehmoment von der Feder diesen Wert, wird der Motor die Position nicht mehr halten können. Dieser Effekt läßt sich schon bei einer Auslenkung beobachten, die etwas geringer ist als eine viertel Umdrehung. Der theoretische Wert liegt bei $\vartheta = 0.46\,\pi = 83°$.

Der Schwingungsverlauf, der sich nach dem Loslassen des Pendels einstellt, ist in Abbildung 14 zu sehen. Die Periodendauer der Schwingung beträgt am Anfang $0.68\,s$, nach 30 Perioden $0.65\,s$ und ihr Mittelwert errechnet sich zu $T_S = (0.67 \pm 0.03)\,s$. Dieser Wert ist deutlich niedriger als die Werte aus Tabelle 1, was aber durch das große zusätzliche rücktreibende Moment so zu erwarten war.

5.2 Dämpfung

Aus den oben gewonnenen Daten lassen sich nicht nur die Schwingungszeiten des Pendels messen. Der Verlauf der Maxima und Minima liefert die Dämpfung, die in dem System herrscht. In den Bildern 12, 13 und 14 ist schon zu sehen, daß der Abfall der Maxima fast linear verläuft. Ein rein exponentieller Verlauf, wie er näherungsweise beim mathematischen Pendel angenommen wird, ist hier nicht zu erwarten. Eine solche, nur

von der Geschwindigkeit abhängige Reibungskraft, tritt hauptsächlich in Flüssigkeiten oder Gasen auf und wird deshalb auch viskose oder Stokes-Reibung genannt. Für das mathematische Pendel ist die Näherung gültig, da der Luftwiderstand hierbei die dominierende Größe ist. Durch die Wirbelstrombremse kann im späteren Verlauf eine Reibung induziert werden, die auch nur von der Geschwindigkeit abhängt.
Zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten b wird wiederum die Kleinwinkelnäherung $\sin\vartheta \approx \vartheta$ benutzt. Damit lassen sich die Differentialgleichungen 13 und 27 berechnen und nach b auflösen. Es ergeben sich zwei verschiedene Werte:

$$b_{Z,D} = 115.65 \cdot 10^{-3}\, N\, m\, s \tag{28}$$

$$b_S = 154,41 \cdot 10^{-3}\, N\, m\, s \tag{29}$$

Wäre die gesamte Reibung in dem System geschwindigkeitsabhängig, müßten die beiden Werte identisch sein. Es müssen also noch andere Reibungsarten vorhanden sein. Da die Pendelachse über ein Kugellager läuft, ist eine weitere Reibungskomponente durch die Rollreibung gegeben. Diese ist zu der wirkenden Normalkraft proportional. Das durch die Rollreibung induzierte Drehmoment hat den Betrag $T_R = \mu_R F$. Der Proportionalitätsfaktor μ hängt von den Beschaffenheiten der Materialien ab, die aufeinander abrollen. Um diesen bestimmen zu können muß T_R zu den Bewegungsgleichungen 13 und 27 dazu addiert werden. Werden beide Gleichungen nach b aufgelöst und gleichgesetzt, ergibt sich $\mu_R = 0,53\, m$.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Staatsexamensarbeit wurde ein Pendel entworfen und getestet, mit dem die unterschiedlichsten Schwingungen demonstriert werden können.

Eines der größten Probleme, die sich im Laufe dieser Ausarbeitung ergaben, war das Finden einer geeigneten externen Anregung für den schwingenden Körper. Die Schwierigkeit bestand darin, äußere Kraft und Pendel so miteinander zu koppeln, daß ein Übertragen eines Drehmomentes möglich war, das Pendel sich aber trotzdem entgegen der äußeren Anregung bewegen kann. Diese Voraussetzung mußte eingehalten werden, damit ein chaotisches Verhalten überhaupt ermöglicht wurde. Die Lösung, die lange Zeit als ideal angesehene wurde, war die elektromagnetische Anregung. Sie mußte, trotz vieler verschiedener Anordnungsvorschläge, als nicht durchführbar fallen gelassen werden. Der Aufbau, der schließlich verwirklicht wurde, übertrifft den ersten Vorschlag in der Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, wie das Pendel angeregt werden kann. Die Einstellmöglichkeiten bei der elektromagnetischen Anregung beschränkten sich auf Frequenz und Amplitude der Anregung sowie die geschwindigkeitsabhängige Reibung des Systems. Da in der jetzigen Versuchsanordnung ein Computer integriert ist, und dieser das Drehmoment erzeugt, kann dieses in jede beliebige Form gebracht werden. Doch es können auch alle beliebigen Arten von Reibung oder sonstige äußere Einflüsse leicht in die Bewegungsgleichung aufgenommen werden.

Die ersten Tests, die mit der Anordung durchgeführt und dokumentiert wurden, zeigten, daß das beobachtete Verhalten gut mit dem zu erwartenden übereinstimmte. Die Schwingungszeiten sowie das ganze Verhalten des Systems lagen in dem Rahmen, der von der Theorie abgesteckt wurde. Es sind aber auch einige Möglichkeiten aufgefallen, mit denen der bestehende Aufbau optimiert werden könnte. Dadurch, daß erst spät ein zusätzliches Gewicht an dem Pendel befestigt wurde, erwies sich der Schrittmotor in manchen extremen Schwingungsformen als etwas zu schwach. Vorteilhaft wäre es auch gewesen, wenn der Motor eine Wellenverlängerung an seiner Rückseite gehabt hätte. Diese zweite Achse hätte dazu benutzt werden können, den Verlauf der äußern Anregung mit Hilfe eines Zeigers zu verdeutlichen.

Die Fülle von Möglichkeiten, die sich durch die Computeransteuerung ergeben, legen es nahe, daß gerade in dem Bereich der äußeren Anregung, noch einige Verbesserungen durchgeführt werden. Die Ansteuerung kann zum Beispiel so gestaltet werden, daß die Werte für Amplitude, Frequenz und Reibung direkt in einer Benutzeroberfläche eingestellt werden können. So können leicht geringe Veränderungen an den Voraussetzungen durchgeführt werden, und die Effekte sofort beobachtet werden. Auch eine Echtzeitausgabe der gemessenen Daten wäre denkbar. So könnte die zeitliche Entwicklung von dem Auslenkwinkel oder der Winkelgeschwindigkeit dargestellt werden, oder der Poincaré-Schnitt gezeichnet werden. Das Aufzeichnen der Poincaré-Schnitte wäre ein wichtiger Schritt dafür, daß ein chaotisches Verhalten nichtnur ereicht werden kann, sondern, zum Beispiel im Rahmen einer Vorlesung, dieses auch leicht verständlich gemacht werden kann.

7 Anhang

7.1 Belegungstabellen

Motorkabel	grün/w	rot/w	gelb	rot	grün	schwarz/w	gelb/w	schwarz
Kabel	grün/w	braun/w	gelb	rot	grün	grau/w	gelb/w	schwarz
Sub min D	1	2	3	4	5	6	7	9
Platine	1	1	3,4	6,7	9,10	1	1	12,13

Tabelle 2: Motorbelegung

Drehgeber	TAKTB	TAKT	DATAB	DATA	GND	+12 V
Kabel	grün	gelb	grau	rosa	braun	weiss
Sub min D	1	2	3	4	5	9
DAQCard Pin	45	47	29	31	-	-
Kanal	JA 1	JA 0	JB 1	JB 0	-	-

Tabelle 3: Drehgeberbelegung

Kanal	JA 0	JA 1	JA 4	JA 5	JA 6	JA 7	JB 0	JB 1
Pin	47	45	39	37	35	33	31	29
Funktion	TAKT	TAKTB	STEP	CLOCK	DIRECT	PRESET	DATA	DATAB
Gerät	Drehgeber		Motor				Drehgeber	

Tabelle 4: DAQCard Belegung

7.2 C++ Programm

```
#include <stdio.h>
#include <windows.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <nidaq.h>
#include <dos.h>

#define BASE 0x120
extern "C" {__declspec(dllimport) char _stdcall Inp32(int);}
extern "C" {__declspec(dllimport) char _stdcall Out32(int,unsigned char);}

#define DivNum 2           // device Nummer
#define PA (0)             //  Motor     Port Nummer
#define PB (1)             //   drehgeber
#define PC (2)
#define BPA (BASE+0)       //  Motor     Port Nummer
#define BPB (BASE+1)       //   drehgeber
#define BPC (BASE+2)

#define DG_TAKTM  0x01
#define DG_TAKTBM 0x02
#define DG_DATAM  0x01
#define DG_DATABM  0x02

#define M_STEPM  0x10
#define M_CLOCKM  0x20
#define M_DIRECTM 0x40
#define M_PRESETM 0x80

#define DG_TAKT  0
#define DG_TAKTB 1
#define DG_DATA  0
#define DG_DATAB  1
```

```
#define M_STEP  4
#define M_CLOCK  5
#define M_DIRECT 6
#define M_PRESET 7

int pendel_Config(void);
int position_DG(unsigned char);

main()
{
int err;
   FILE *fout;
   err=pendel_Config();
if(err && err !=-10403 ){   //error
    printf("Config error: %d\n",err);
     exit(-1);
   }
   // Datei oeffnen ######################
   char message[150];
   char dateiname[]="c:\\windows\\temp\\p_10hz.txt";
   //sprintf(dateiname,"%s%s%s%04d.txt",dir,path,d_name,d_num);
   if((fout=fopen(dateiname,"w"))==NULL){
      char errout[200]="";
      printf(errout, "Cannot open File! : %s",dateiname);
//MessageBox(errout,GetApplication()->GetName(),MB_ICONEXCLAMATION|MB_OK);
      return false;
    }
   printf(message, "open File! : %s",dateiname);
//MessageBox(message,GetApplication()->GetName(),MB_ICONEXCLAMATION|MB_OK);

  fprintf(fout,"#######    start ########################################\n");
  fprintf(fout,"## Zaehler:     absulute PosPendel:    relativ PosPendel:     \n");
```

```
    // #####################
short def;
   unsigned char mact=M_PRESETM|M_CLOCKM; //actual motor condition
   def=(mact | DG_TAKTM );
   DIG_Out_Port(DivNum,PA,def);

 //test for high performance counter
LARGE_INTEGER lasttime;
LARGE_INTEGER newtime;
LARGE_INTEGER testtime;
LARGE_INTEGER hpcfreq;

   float mspeed=0; //velocity in motorfreq, range -1 to 1
   int mpos=0; //position in steps, start with zero, range +199,-199
   int ppos=0; //pendulum position, start with zero, range +199, -199
   int apos=0; // absulut position of pendel
   int pendelpos=0; //pendulum position, range -4096 +4095
   int renc=position_DG(mact); //first rotational encoder position
   int counter=0;
   float macc=0.1; //maximum acceleration (delta_steps per motorfreq ^2)
   int tact=0;
   if(QueryPerformanceFrequency(&hpcfreq)==false){
    printf("No high performance counter\n",err);
     exit(-1);
   }
   unsigned int motorfreq=5000; //200 Hz
   unsigned int steps=hpcfreq.u.LowPart/motorfreq;
   lasttime.u.HighPart=0;
   lasttime.u.LowPart=0;
   newtime.u.HighPart=0;
   newtime.u.LowPart=0;

while(1){
   while(newtime.u.LowPart-lasttime.u.LowPart <steps)
```

```
       {QueryPerformanceCounter(&newtime);};
   lasttime.u.LowPart=newtime.u.LowPart;
      tact++;
//now we calculate the new values
      //get position
      apos=position_DG(mact);
      ppos=apos-renc;
      counter=counter++;
      if(ppos<-4096)ppos+=8192;
      if(ppos>4095)ppos-=8192;
      pendelpos=ppos;
      ppos=(ppos*400)/-8192;
      //this is a test
//    mspeed=ppos/(float)200;

      mspeed=ppos-mpos;
      mspeed=mspeed+100*sin(8*(double)tact/motorfreq);

      if(mspeed<-200)mspeed+=400;
      if(mspeed>199)mspeed-=400;

      //normalize and limit speed
      mspeed/=10;
      if(mspeed>1)mspeed=1;
      if(mspeed<-1)mspeed=-1;

      //calculate motor steps
      if(mspeed>0){mact|=M_DIRECTM;Out32(BPA,DG_TAKTM|mact);}
      else{mact&=~M_DIRECTM;Out32(BPA,DG_TAKTM|mact);};

      if( (rand()/(float)RAND_MAX)<fabs(mspeed) ){
Out32(BPA,(DG_TAKTM|mact)&~M_CLOCKM);
Out32(BPA,DG_TAKTM|mact);
         if(mspeed>0)mpos++; else mpos--;
```

```
         if(mpos>199)mpos=-200;
         if(mpos<-200)mpos=+199;
      };
      if((100*tact%(motorfreq))==0){
QueryPerformanceCounter(&testtime);
  printf("Speed: %f PosMotor: %d PosPendel: %d RemSteps: %d\n",mspeed,mpos,pendelpos,
          testtime.u.LowPart-lasttime.u.LowPart-steps);
         //fprintf(fout,"Speed: %f PosMotor: %d PosPendel: %d RemSteps: %d\n",mspeed,mpos,pendelpos,
           // testtime.u.LowPart-lasttime.u.LowPart-steps);
         fprintf(fout,"     %d    %d     %d\n",counter,apos,pendelpos);
      }
   }
   fclose(fout);
   return 0;
}

//  configuation of the   IO-card
//  PA as output (no handshake)
//  PB as intput (no handshake) for use of function
//  DIG_Out_Port & DIG_Out_Line.

int pendel_Config() // for no handshake 1mal aufrufen
{
int err;
err=DIG_Prt_Config(DivNum,PA,0,1);  // PA = out no handshake
err=DIG_Prt_Config(DivNum,PB,0,0);  // PB = in no handshake
err=DIG_Prt_Config(DivNum,PC,0,0); // PC = in no handshake
   return err;
}

int position_DG(unsigned char motor)
{
int pos=0, last=0;
short state;
```

```
for (int m=0;m<13;m++){
    Out32(BPA,DG_TAKTBM|motor);
    Out32(BPA,DG_TAKTM|motor);
      pos=(pos<<1)|(last=(Inp32(BPB)&DG_DATAM)^last);
   }
   return pos;
}
```

7.3 Messtabellen

	Periodenzahl									
	ohne Zusatzgewicht:						**mit Zusatzgewicht:**			
	2	**3**	**4**	**5**	**6**		**5**	**10**	**15**	**20**
1	1.46 s	2.27 s	2.96 s	3.79 s	4.40 s		4.43 s	8.89 s	13.09 s	17.24 s
2	1.59 s	2.42 s	3.06 s	3.74 s	4.40 s		4.46 s	8.91 s	13.08 s	17.31 s
3	1.48 s	2.35 s	2.96 s	3.74 s	4.38 s		4.48 s	8.97 s	13.07 s	17.27 s
4	1.53 s	2.29 s	3.03 s	3.73 s	4.47 s		4.51 s	8.87 s	13.08 s	17.25 s
5	1.48 s	2.28 s	3.03 s	3.68 s	4.44 s		4.44 s	8.93 s	13.10 s	17.33 s
6	1.43 s	2.24 s	3.00 s	3.70 s	4.47 s		4.40 s	8.88 s	13.05 s	17.24 s
7	1.43 s	2.33 s	3.13 s	3.68 s	4.48 s		4.52 s	8.82 s	13.26 s	17.39 s
8	1.48 s	2.28 s	3.05 s	3.83 s	4.54 s		4.43 s	8.76 s	13.15 s	17.28 s
9	1.48 s	2.29 s	2.94 s	3.78 s	4.46 s		4.44 s	8.88 s	13.23 s	17.37 s
10	1.45 s	2.28 s	3.03 s	3.70 s	4.45 s		4.43 s	8.86 s	13.15 s	17.23 s
	0.74 s $\pm 0.02\,s$	0.76 s $\pm 0.02\,s$	0.76 s $\pm 0.02\,s$	0.75 s $\pm 0.02\,s$	0.74 s $\pm 0.02\,s$		0.89 s $\pm 0.02\,s$	0.89 s $\pm 0.02\,s$	0.88 s $\pm 0.02\,s$	0.86 s $\pm 0.02\,s$
	$\Rightarrow \mathbf{T_1 = (0,75 \pm 0,02)\,s}$						$\Rightarrow \mathbf{T_{Z,1} = (0,88 \pm 0,02)\,s}$			

Tabelle 5: Erste Messung

	Periodenzahl									
	ohne Zusatzgewicht:						**mit Zusatzgewicht:**			
	2	**3**	**4**	**5**	**6**		**5**	**10**	**15**	**20**
1	1.64 s	2.47 s	3.17 s	4.10 s	4.84 s		4.58 s	8.96 s	13.26 s	17.50 s
2	1.64 s	2.51 s	3.23 s	4.04 s	4.76 s		4.68 s	9.03 s	13.34 s	17.74 s
3	1.61 s	2.52 s	3.24 s	4.03 s	4.83 s		4.45 s	9.06 s	13.33 s	17.82 s
4	1.61 s	2.43 s	3.43 s	4.10 s	4.76 s		4.46 s	8.95 s	13.30 s	17.69 s
5	1.58 s	2.48 s	3.25 s	4.01 s	4.78 s		4.43 s	9.07 s	13.28 s	17.71 s
6	1.63 s	2.53 s	3.20 s	4.08 s	4.77 s		4.44 s	8.96 s	13.29 s	17.93 s
7	1.67 s	2.47 s	3.19 s	4.02 s	4.86 s		4.54 s	9.00 s	13.26 s	17.56 s
8	1.63 s	2.35 s	3.22 s	4.03 s	4.94 s		4.44 s	9.03 s	13.26 s	17.54 s
9	1.59 s	2.47 s	3.25 s	4.06 s	4.78 s		4.44 s	9.04 s	13.24 s	17.67 s
10	1.64 s	2.41 s	3.26 s	4.03 s	4.88 s		4.48 s	8.94 s	13.28 s	17.58 s
	0.81 s $\pm 0.02s$	0.82 s $\pm 0.02s$	0.81 s $\pm 0.02s$	0.81 s $\pm 0.02s$	0.80 s $\pm 0.02s$		0.90 s $\pm 0.02s$	0.90 s $\pm 0.02s$	0.89 s $\pm 0.02s$	0.88 s $\pm 0.02s$
	$\Rightarrow \mathbf{T_2 = (0,81 \pm 0,02)s}$						$\Rightarrow \mathbf{T_{Z,2} = (0,89 \pm 0,02)s}$			

Tabelle 6: Zweite Messung

Literatur

[1] Baker, G.L. and Gollub, J.P.,
Chaotic Dynamics, an introduction, 1990

[2] Elmer, F.-J.,
'The Pendulum Lab'
http://monet.physik.unibas.ch/ elmer/pendulum/index.html, 1998

[3] Gerthsen, C. und Vogel, H.,
'Physik', 17. Auflage, 1993

[4] Gwinn, E.G and Westervelt, R.M.,
'Intermittent chaos and lowfrequency noise in the driven damped pendulum',Phys. Rev. Lett.54, 1985

[5] Nicolet, J.C.
'Pendularia', 1980

[6] Poincaré, H.,
'The foundation of science: science and method', 1913

[7] Smith, R.J.,
'Circuits, Devices and Systems', 1984

[8] Walcher, W.,
'Praktikum der Physik', 1994

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Gelingen meiner Arbeit beigetragen haben, insbesondere:

Herrn Prof. Dr. K. Meier für die Bereitstellung dieses sehr interessanten und vielseitigen Themengebietes. Sein reges Interesse und vorbildliche Betreuung haben wesentlich zum Erfolg beigetragen.

Herrn Dr. J. Schemmel für die sehr kompetente Hilfe bei der Direktansteuerung der NI-DAQCard, für das C++ Programm sowie all die Optimierungsvorschläge,

Herrn A. Breidenassel für ein offenes Ohr bei allen Fragen, eine sehr kritische und sorgfältige Durchsicht des Manuskriptes und viele konstruktive Denkanstöße.

Herrn T. Maucher für seine grenzenlose Geduld bei der Einführung in die CAD-Software Euclid und in die Kunst des Lötens sowie die Beantwortung aller Fragen zu mechanischen Problemen,

den Mitarbeitern des Instituts für Hochenergiephysik für die organisatorische Unterstützung und die Bereitstellung der notwendigen Infrastruktur,

den Mitarbeitern der Elektronikwerkstatt bei der Hilfestellung bei verschiedenen Problemen der Ansteuerelektronik,

den Mitarbeitern der mechanischen Werkstatt für die Fertigung der benötigten Komponenten,

Herrn R. Wagner für eine erste Durchsicht des Manuskriptes und ein offenes Ohr für alle Fragen,

meiner Familie, besonders Isabelle, für die Geduld und die moralische Unterstützung während der gesamten Arbeit.

Ehrenwörtliche Erklärung

"Ich erkläre, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht worden ist."

Heidelberg den Datum

Unterschrift: