RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Marc Layer

Untersuchung der elastischen Eigenschaften von Multikomponentengläsern bei tiefen Temperaturen

Diplomarbeit

HD-KIP 00-23

KIRCHHOFF-INSTITUT FÜR PHYSIK

Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Marc Layer
aus Heidelberg

2000

Untersuchung der elastischen Eigenschaften von Multikomponentengläsern bei tiefen Temperaturen

Die Diplomarbeit wurde ausgeführt von Marc Layer am
Kirchhoff-Institut für Physik
unter der Betreuung von
Herrn Priv.-Doz. Dr. C. Enss

In dieser Arbeit wurden Untersuchungen der Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit der elastischen Eigenschaften von verschiedenen Multikomponentengläsern (BK 7, Fs 21, AF 45) bei tiefen Temperaturen durchgeführt. Für die Experimente wurden mechanische Oszillatoren, sog. Double Paddles, eingesetzt, die sich durch eine reduzierte Untergrunddämpfung und ein vielfältiges Modenspektrum im akustischen Frequenzbereich auszeichnen. Im Vergleich zur Prognose des Tunnelmodells, welches die Tieftemperatureigenschaften von Gläsern phänomenologisch beschreibt, wurden für die innere Reibung bei sehr tiefen Temperaturen deutlich erhöhte Werte gefunden. Sowohl die Temperatur- als auch die Frequenzabhängigkeit weichen systematisch vom Tunnelmodell ab. Zudem ist der resonante Beitrag zur relativen Schallgeschwindigkeitsänderung gegenüber der Tunnelmodellvorhersage reduziert. Die Ursache für diese Beobachtungen liegt vermutlich in der im Tunnelmodell nicht berücksichtigten Wechselwirkung der Tunnelsysteme untereinander, deren Auswirkung mit abnehmender Temperatur immer ausgeprägter wird. Bei etwas höheren Temperaturen zwischen einigen 100 mK und 4 K, wo viele Gläser eine konstante innere Reibung aufweisen, zeigen die hier untersuchten Multikomponentengläser einen deutlichen Abfall mit zunehmender Temperatur. Dies deutet auf eine nichtkonstante Zustandsdichte der Tunnelsysteme hin. Bei Messungen von Schallgeschwindigkeit und Dämpfung in Magnetfeldern bis zu 0,2 T konnte bis auf Wirbelstromeffekte keine signifikante Abhängigkeit der Messgrößen vom äußeren Feld beobachtet werden.

Measurements of the elastic properties of multicomponent glasses at low temperatures

The temperature and magnetic field dependence of the elastic properties of several multicomponent glasses (BK 7, Fs 21, AF 45) has been measured at low temperatures. The mechanical double paddle oscillators used for the experiments allow measurements in the audio frequency range to be performed at different eigenmodes and with very small background loss. Compared with the predictions of the tunneling model, which phenomenologically describes the low temperature properties of glasses, strongly enhanced values of the internal friction Q^{-1} were found. Both temperature and frequency dependence systematically differ from the predictions of the tunneling model. Furthermore the resonant contribution to the change of sound velocity is reduced in comparison with the tunneling model. The most plausible origin of the deviations is the mutual interaction of the tunneling states which is not taken into account in the tunneling model but becomes particularly important at very low temperatures. At temperatures between several 100 mK and about 4 K, where the internal friction of many glasses is independent of temperature, the multicomponent glasses investigated here show a significant decrease of Q^{-1} with increasing temperature. This indicates, that the density of states of the tunneling systems is not constant. Additional measurements of damping and variation of sound velocity in magnetic fields up to about 0.2 T did not show — beside eddy current effects — a significant dependence on the magnetic field.

Inhalt

1 Einleitung **1**

2 Tunnelsysteme in amorphen Festkörpern **3**
2.1 Tieftemperatureigenschaften von Gläsern 3
2.2 Das Tunnelmodell 6
2.2.1 Doppelmuldenpotential 6
2.2.2 Verteilung der Parameter 8
2.2.3 Wechselwirkung mit Phononen 9
2.2.4 Kopplung an elektrische Felder 17
2.3 Erweiterungen des Tunnelmodells 17
2.3.1 Grundlagen 17
2.3.2 Akustische Messungen an Quarzglas 19
2.3.3 Magnetfeldabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten 20

3 Die untersuchten Oszillatoren **23**
3.1 Vibrating Reed 23
3.2 Double Paddle 25
3.3 Probenspezifikation und Herstellung der Oszillatoren 30
3.3.1 Die Borsilikatgläser BK 7 und AF 45 30
3.3.2 Fs 21 31
3.3.3 Amorphes BaO-Al_2O_3-SiO_2 32

4 Experimenteller Aufbau und Messtechnik **33**
4.1 Erzeugung und Messung tiefer Temperaturen 33
4.2 Probenhalter und elektronischer Aufbau 34
4.3 Bestimmung der akustischen Messgrößen 38
4.4 Erzeugung und Bestimmung des Magnetfelds 40
4.5 Experimentelle Probleme 43

5 Experimentelle Ergebnisse: Temperaturabhängigkeit 47
5.1 Messungen an Fs 21 47
5.1.1 Innere Reibung 47
5.1.2 Relative Änderung der Schallgeschwindigkeit 52
5.2 Messungen an BK 7 54
5.2.1 Innere Reibung 54
5.2.2 Relative Änderung der Schallgeschwindigkeit 56
5.3 Zusammenfassende Diskussion und Deutung der Daten 57
5.3.1 Annahme einer vom Tunnelmodell abweichenden Verteilungsfunktion 57
5.3.2 Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen Tunnelsystemen . . 63

6 Experimentelle Ergebnisse: Magnetfeldabhängigkeit 69
6.1 Bestimmung der Messgrößen 70
6.2 Magnetfeldabhängigkeit der Schallgeschwindikgeit 71
6.3 Magnetfeldabhängigkeit der inneren Reibung 75
6.4 Zusammenfassende Betrachtung 77

7 Zusammenfassung 79

Anhang 81

Literaturverzeichnis 83

Danksagung 87

1 Einleitung

Gläser decken schon lange im alltäglichen Gebrauch ein breites Spektrum an Anwendungen ab. In jüngster Zeit erlangt diese Substanzklasse auch bei der Datenkommunikation mittels Glasfaserkabeln eine zunehmende Bedeutung. Trotz der schon Jahrtausende alten Tradition der Glasherstellung war bis zur Mitte dieses Jahrhunderts weitaus weniger über den physikalischen Hintergrund des Glaszustands bekannt als über den der kristallinen Festkörper. In der Physik der kondensierten Materie standen zunächst fast ausschließlich die geordneten Systeme im Mittelpunkt des Interesses. Dies lag sicherlich mit darin begründet, dass Kristalle aufgrund der periodischen Anordnung ihrer Atome theoretisch leichter zugänglich sind. Ein einfaches aber sehr effektives Konzept stellt z. B. die Einführung von Gittervektoren dar. Bei amorphen Systemen hat man hingegen aufgrund der fehlenden Fernordnung nur eine eingeschränkte Strukturinformation zur Verfügung, die eine Rückführung experimenteller Ergebnisse auf mikroskopische Ursachen erschwert.

Lange Zeit war man der Meinung, dass zumindest im Bereich tiefer Temperaturen die Unregelmäßigkeiten in der amorphen Netzstruktur keinen Einfluss auf die hier vorherrschenden langwelligen Phononen haben sollten. Erst zu Beginn der siebziger Jahre wurden systematische Untersuchungen der Eigenschaften von Gläsern bei tiefen Temperaturen durchgeführt. Insbesondere die Ergebnisse der Messungen thermischer Eigenschaften verdeutlichten das qualitativ sehr unterschiedliche Verhalten von amorphen und kristallinen Systemen. Während bei Kristallen eine T^3-Abhängigkeit der spezifischen Wärme und der Wärmeleitfähigkeit gefunden wird, zeigten die Messungen an Gläsern eine spezifische Wärme, die näherungsweise linear, und eine Wärmeleitfähigkeit, die quadratisch mit der Temperatur variiert [Zel71]. Eine weitere Erkenntnis war, dass nicht nur der Temperaturverlauf dieser Eigenschaften, sondern auch ihr Betrag weitgehend „universell“, d.h. unabhängig von der chemischen Zusammensetzung der amorphen Substanz ist [Ste73, Phi84].

Die besonderen physikalischen Eigenschaften dieser Substanzklasse bei tiefen Temperaturen sind auf niederenergetische Anregungszustände zurückzuführen, die eine Folge der irregulären Struktur der Gläser ist. Als erfolgreiches Konzept zur Beschreibung der Tieftemperatureigenschaften hat sich das sog. Tunnelmodell erwiesen. Nach diesem können im amorphen Festkörper Atome oder Atomgruppen lokalisierte Bewegungen zwischen verschiedenen energetisch fast äquivalenten Positionen ausführen. Auch bei tiefen Temperaturen sind Konfigurationsänderungen über Tunnelprozesse durch die Potentialbarriere, welche die Zustände trennt, möglich. Trotz des in den letzten Jahrzehnten stetig weiterentwickelten Verständnisses ist es bis heute nicht gelungen, die mikroskopische Natur der tunnelnden Teilchen eindeutig zu identifizieren.

Zwar spielt im Tunnelmodell die Wechselwirkung dieser Tunnelsysteme mit Phononen die zentrale Rolle, doch bleibt eine Wechselwirkung *zwischen* den Systemen unberücksichtigt. Von experimenteller Seite existieren hingegen klare Hinweise auf die Relevanz der Wechselwirkung von Tunnelsystemen untereinander. Ein Beispiel aus jüngster Zeit ist die im Temperaturbereich unterhalb von 100 mK in den elastischen Eigenschaften von Quarzglas beobachtete systematische Abhängigkeit des Anstiegs der inneren Reibung von der Messfrequenz, die zudem für alle Frequenzen schwächer von der Temperatur abhängt als vom Tunnelmodell vorhergesagt [Cla00]. Ein weiteres Beispiel für ein Verhalten, das nach dem Tunnelmodell nicht erwartet wird, ist die von Strehlow *et al.* [Str00] am Multikomponentenglas BaO-Al_2O_3-SiO_2 gefundene Magnetfeldabhängigkeit der dielektrischen Konstanten bei Temperaturen unterhalb von 100 mK. Für beide Beobachtungen existieren kontrovers diskutierte Modellvorstellungen, in denen die Effekte der Wechselwirkung zwischen den Tunnelsystemen zugeschrieben wird. Gemeinsam ist den Überlegungen, dass für thermische Energien, die kleiner als die typischen Wechselwirkungsenergien sind, die Kopplung der Tunnelsysteme ihre Dynamik ganz entscheidend beeinflusst.

Etliche Fragen bedürfen in diesem Zusammenhang noch weiterer Klärung, etwa: Beobachtet man die in den elastischen Eigenschaften von Quarzglas gefundenen Abweichungen von den Vorhersagen des Tunnelmodells auch in anderen Gläsern? Sind diese Abweichungen ähnlich ausgeprägt? Findet man aufgrund der formalen Analogie zwischen dielektrischer und elastischer Suszeptibilität auch in akustischen Messungen eine Magnetfeldabhängigkeit? Handelt es sich bei dem Verhalten um einen universellen Effekt? Zur Untersuchung dieser Fragestellungen sind Multikomponentengläser geeignet, da man aufgrund ihrer stark polaren Komponenten eine große elektrische Wechselwirkung zwischen den Tunnelsystemen erwartet und die oben beschriebenen Effekte deswegen besonders ausgeprägt sein sollten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden daher systematische Untersuchungen der Temperatur- und Magnetfeldabhängigkeit der elastischen Eigenschaften der Multikomponentengläser Fs 21, BK 7 und AF 45 mit Hilfe von niederfrequenten mechanischen Oszillatoren durchgeführt. Neben der konventionellen Vibrating Reed-Technik kamen in der Mehrzahl der Fälle sog. Double Paddle-Oszillatoren zum Einsatz. Diese zeichnen sich gegenüber den Reeds durch eine reduzierte Untergrunddämpfung aus. Des Weiteren steht beim Paddle ein relativ breites Modenspektrum zur Verfügung, das die Untersuchung der elatischen Größen bzgl. einer Frequenz- und Polarisationsabhängigkeit ermöglicht.

In Kapitel 2 werden zunächst die Annahmen und Voraussagen des Tunnelmodells besprochen sowie einige Erweiterungen desselben vorgestellt. Anschließend werden in Kapitel 3 die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Oszillatorgeometrien und in Kapitel 4 der experimentelle Aufbau zur Durchführung der Messungen beschrieben. Die Darstellung und Diskussion der experimentellen Ergebnisse erfolgt in Kapitel 5 und 6. In Kapitel 7 werden die Resultate noch einmal kurz zusammengefasst und bewertet.

2 Tunnelsysteme in amorphen Festkörpern

2.1 Tieftemperatureigenschaften von Gläsern

Amorphe Festkörper zeichnen sich gegenüber Kristallen durch eine fehlende Fernordnung ihrer Atome aus. Bindungslängen und -winkel variieren, so dass kein wohldefiniertes Gitter existiert. Dies hat Auswirkungen auf die physikalischen Eigenschaften von Gläsern bei tiefen Temperaturen.

Spezifische Wärme

Die spezifische Wärme von dielektrischen Kristallen wird durch das Debye-Modell erfolgreich wiedergegeben. Das Modell beschreibt den Festkörper als elastisches Kontinuum, in dem sich die Phononen mit konstanter Schallgeschwindigkeit ausbreiten. Da bei tiefen Temperaturen die Wellenlängen der dominanten Phononen wesentlich größer als die Strukturunregelmäßigkeiten im Glas sind und die Theorie in ihren Annahmen keinen Bezug auf die gleichmäßige Anordnung der Atome nimmt, sollte sie auch auf diese Substanzklasse übertragbar sein. Allerdings weisen amorphe Festkörper in ihren Eigenschaften bei tiefen Temperaturen fundamentale Unterschiede zu Kristallen auf. Diese Abweichungen, die man auch als „Tieftemperaturanomalien von Gläsern“ bezeichnet, wurden 1971 in den von Zeller und Pohl [Zel71] durchgeführten Messungen der spezifischen Wärme und

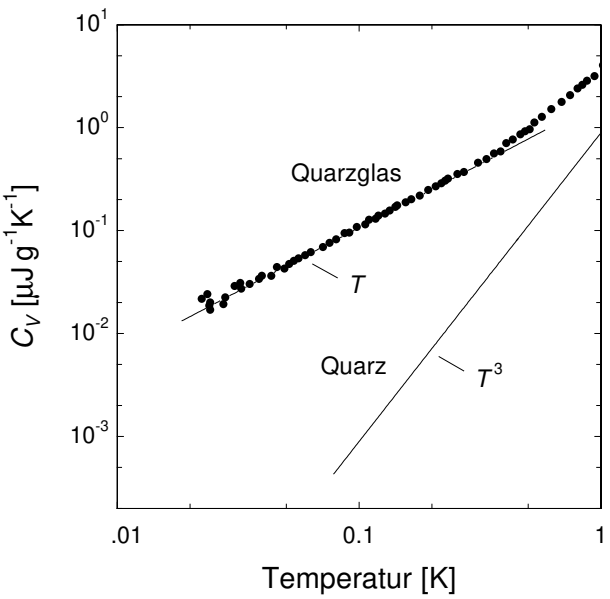


Abb. 2.1: Spezifische Wärme von Quarzglas und kristallinem Quarz als Funktion der Temperatur. Beim Kristall sind die Messwerte nicht eingezeichnet (nach [Hun77]).

Wärmeleitfähigkeit erstmals systematisch untersucht. Abb. 2.1 demonstriert die qualitativen und quantitativen Unterschiede. Während die spezifische Wärme von kristallinem Quarz gemäß der Debye-Theorie proportional zu T^3 verläuft, weicht die von Quarzglas deutlich davon ab. Unterhalb von 1 K erhält man einen in der Temperatur etwa linearen Verlauf der spezifischen Wärme. Des Weiteren sind die Absolutwerte wesentlich größer als erwartet. Bei 25 mK übersteigen die Messwerte die Vorhersage der Debye-Theorie um mehr als drei Größenordnungen. Dies lässt darauf schließen, dass in der amorphen Struktur — im Gegensatz zum kristallinen System — zusätzliche niederenergetische Anregungszustände vorhanden sind.

Wärmeleitfähigkeit

Wie aus den in Abb. 2.2 dargestellten Messungen hervorgeht, unterscheiden sich kristalliner Quarz und Quarzglas auch hinsichtlich der Wärmeleitfähigkeit erheblich. In dielektrischen Kristallen wird die Wärme durch Phononen transportiert. Aufgrund von Gitteranharmonizitäten können die Phononen sich nicht ballistisch ausbreiten, sondern werden in Abhängigkeit von der Temperatur mehr oder weniger gestreut. In Analogie zu diffundierenden Gasmolekülen spricht man auch vom Phononengas, so dass sich für den Wert des Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten aus der kinetischen Gastheorie folgender Ausdruck ergibt:

$$\Lambda = \frac{1}{3}\mathcal{C}vl \tag{2.1}$$

Hierbei sind $\mathcal{C}$ die spezifische Wärme des Phononengases, v die Schallgeschwindigkeit und l die mittlere freie Weglänge der Phononen, die durch den bei der jeweiligen Temperatur

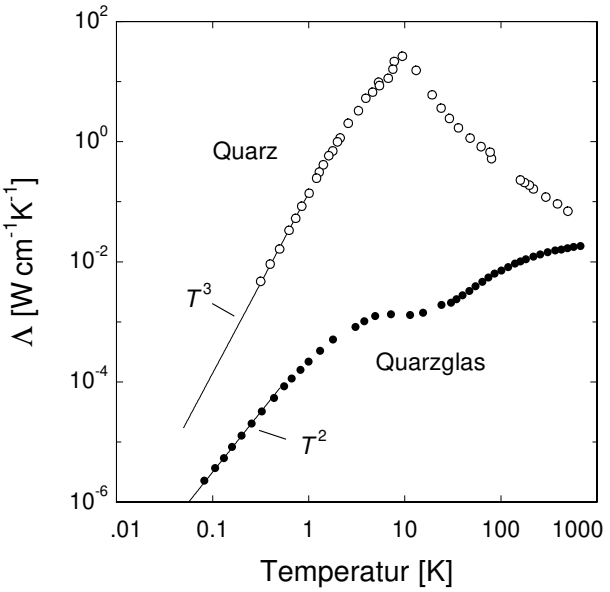


Abb. 2.2: Wärmeleitfähigkeit von kristallinem Quarz und Quarzglas als Funktion der Temperatur (nach [Zel71]).

dominanten Streuprozess bestimmt wird. Mit abnehmender Temperatur durchläuft das Wärmeleitvermögen von Kristallen ein Maximum. Oberhalb des Maximums ist der dominante Streuprozess die Wechselwirkung der Phononen untereinander. Dieser verschwindet mit sinkender Temperatur exponentiell. Unterhalb des Maximums, im sogenannten Casimir-Bereich, ist die freie Weglänge so groß, dass sie durch die Streuung der Phononen an der Probenoberfläche begrenzt wird. Da die Schallgeschwindigkeit in diesem Bereich näherungsweise temperaturunabhängig ist, folgt die Wärmeleitfähigkeit dem durch die Debye-Theorie vorhergesagten Temperaturverlauf der spezifischen Wärme. Der Absolutwert hängt neben der Ausdehnung des Kristalls noch von dessen Oberflächenbeschaffenheit ab.

Ein qualitativ anderes Verhalten zeigt Quarzglas. Von tiefen Temperaturen her kommend steigt die Wärmeleitfähigkeit näherungsweise proportional zu T^2 an, mündet bei etwa 3 K in ein Plateau und steigt oberhalb von 10 K wieder an. Im gesamten Temperaturbereich liegt das Wärmeleitvermögen unterhalb dessen von Quarz — im Casimir-Bereich der kristallinen Probe um zwei bis drei Größenordnungen. Diese Reduktion deutet auf einen zusätzlichen Streumechanismus im amorphen Festkörper hin, der die mittlere freie Weglänge der Phononen begrenzt, so dass der Casimir-Bereich selbst bei sehr tiefen Temperaturen nicht erreicht wird. Die Ergebnisse der Wärmeleitfähigkeitsmessung können verstanden werden, wenn man annimmt, dass es sich bei den zusätzlichen Streumechanismen um lokalisierte niederenergetische Anregungen mit Zwei-Niveau-Charakter und einer breiten Energieverteilung handelt. Eine näherungsweise konstante Zustandsdichte dieser Systeme erklärt sowohl eine zusätzliche spezifische Wärme, die linear in der Temperatur verläuft, als auch das T^2-Verhalten der Wärmeleitfähigkeit [Ens00].

Die in Abb. 2.1 und Abb. 2.2 vorgestellten Messdaten von kristallinem Quarz und Quarzglas sind charakteristisch für beide Substanzklassen. Erwähnenswert ist, dass Gläser bei tiefen Temperaturen ein nahezu universelles Verhalten aufweisen, d. h. dass sie nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ sehr ähnliche Eigenschaften zeigen. Beispielsweise variieren die Absolutwerte der Wärmeleitfähigkeit sowie der spezifischen Wärme von Gläsern unterschiedlicher chemischer Zusammensetzung innerhalb einer Größenordnung (vgl. hierzu [Phi84]).

Ultraschallabsorption

Die Bestätigung, dass es sich bei den niederenergetischen Anregungen um Systeme mit Zwei-Niveau-Charakter handelt, konnte 1972 mittels Ultraschallexperimenten erbracht werden [Hun74]. Abb. 2.3 zeigt die akustische Dämpfung von Borsilikatglas (BK 7) in Abhängigkeit von der eingestrahlten Intensität bei 0,48 K. Mit zunehmender Intensität nimmt die Absorption ab und wird bei großen Intensitäten konstant. Dieses Verhalten lässt sich auf die resonante Wechselwirkung der Zwei-Niveau-Systeme mit den Phononen zurückführen. Die Besetzungszahldifferenz eines Ensembles von Zwei-Niveau-Systemen im

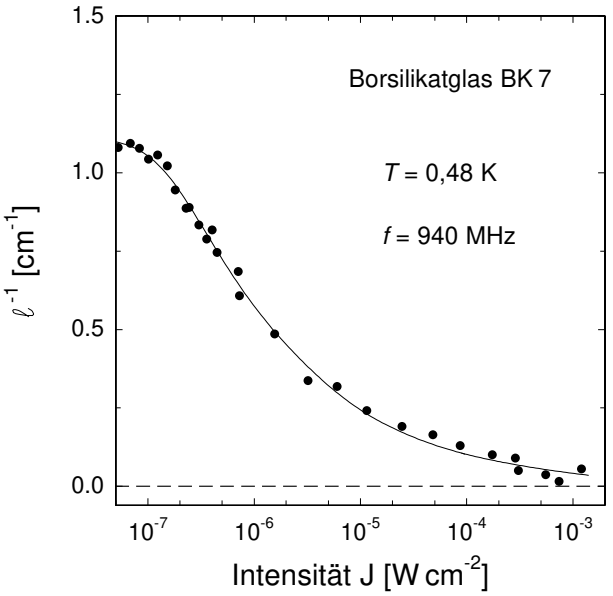


Abb. 2.3: Ultraschalldämpfung von Borsilikatglas (BK 7) als Funktion der eingestrahlten Intensität bei 0,48 K. Die durchgezogene Linie entspricht einer Vorhersage des Tunnelmodells (nach [Hun74]).

thermodynamischen Gleichgewicht ist gegeben durch

$$\Delta n = n \tanh\left(\frac{E}{2k_{\mathrm{B}}T}\right) \ , \tag{2.2}$$

wobei E die Energieaufspaltung der Systeme und n ihre Anzahl bezeichnet. Bei hinreichend kleiner Intensität ist Gl. 2.2 näherungsweise erfüllt, und es sind überwiegend Systeme im Grundzustand vorhanden, d. h. die Ultraschallwelle mit der Frequenz $\omega = E/\hbar$ wird aufgrund von resonanter Absorption gedämpft. Mit zunehmender Intensität werden mehr Zwei-Niveau-Systeme in den angeregten Zustand überführt, so dass die Besetzungszahldifferenz dieses stationären Zustands kleiner als im thermodynamischen Gleichgewicht ist. Bei hinreichend großen Intensitäten wird nahezu eine Gleichbesetzung der Niveaus erreicht, so dass Absorption und stimulierte Emission mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Die Ultraschallabsorption wird dann gesättigt.

2.2 Das Tunnelmodell

2.2.1 Doppelmuldenpotential

Ein Jahr nach den Experimenten von Zeller und Pohl wurde von Anderson *et al.* [And72] und Phillips [Phi72] unabhängig voneinander eine theoretische Beschreibung ausgearbeitet, die in der Lage ist, die meisten beobachteten Tieftemperatureigenschaften von Gläsern auf phänomenologischer Basis quantitativ zu beschreiben. Das sogenannte *Tunnelmodell* beruht auf einfachen Annahmen und enthält als zentrales Konzept die bereits erwähnten Zwei-Niveau-Systeme.

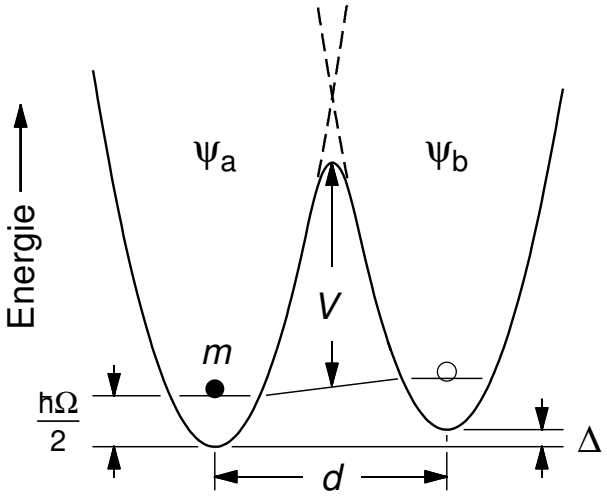


Abb. 2.4: Schematisches Bild des Doppelmuldenpotentials.

Während perfekte Kristalle dadurch ausgezeichnet sind, dass jedes Atom *eine* wohldefinierte Gleichgewichtsposition besitzt, gibt es beliebig viele Möglichkeiten, eine Glasstruktur zu realisieren. Eine der Grundannahmen des Tunnelmodells ist, dass es in der amorphen Netzstruktur zu Konfigurationen von Atomen oder Atomgruppen kommt, die räumlich benachbarte, energetisch nahezu übereinstimmende Gleichgewichtslagen besitzen. Eine solche Konfiguration kann durch ein Doppelmuldenpotential beschrieben werden, wie es in Abb. 2.4 dargestellt ist. Aufgetragen ist die Energie E gegen eine Konfigurationskoordinate d, die z. B. ein Winkel oder ein Abstand sein kann. Das Doppelmuldenpotential wird durch zwei benachbarte harmonische Potentiale gebildet, die durch eine Potentialbarriere V voneinander getrennt sind. Die Minima der Potentiale definieren die Gleichgewichtslagen eines Teilchens der effektiven Masse m, $\hbar\Omega/2$ ist dessen Grundzustandsenergie im jeweiligen Potentialminimum, ψ_a und ψ_b bezeichnen die entsprechenden Grundzustandswellenfunktionen. Die Energieminima können durch eine Asymmetrieenergie Δ voneinander verschieden sein, da auf Grund der in der Regel unterschiedlichen Umgebungen der beiden Gleichgewichtspositionen die Potentialmulden nicht gleich tief sind.

Im Tunnelmodell geht man davon aus, dass die Teilchen bei tiefen Temperaturen aus energetischen Gründen nicht mehr thermisch aktiviert zwischen den Potentialmulden wechseln können, sondern nur noch ein Durchtunneln der Potentialbarriere möglich ist. In erster Näherung nimmt man an, dass die tunnelnden Teilchen nur zwei mögliche Gleichgewichtslagen besitzen, was den Zwei-Niveau-Charakter der Systeme zur Folge hat. Ein *Tunnelsystem* kann somit als Teilchen der Masse m angesehen werden, dessen Dynamik sich in einem Doppelmuldenpotential abspielt, wobei die Frage nach der Natur des tunnelnden Teilchens offen bleibt.

Zur Bestimmung der Grundzustandsenergie der in Abb. 2.4 dargestellten Situation

muss die stationäre Schrödingergleichung

$$H\psi = E\psi \tag{2.3}$$

gelöst werden. Da die tatsächliche Wellenfunktion des Teilchens im Doppelmuldenpotential nicht bekannt ist, benutzt man das Ritzsche Variationsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung des Energieeigenwerts. Unter der Annahme, dass die Grundzustandswellenfunktionen der Einzelmulden ψ_a und ψ_b bekannt sind, lässt sich durch Linearkombination die folgende Ausgangswellenfunktion bilden: $\psi = a\psi_\mathrm{a} + b\psi_\mathrm{b}$. Hierbei sind a und b reelle Parameter. Nach Einsetzen des Ansatzes in Gl. 2.3 folgt ein Ausdruck für die Energie E, den man durch Verändern der Parameter a und b minimiert. Nach geeigneter Wahl des Energienullpunkts erhält man

$$E_\pm = \frac{1}{2}\left(\hbar\Omega \pm \sqrt{\Delta^2 + 4H_\mathrm{ab}^2}\right) \ . \tag{2.4}$$

Die Indizes $\pm$ stehen für die symmetrische bzw. antisymmetrische Linearkombination der Grundzustandswellenfunktionen ψ_a und ψ_b und die hieraus resultierenden Energieeigenwerte. Der unter der Wurzel auftretende Ausdruck H_ab steht für die Wechselwirkungsenergie, die durch den endlichen Überlapp der Wellenfunktionen ψ_a und ψ_b bestimmt wird: $H_\mathrm{ab} = \int \psi_\mathrm{a}^* H \psi_\mathrm{b}\, \mathrm{d}^3x$.

Der Grundzustand spaltet somit auf, und die Energiedifferenz ist gegeben durch

$$E = E_+ - E_- = \sqrt{\Delta^2 + \Delta_0^2}\,, \tag{2.5}$$

d. h. sie setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen, nämlich der Asymmetrie Δ und der Tunnelaufspaltung $\Delta_0 = -2H_\mathrm{ab}$. Die Tunnelaufspaltung lässt sich störungstheoretisch für das gewählte Doppelmuldenpotential mittels der WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin)-Methode berechnen, und man erhält

$$\Delta_0 \simeq \hbar\Omega\, \mathrm{e}^{-\lambda} \ . \tag{2.6}$$

Hierbei ist λ der sogenannte Tunnelparameter, für den sich näherungsweise

$$\lambda \simeq \frac{d}{2\hbar}\sqrt{2mV} \tag{2.7}$$

ergibt. Der Tunnelparameter fasst somit drei der vier charakteristischen Größen des Doppelmuldenpotentials zu einem zusammen.

2.2.2 Verteilung der Parameter

Aufgrund der irregulären Glasstruktur unterscheiden sich die charakteristischen Parameter Δ und λ bzw. Δ und Δ_0 der einzelnen Tunnelsysteme. Eine wesentliche Annahme des

Tunnelmodells besagt, dass die Parameter Δ und λ voneinander unabhängig und ihre Werte näherungsweise gleichverteilt sind. Diese Annahme ist rein phänomenologischer Natur und wird im Nachhinein durch die recht gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen weitestgehend gerechtfertigt. Die sich ergebende Verteilungsfunktion lautet

$$P(\Delta, \lambda)\, d\Delta\, d\lambda = \overline{P}\, d\Delta\, d\lambda \ , \tag{2.8}$$

wobei $\overline{P}$ eine Konstante ist und einen für das betreffende Glas charakteristischen Wert hat. Durch Variablentransformation, d. h. durch Ersetzung von Δ durch E mittels Gl. 2.5 und Einsetzen von Gl. 2.7 erhält man

$$P(E, \lambda)\, dE\, d\lambda = \overline{P} \frac{E}{\sqrt{E^2 - (\hbar\Omega \mathrm{e}^{-\lambda})^2}}\, dE\, d\lambda \ . \tag{2.9}$$

Nach Integration über den Tunnelparameter λ folgt hieraus die Zustandsdichte $D(E)$. Hierbei muss wegen der Divergenz von $P(E, \lambda)$ eine obere Schranke $\lambda_{\max}$ eingeführt werden, die aufgrund der endlichen Zahl der Tunnelsysteme gerechtfertigt ist (aus Wärmekapazitätsmessungen erhält man eine Anzahldichte von 10^{17} bis 10^{18} Tunnelzentren pro cm^3, vgl. hierzu [Ste76]).

$$D(E) = \int_0^{\lambda_{\max}} P(E, \lambda)\, d\lambda = \overline{P} \ln \frac{2E}{\Delta_{0,\min}} \tag{2.10}$$

Hierbei hängt der im Nenner stehende Ausdruck $\Delta_{0,\min}$ über Gl. 2.6 mit dem Abschneideparameter $\lambda_{\max}$ zusammen. Für große Argumente stellt die logarithmische Abhängigkeit der Zustandsdichte von der Energie nur eine schwache Variation dar und kann deswegen in erster Näherung als konstant betrachtet werden. In Abschnitt 2.1 wurde gerade diese konstante Zustandsdichte benötigt, um den linearen Anstieg der Wärmekapazität bzw. den T^2-Verlauf der Wärmeleitung zu erklären.

2.2.3 Wechselwirkung mit Phononen

Nach der Vorstellung der Grundlagen des Tunnelmodells werden im folgenden Abschnitt die Vorhersagen für die im Experiment relevanten Messgrößen im Temperaturbereich unterhalb von 1 K entwickelt. Bei der Darstellung bisher unberücksichtigt blieb die Kopplung der Tunnelsysteme an das durch die Phononen erzeugte elastische Verzerrungsfeld e. Das zeitabhängige Verzerrungsfeld moduliert die Parameter Δ und Δ_0, wobei angenommen wird, dass die Änderungen hinreichend klein sind, um sie in erster Ordnung Störungstheorie zu berücksichtigen. Genauere Überlegungen [Phi84] zeigen, dass man die Änderung in der Tunnelaufspaltung Δ_0 in guter Näherung vernachlässigen kann, d. h. $\delta\Delta \gg \delta\Delta_0$. Das angelegte Störfeld ändert die Umgebung der Tunnelsysteme und damit deren Asymmetrieenergie. Diese erfährt für die betrachteten kleinen Störungen in linearer Näherung eine Modulation um

$$\delta\Delta = 2\gamma e \ , \tag{2.11}$$

wobei γ das sogenannte Deformationspotential ist, welches ein Maß für die Stärke der Kopplung zwischen Tunnelsystemen und Phononen darstellt. Der tensorielle Charakter der beiden Größen bleibt aus Gründen der Übersichtlichkeit hier und im Weiteren unberücksichtigt.

Zur einfacheren Diskussion der Dynamik der Tunnelsysteme geht man zur Matrixdarstellung über. In der Basis der Zustände des jeweils in einer Mulde lokalisierten Teilchens $|\,\psi_\mathrm{a}\rangle$ und $|\,\psi_\mathrm{b}\rangle$ lässt sich für die Ankopplung der Phononen an die Tunnelsysteme der folgende Störhamiltonoperator definieren:

$$H'_\mathrm{s} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma e \ . \tag{2.12}$$

Transformiert man diesen Operator auf die Basis, die sich aus den Linearkombinationen der Grundzustände $|\psi_\mathrm{a}\rangle$ und $|\psi_\mathrm{b}\rangle$ ergibt, so erhält man:

$$H_\mathrm{s} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \Delta & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -\Delta \end{pmatrix} \gamma e \ . \tag{2.13}$$

Die Diagonalterme sind ein Maß für die Änderung der Energieaufspaltung durch die Störung, während die Außerdiagonalelemente zu resonanten Übergängen innerhalb des Zwei-Niveau-Systems führen. In der gewählten Basis nimmt der Hamiltonoperator des ungestörten Problems in Matrixdarstellung die Form

$$H_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

an, wobei E durch Gl. 2.5 gegeben ist.

Um einen Zusammenhang mit den im Experiment gemessenen Größen herzustellen, macht man sich die Analogie der Dynamik der Tunnelsysteme zu Spin 1/2-Teilchen im Magnetfeld zunutze. Es ist leicht nachvollziehbar, dass der Gesamthamiltonoperator des oben geschilderten Systems, $H = H_0 + H_\mathrm{s}$, dem Hamiltonoperator eines Spin 1/2-Teilchens in einem statischen Magnetfeld unter Einstrahlung eines dazu senkrechten Störfelds gleicht. Die Dynamik eines solchen Systems wird durch die Bloch-Gleichungen beschrieben, die sich mitsamt ihrer Lösungen auf die Tunnelsysteme übertragen lassen [Hun76]. Statt der magnetischen Suszeptibilität erhält man im hier betrachteten Fall einen Ausdruck für den komplexen Elastizitätskoeffizienten S, der die elastische Suszeptibilität darstellt. Die Separation der komplexen Größe in Real- und Imaginärteil ergibt, dass der Realteil S' mit der relativen Schallgeschwindigkeitsänderung $\delta v/v$ und der Imaginärteil S'' mit der Dämpfung des Systems, der sogenannten inneren Reibung Q^{-1}, verknüpft ist. Real- und Imaginärteil hängen dabei über die Kramers-Kronig-Relationen zusammen. In den Ausdrücken für $\delta v/v$ und Q^{-1} treten jeweils zwei Beiträge auf, die sich als Resonanz- und Relaxationsterme identifizieren lassen. Auf die Beiträge der einzelnen Prozesse soll im Folgenden näher eingegangen werden.

Relaxationsprozesse

Das von einer Schallwelle begleitete elastische Verzerrungsfeld e moduliert über die Ankopplung an die Asymmetrie Δ die Energieaufspaltung E der Tunnelsysteme. Für deren Änderung ergibt sich bei kleinen Verzerrungen nach Gl. 2.13

$$\delta E = 2\gamma e \frac{\Delta}{E} \ . \tag{2.15}$$

Zur Veranschaulichung der Relaxationsprozesse betrachtet man ein über die Aufspaltung E definiertes Ensemble von Zwei-Niveau-Systemen, das sich bei konstantem Verzerrungsfeld im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Bei Änderung des Verzerrungsfeldes erfolgt eine über Gl. 2.15 gegebene Energieverschiebung, so dass sich die Energieaufspaltung der Tunnelsysteme zu $E + \delta E$ verändert. Die hierdurch hervorgerufene Nichtgleichgewichtsbesetzung führt dazu, dass die Tunnelsysteme durch Absorption und Emission thermischer Phononen versuchen, den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen. Erfolgt die Änderung der Energieaufspaltung durch die Modulation einer Schallwelle, so führt dies zu einer permanenten Variation des augenblicklichen Gleichgewichtswerts. Die Annäherung an den Gleichgewichtszustand erfolgt mit einer für den Prozess charakteristischen Zeitkonstante τ, der Relaxationszeit. Da der Wert der Relaxationszeit τ endlich ist, kommt es zu einer Phasenverschiebung zwischen der wirkenden Kraft (der mechanischen Spannung σ) und der Auslenkung (der elastischen Verzerrung e). Der Zusammenhang zwischen den Größen ist durch den Elastizitätskoeffizienten S, die bereits erwähnte akustische Suszeptibilität, gegeben. Der Wertebereich der Relaxation ist aufgrund der Phasenverschiebung komplex. Man erhält somit den Zusammenhang:

$$e = S\sigma \ . \tag{2.16}$$

Der tensorielle Charakter der drei Größen bleibt hierbei unberücksichtigt. Es ist zu beachten, dass im Folgenden nur der Beitrag der Tunnelsysteme zum Elastizitätskoeffizienten S betrachtet wird.

Für die akustische Suszeptibilität ergibt sich für ein Ensemble von Zwei-Niveau--Systemen mit Energieaufspaltung E nach [Hun76]

$$S = -\frac{4N}{\rho^2 v^4} \left(\gamma \frac{\Delta}{E}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial E} \frac{1}{1 - \mathrm{i}\omega\tau} \ . \tag{2.17}$$

Hierbei ist N die Anzahl der Systeme pro Volumeneinheit, ρ die Massendichte, v die Schallgeschwindigkeit im amorphen Festkörper, ω die Frequenz der äußeren Störung und τ die Relaxationszeit der Tunnelsysteme. Des Weiteren wurde in Gl. 2.17 zur Abkürzung der Ableitung der Besetzungszahldifferenz die Fermi-Dirac-Funktion $f = (\mathrm{e}^{E/k_\mathrm{B}T} + 1)^{-1}$ eingesetzt. Insbesondere zeichnet sich S durch den Ausdruck im Nenner $(1 - \mathrm{i}\omega\tau)$ aus, der ein Debyesches Relaxatorverhalten charakterisiert. Unter Benutzung der Beziehungen

$$\delta v = -1/2 \rho v^3 S' \quad \text{bzw.} \quad Q^{-1} = \alpha \frac{v}{\omega} = \rho v^2 S'' \ , \tag{2.18}$$

wobei $\alpha \equiv l^{-1}$ die Dämpfung bezeichnet, ergeben sich aus Gl. 2.17 die im Experiment bestimmten Größen relative Schallgeschwindigkeitsänderung und innere Reibung zu:

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{2N}{\rho v^2}\left(\gamma\frac{\Delta}{E}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial E}\,\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}\ , \tag{2.19}$$

$$Q^{-1} = -\frac{4N}{\rho v^2}\left(\gamma\frac{\Delta}{E}\right)^2 \frac{\partial f}{\partial E}\,\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\ . \tag{2.20}$$

Die frequenzabhängigen Faktoren in Gl. 2.19 und Gl. 2.20 sind in Abb. 2.5 und Abb. 2.6 veranschaulicht. Charakteristisch für einen Debye-Relaxator ist, dass die maximalen Beiträge der Tunnelsysteme zur Änderung der Schallgeschwindigkeit bei $\omega\tau = 1$ auftreten. Wegen der Abhängigkeit $Q^{-1} \propto (\omega\tau)/(1+(\omega\tau)^2)$ ist der maximale Beitrag zur Dämpfung ebenfalls für $\omega\tau = 1$ gegeben. Systeme mit $\omega\tau \ll 1$ sind aufgrund ihrer im Vergleich zur Verzerrungswelle kurzen Relaxationszeit mit dieser in Phase, hingegen sind Defekte mit $\omega\tau \gg 1$ zu träge, um der Störung zu folgen. In beiden Fällen sind die Zwei-Niveau-Systeme nahe dem thermischen Gleichgewicht, und es findet keine Relaxationsabsorption statt.

Um die Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität aus dem Tunnelmodell ableiten zu können, ist es notwendig, die maßgeblichen Relaxationsprozesse zu kennen. Im Temperaturbereich unterhalb von 1 K, der hier ausschließlich betrachtet werden soll, ist der dominante Prozess der sogenannte Ein-Phonon-Prozess. Bei diesem Prozess wird durch

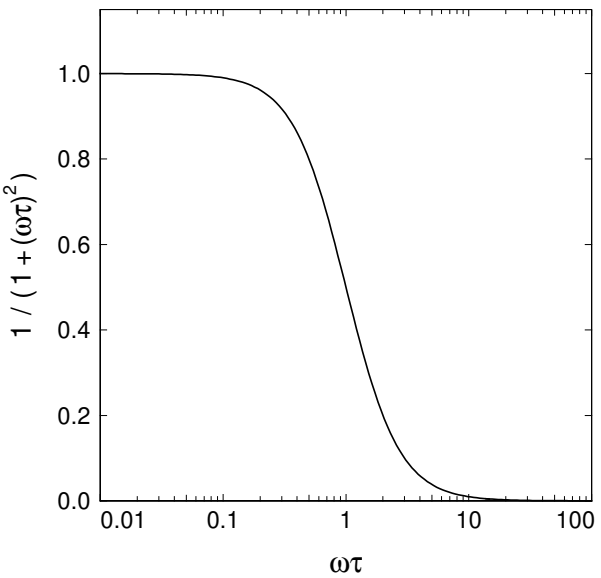


Abb. 2.5: Verlauf des Realteils δv als Funktion des Logarithmus von $\omega\tau$. Bei $\omega\tau = 1$ ist die Änderung der Kurve maximal.

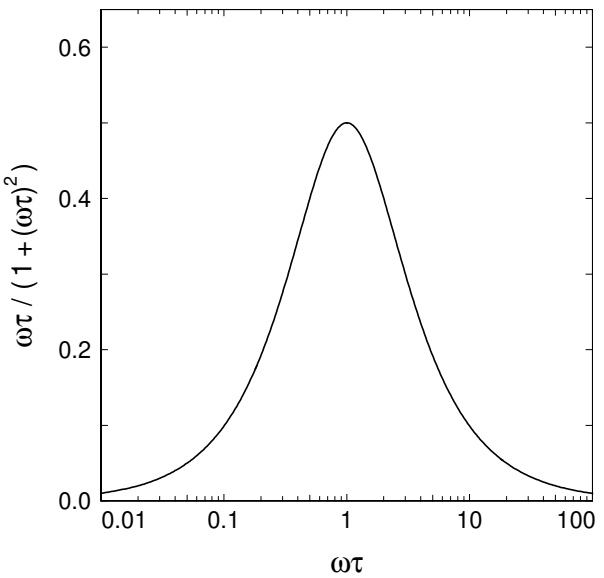


Abb. 2.6: Verlauf des Imaginärteils Q^{-1} als Funktion des Logarithmus von $\omega\tau$. Bei $\omega\tau = 1$ ist die Absorption maximal.

Emission bzw. Absorption eines thermischen Phonons ein Übergang zwischen Grund- und angeregtem Zustand induziert. Dies ist möglich, da in dem gewählten Temperaturbereich die Energie der sog. dominanten Phononen vergleichbar mit der Energieaufspaltung der Tunnelsysteme ist. Die Relaxationsrate des Ein-Phonon-Prozesses, der auch als *direkter Prozess* bezeichnet wird, folgt unter Benutzung von Fermis Goldener Regel [Jac72]

$$\tau_{\mathrm{d}}^{-1} = \frac{1}{2\pi\rho\hbar^4}\left(\frac{\gamma_{\mathrm{l}}^2}{v_{\mathrm{l}}^5} + 2\frac{\gamma_{\mathrm{t}}^2}{v_{\mathrm{t}}^5}\right) E^3 \left(\frac{\Delta_0}{E}\right)^2 \coth\left(\frac{E}{2k_{\mathrm{B}}T}\right) \ . \tag{2.21}$$

Die Indizes l und t stehen für den longitudinalen bzw. transversalen Anteil des Deformationspotentials bzw. der Schallgeschwindigkeit. Die Temperaturabhängigkeit der Relaxationsrate steht im Hyperbelkotangens, der die thermische Besetzung der Phononen widerspiegelt. Der Faktor E^3 setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen, einerseits die nach der Debye-Näherung quadratische Zustandsdichte der Phononen und andererseits das proportionale Verhalten zwischen Energieaufspaltung und Verzerrungsquadrat[1]. Aufgrund des Faktors $(\Delta_0/E)^2$ erkennt man weiterhin, dass Tunnelsysteme mit gleicher Energieaufspaltung E sehr unterschiedliche Relaxationszeiten τ besitzen können, da Δ_0 breit verteilt ist. Eine ausgezeichnete Stellung besitzen die symmetrischen Systeme ($\Delta = 0$), da wegen Gl. 2.5 $\Delta_0 = E$ gilt und sie somit die kürzesten Relaxationszeiten $\tau_{\min}$ aufweisen. Im weiteren Verlauf wird zur Vereinfachung der Schreibweise der Vorfaktor der Ein-Phonon-Relaxationsrate mit A abgekürzt

$$A = \frac{k_{\mathrm{B}}^3}{2\pi\rho\hbar^4}\left(\frac{\gamma_{\mathrm{l}}^2}{v_{\mathrm{l}}^5} + 2\frac{\gamma_{\mathrm{t}}^2}{v_{\mathrm{t}}^5}\right) \ . \tag{2.22}$$

Die zusätzliche Multiplikation mit k_{B}^3 hat den Vorteil, dass man alle Energiewerte in Kelvin ausdrücken kann.

Bei höheren Temperaturen ($T \geq 1\,\mathrm{K}$) gewinnen Mehrphononenprozesse an Bedeutung, deren Relaxationsrate eine stärkere Temperaturabhängigkeit aufweist (vgl. hierzu [Dou80]). Vernachlässigt man diesen Relaxationskanal, so erhält man den relaxatorischen Beitrag der Tunnelsysteme zur inneren Reibung in Gläsern aus Gl. 2.20. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass N durch die Integration über die charakteristischen Parameter Δ und λ der Verteilungsfunktion $P(\Delta, \lambda)$ ersetzt wird. Nach [Hun76] folgt:

$$Q^{-1}\Big|_{\mathrm{rel}} = \frac{\gamma^2}{\rho v^2} \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty P(\Delta,\lambda)\left(\frac{\Delta}{E}\right)^2 \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{E}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2}\,d\Delta\,d\lambda \ . \tag{2.23}$$

Für die Annahme einer konstanten Parameterverteilung $\overline{P}$ und den zuvor betrachteten Ein-Phonon-Prozess lässt sich das Integral im Bereich tiefer Temperaturen für zwei Extremfälle analytisch lösen. Definiert man $T^\star$ als die Temperatur, bei der die Relaxationsrate der *symmetrischen* Systeme so groß ist wie die Frequenz der äußeren Störung, d. h. $\omega\tau_{\min} \simeq 1$, so kann man folgende Aufteilung vornehmen:

[1] Unter der Voraussetzung linearer Dispersion erhält man für die Verzerrung einer ebene Welle $e \propto \sqrt{\omega}$ (für eine einfache Ableitung siehe [FKs96]). Da beim Relaxationsprozess $E = \hbar\omega$ gilt, folgt $E \propto e^2$.

- $T < T^\star$: In diesem Bereich gilt, dass $\omega\tau_{\min} \gg 1$ ist, d. h. die Relaxationsrate der Tunnelsysteme ist klein gegen die äußere Störung, und selbst die schnellsten Tunnelsysteme sind zu langsam, um maximal zur Absorption beitragen zu können. Für die Temperaturabhängigkeit folgt:

$$Q^{-1} \propto C\,\frac{T^3}{\omega} \tag{2.24}$$

  mit der *makroskopischen Kopplungskonstanten*

$$C = \frac{\overline{P}\gamma^2}{\rho v^2}\ , \tag{2.25}$$

  die alle wichtigen Parameter des jeweiligen Glases enthält. Ihr Wert ist somit für die Substanz charakteristisch und ein Maß für die Anzahl der Tunnelsysteme sowie deren Kopplung an die Phononen.
  Anschaulich folgt die Proportionalität zu T^3 in diesem Bereich direkt aus der Relaxationsrate. Berücksichtigt man in Gl. 2.20, dass $\omega\tau \gg 1$ ist, ergibt sich die Beziehung $Q^{-1} \propto \tau^{-1}$. Die schnellsten Tunnelsysteme sind die symmetrischen, d. h. $\Delta_0 = E$ und mit Gl. 2.20 $\tau_{\min}^{-1} \propto E^3$. Die Relaxation erfolgt über thermische Phononen und somit ergibt sich in dominanter Phononennäherung $E \simeq \hbar\omega_{\mathrm{dom}} \simeq k_{\mathrm{B}}T$ die in Gl. 2.24 stehende Temperaturabhängigkeit.

- $T > T^\star$: Hier gilt $\omega\tau_{\min} \ll 1$, und man erhält nach Integration der genäherten Formel Gl. 2.23:

$$Q^{-1} = \frac{\pi}{2}\,C\ . \tag{2.26}$$

  Plausibel wird dieses Ergebnis, wenn man bedenkt, dass in diesem Temperaturbereich immer Tunnelsysteme existieren, die der Bedingung $\omega\tau = 1$ genügen. Man findet somit für jede Frequenz ω Tunnelsysteme, die maximal absorbieren, d. h. die Höhe des Plateaus ist frequenzunabhängig. Außerdem ist die Verteilung der Systeme bezüglich ihrer Energieaufspaltung nach Gl. 2.10 näherungsweise konstant, so dass die innere Reibung temperaturunabhängig wird.

Für die Änderung der Schallgeschwindigkeit ergeben sich durch analoge Vorgehensweise, d. h. Integration von Gl. 2.19 über Δ und λ gewichtet mit der Verteilungsfunktion $P(\Delta, \lambda)$ unter ausschließlicher Berücksichtigung des Ein-Phonon-Prozesses, folgende Voraussagen:

- $T < T^\star$: Der Relaxationsprozess trägt nichts zur Änderung der Schallgeschwindigkeit bei, da die Systeme zu träge sind. Die analytische Betrachtung liefert, dass der Beitrag mit T^6 ausfriert [Hun76].

- $T > T^\star$: Wenn die Bedingung $\omega\tau_{\min} \ll 1$ erfüllt wird, ergibt sich:

$$\left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\mathrm{rel}} = -\frac{3}{2}\,C \ln\left(\frac{T}{T'}\right)\ , \tag{2.27}$$

d. h. einen logarithmischen Abfall der Schallgeschwindigkeitsänderung mit der Temperatur, wobei T' eine Referenztemperatur ist. Der Index steht hierbei für den relaxatorischen Beitrag. Hinzu kommt noch ein resonanter Anteil, der im Folgenden diskutiert werden soll.

Resonante Prozesse

Bei einem resonanten Prozess wechselwirkt ein Tunnelsystem mit einer Energieaufspaltung E mit einem Phonon der Frequenz $\omega = E/\hbar$. Die induzierten Übergänge lassen sich unterteilen in Absorption des Phonons unter gleichzeitigem Übergang des Tunnelsystems vom Grund- in den angeregten Zustand und in stimulierte Emission, d. h. ein durch das Phonon angeregter Übergang vom oberen Niveau in den Grundzustand unter Emission eines zweiten Phonons. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der jeweiligen Prozesse ist durch die Besetzungszahldifferenz Δn zwischen den beiden Niveaus (Gl. 2.2) bestimmt. Für Energieaufspaltungen $E < k_\mathrm{B}T$ sind die Niveaus annähernd gleichbesetzt, und beide Prozesse finden mit gleicher Wahrscheinlichkeit statt. Zur Absorption tragen somit im Wesentlichen nur Tunnelsysteme mit $E > k_\mathrm{B}T$ bei. Die beiden Bedingungen $E = \hbar\omega$ und $E > k_\mathrm{B}T$ zusammen ergeben somit die Forderung zur Beobachtung der resonanten Absorption, dass die Energie der im Experiment verwendeten Schallwellen nicht kleiner sein darf als die mittlere thermische Energie $k_\mathrm{B}T$. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Messfrequenzen bis ca. 20 kHz kann dieser Beitrag vernachlässigt werden, da die oben genannte Bedingung im Rahmen der im Experiment erreichten Temperaturen nie erfüllt wurde. Die tiefste Temperatur lag bei ca. 5 mK, wohingegen zur Erfüllung der Bedingung $\hbar\omega = k_\mathrm{B}T$ eine Temperatur bei einigen μK erforderlich wäre.

Zur Änderung der Schallgeschwindigkeit können hingegen auch Systeme mit $E > \hbar\omega$ beitragen. Für niedrige Frequenzen $\omega \ll \omega_0 = E/\hbar$ ergibt sich [Hun76]

$$\left.\frac{\delta v}{v}\right|_\mathrm{res} = \frac{N\gamma^2}{\rho v^2}\left(\frac{\Delta_0}{E}\right)^2 \frac{1}{E}\tanh\left(\frac{E}{2k_\mathrm{B}T}\right) \ . \tag{2.28}$$

Den gesamten Beitrag zur Änderung der Schallgeschwindigkeit im Glas erhält man durch Ersetzung der Anzahl N durch die Verteilungsfunktion $P(\Delta, \lambda)$ und Integration über die Parameter Δ und λ. Es folgt nach [Dou80]

$$\left.\frac{\delta v}{v}\right|_\mathrm{res} = C\ln\left(\frac{T}{T'}\right) \ , \tag{2.29}$$

d. h. ebenfalls eine logarithmische Variation mit der Temperatur, jedoch im Vergleich zum Relaxationsprozess mit anderem Vorfaktor und umgekehrtem Vorzeichen.

Zusammenfassung der Beiträge

Insgesamt ergibt sich für die Änderung der Schallgeschwindigkeit aus der Summe beider Beiträge:

$$\left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\text{ges}} = \left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\text{res}} + \left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\text{rel}} = -\frac{1}{2}\,C \ln\left(\frac{T}{T'}\right) \quad \text{für} \quad T > T^\star \;, \tag{2.30}$$

sowie gemäß Gl. 2.29 für den Bereich $T < T^\star$. Bei Auftragung von $\delta v/v$ über einer logarithmischen Temperaturskala erwartet man unterhalb von 1 K den in Abb. 2.7 dargestellten Verlauf. Die durchgezogene Linie entspricht einer nummerischen Berechnung nach dem Tunnelmodell. Die Frequenz wurde zu $f = 5\,\text{kHz}$ gewählt, die makroskopische Kopplungskonstante zu $C = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ und der Vorfaktor des Ein-Phonon-Prozesses zu $A = 8 \cdot 10^7\,\text{K}^{-3}\text{s}^{-1}$. Das Steigungsverhältnis des Anstiegs bei tiefen Temperaturen und des Abfalls bei hohen Temperaturen sollte $2 : (-1)$ betragen. Die relative Änderung der Schallgeschwindigkeit weist somit ein Maximum bei $T^\star$ auf, bei der $\omega\tau_{\min} = 1$ erfüllt ist. Ist die Relaxation ausschließlich durch den Ein-Phonon-Prozess bestimmt, so erhält man aus der zugehörigen Relaxationsrate (Gl. 2.21) die Voraussage für die Frequenzabhängigkeit $T^\star \propto \omega^{1/3}$.

Die innere Reibung ist allein durch Relaxationsprozesse bestimmt, und es ergibt sich

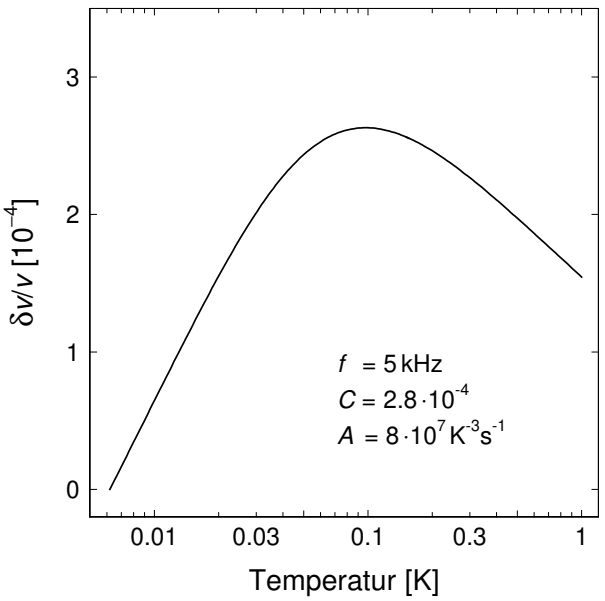


Abb. 2.7: Relative Schallgeschwindigkeitsänderung $\delta v/v$ als Funktion des Logarithmus der Temperatur nach einer nummerischen Berechnung. Die Parameter f, A, C entnimmt man den Schaubildern.

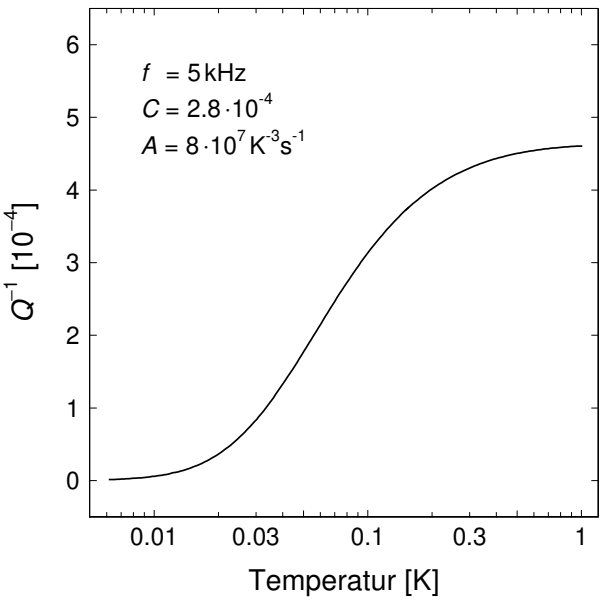


Abb. 2.8: Innere Reibung Q^{-1} als Funktion des Logarithmus der Temperatur nach einer nummerischen Berechnung. Die innere Reibung steigt bei tiefen Temperaturen mit T^3 an und mündet in ein Plateau.

mit Gl. 2.24 und Gl. 2.26 die in Abb. 2.8 gezeigte Temperaturabhängigkeit. Die Kurve ist ebenfalls nummerisch nach den Annahmen des Tunnelmodells berechnet. Hierbei wurden die gleichen Parameter wie bei der relativen Änderung der Schallgeschwindigkeit gewählt. Bei dem Wert des Schallgeschwindigkeitsmaximums $T^\star$ hat die innere Reibung etwa 2/3 ihres Plateauwerts erreicht.

2.2.4 Kopplung an elektrische Felder

Da die Tunnelsysteme i. Allg. ein elektrisches Dipolmoment tragen, koppeln sie auch an elektrische Felder, d. h. die Zwei-Niveau-Systeme können auch mit Photonen in Wechselwirkung treten. Die Ankopplung des äußeren Feldes erfolgt über das permanente elektrische Dipolmoment $\boldsymbol{p}$, so dass der Ausdruck $2\gamma e$, welcher im akustischen Fall die Änderung $\delta\Delta$ der Asymmetrieenergie aufgrund einer elastischen Verzerrung beschreibt, durch $2\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{F}$ ersetzt wird, wobei $\boldsymbol{F}$ die anliegende elektrische Feldstärke ist. Die Ableitung der relevanten Größen erfolgt analog zur obigen Herleitung. Der Schallgeschwindigkeit entspricht die Dielektrizitätskonstante ϵ. Für diese ergeben sich allerdings umgekehrte Vorzeichen im resonanten und relaxatorischen Beitrag, so dass man ein Steigungsverhältnis von $(-2) : 1$ erhält. Zu beachten ist zusätzlich, dass die Steigungen im dielektrischen Fall über die makroskopische Kopplungskonstante

$$C_\mathrm{d} = \frac{2\,\overline{P}|\boldsymbol{p}|^2}{3\,\epsilon_0\epsilon} \tag{2.31}$$

festgelegt sind. Hierbei ist ϵ_0 die elektrische Feldkonstante. Der Verlustwinkel $\tan\delta$ stellt das elektrische Analogon zur inneren Reibung dar, folglich ergibt sich für ihn dieselbe Temperatur- und Frequenzabhängigkeit.

2.3 Erweiterungen des Tunnelmodells

2.3.1 Grundlagen

Nach Abschnitt 2.2 koppeln Tunnelsysteme an das lokal herrschende Verzerrungsfeld e. Umgekehrt erzeugt jedes Zwei-Niveau-System seinerseits ein elastisches Verzerrungsfeld im umgebenden Festkörper. Hierbei hängt die genaue Feldkonfiguration der Verzerrung vom Zustand des Defekts ab. Zwei eng benachbarte Tunnelsysteme spüren somit über das sie umgebende Verzerrungsfeld — oder feldtheoretisch gesprochen über den Austausch virtueller Phononen — die Gegenwart des anderen. Auch im elektrischen Fall, d. h. bei Tunnelsystemen mit einem Dipolmoment, sollte sich die Dipol-Dipol-Wechselwirkung der Systeme bemerkbar machen. Eine einfache Abschätzung lässt erkennen, dass die im Standardtunnelmodell (Abschnitt 2.2) nicht berücksichtigte Wechselwirkung von Tunnelsystemen *untereinander* bei tiefen Temperaturen in Erscheinung treten kann. Die elastische

Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Defekten im Abstand r ist näherungsweise gegeben durch [Buri98]

$$U_{\mathrm{int}} = \frac{\gamma^2}{\rho v^2}\,\frac{1}{r^3}\ . \tag{2.32}$$

Die charakteristischen Abhängigkeiten in Gl. 2.32 ergeben sich durch die Tatsache, dass *zwei* Tunnelsysteme beteiligt sind und somit der Kopplungsfaktor quadratisch auftritt. Außerdem resultiert der r^{-3}-Term aus der Annahme einer für Dipole charakteristischen Abstandsabhängigkeit der Wechselwirkungsenergie. Mit den für Gläsern typischen Werten $\rho = 2{,}5\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, $v = 5000\,\mathrm{ms^{-1}}$ und $\gamma = 1\,\mathrm{eV}$ sowie einem Abstand von $r = 10\,\mathrm{nm}$ ergibt sich aus Gl. 2.32 nach Division durch k_{B} eine in Millikelvin ausgedrückte Wechselwirkungsenergie von 30 mK. Aus der Betrachtung folgt somit, dass der Wechselwirkung der Tunnelsysteme untereinander im Temperaturbereich unterhalb des berechneten Werts eine immer größer werdende Bedeutung zukommt.

Der erste experimentelle Nachweis, dass die Annahme isolierter Tunnelsysteme eine zu starke Einschränkung bedeutet, wurde von Arnold und Hunklinger [Arn75] mit Hilfe von sog. Loch-Brenn-Experimenten erbracht. Bei den an BK 7 durchgeführten Messungen der Ultraschallabsorption wurde ein Ultraschallpuls hoher Intensität und fester Frequenz benutzt, um eine Gleichbesetzung der Tunnelsysteme der entsprechenden Energieaufspaltung und damit eine Sättigung der Absorption zu erzielen. Das in das Absorptionsspektrum gebrannte „Loch“ kann durch Variation der Frequenz eines Testpulses niedriger Intensität vermessen werden. Die Breite dieses Lochs wächst mit der Zeit und der Temperatur an [Arn78]. Zur Erklärung der zeitlichen Verbreiterung schlugen Arnold und Hunklinger [Arn75] das Modell der *spektralen Diffusion* vor, das von Black und Halperin [Bla77] theoretisch untermauert wurde. Zur Veranschaulichung betrachtet man eine Gruppe von Zwei-Niveau-Systemen der Energieaufspaltung E, die sich in Sättigung befinden. Bei einem Übergang eines in der Nähe befindlichen Tunnelsystems in einen anderen Zustand wird sich die Energieaufspaltung der gesättigten Systeme aufgrund der Ankopplung an das Verzerrungsfeld ändern. Dies bewirkt die Verbreiterung des Lochs im Absorptionsspektrum.

Die spektrale Diffusion liefert auch den Erklärungsansatz für den von Graebner und Golding beobachteten Amplitudenabfall kohärenter Phononenechos [Gra79]. Zusätzlich zu dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Ein-Phonon-Prozess führt die elastische Wechselwirkung der Defekte untereinander zu einer Zerstörung der Phasenkohärenz. Somit können die gestörten Tunnelsysteme nicht mehr zum Phononenecho beitragen, und die Amplitude wird verkleinert.

Auch in jüngster Zeit wurden Abweichungen vom Tunnelmodell-Verhalten gefunden, deren Ursprung möglicherweise auf die elastische oder elektrische Wechselwirkung der Tunnelsysteme untereinander zurückgeführt werden kann. Nachfolgend sollen zwei Beispiele vorausgegangener Messungen vorgestellt werden, die in direktem Bezug zu den eigenen Experimenten stehen bzw. diese sogar erst motivierten.

2.3.2 Akustische Messungen an Quarzglas

Betrachtet man die Ergebnisse der akustischen Messungen an Quarzglas im Temperaturbereich unterhalb von 100 mK und vergleicht sie mit den Vorhersagen des Tunnelmodells, so stellt man Abweichungen fest. Exemplarisch werden die in Abschnitt 2.2.3 abgeleitete Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung mit experimentellen Daten von Quarzglas (Suprasil 300) verglichen. Die Messungen wurden mit Hilfe mechanischer Oszillatoren, sogenannter Double Paddle-Oszillatoren, durchgeführt. In Kapitel 3 wird auf diese Technik näher eingegangen.

In Abb. 2.9 aus [Cla00] ist die innere Reibung für fünf Frequenzen als Funktion der Temperatur zwischen 6 mK und 1 K in doppeltlogarithmischer Skala aufgetragen. Oberhalb von 0,3 K mündet die innere Reibung für alle Messfrequenzen gemäß der Vorhersage des Tunnelmodells in ein nahezu frequenz- und temperaturunabhängiges Plateau. Quantitative Unterschiede ergeben sich jedoch bei tieferen Temperaturen. Die innere Reibung aller Frequenzen weicht vom vorhergesagten T^3-Verhalten ab. Eine Analyse der Kurven ergibt, dass der Abfall mit einem Potenzgesetz T^α beschrieben werden kann, wobei α monoton mit der Frequenz ansteigt und zwischen 0,8 und 2,3 variiert. In Abb. 2.9 sind zusätzlich zwei nummerisch berechnete Kurven zu sehen, der Übersichtlichkeit halber nur für die niedrigste (0,33 kHz) und die höchste Messfrequenz (14,0 kHz). In die Berechnungen gehen zwei Fitparameter ein: die makroskopische Kopplungskonstante C, die man aus der gemessenen Plateauhöhe erhält, und der Vorfaktor des Ein-Phonon-Prozesses A (Gl. 2.22), der die Lage des Dämpfungsanstiegs bei tiefen Temperaturen bestimmt. Man erkennt, dass Fit und Datenkurve unterhalb von etwa 30 mK signifikant voneinander abweichen und die Diskrepanz zu tiefen Temperaturen hin größer wird.

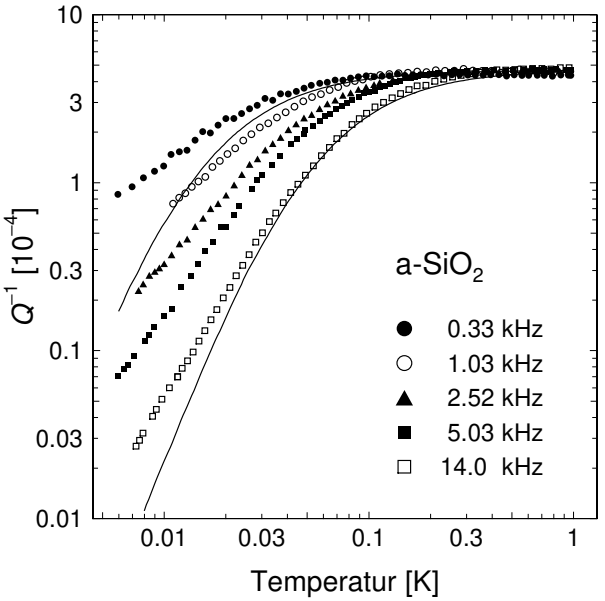


Abb. 2.9: Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung von Quarzglas für fünf Frequenzen. Die durchgezogenen Linien entsprechen Tunnelmodellfits für die Frequenzen 0,33 und 14 kHz (nach [Cla00]).

Auch in der Schallgeschwindigkeit ergeben sich Abweichungen vom Tunnelmodell. Das gemäß Gl. 2.28 und Gl. 2.30 vorhergesagte Steigungsverhältnis von $2 : (-1)$ wird nicht beobachtet. Experimentell ergibt sich, dass die Steigungen unter- und oberhalb des Maximums annähernd gleich sind, also ihr Verhältnis nahe bei $1 : (-1)$ liegt [Cla00].

Ein möglicher Erklärungsansatz für die beobachteten Diskrepanzen bei tiefen Temperaturen ergibt sich aus der im Tunnelmodell nicht berücksichtigten Wechselwirkung der Tunnelsysteme untereinander. Ein von Würger ausgearbeitetes Modell beschreibt die Dynamik substitutioneller Defekte in Alkalihalogenidkristallen [Wue94, Wue97]. Im Rahmen des Modells findet bei hinreichend hohen Defektkonzentrationen ein Übergang vom kohärenten Tunneln isolierter Systeme zum inkohärenten Tunneln wechselwirkender Defekte statt. Inkohärentes Tunneln bedeutet, dass die Tunnelsysteme durch ihren jeweiligen Nachbarn so stark gestört werden, dass mit dem Tunnelprozess ein Verlust der Phaseninformation einhergeht. Eine direkte Folge dieser Inkohärenz ist eine Reduktion der resonanten Prozesse. Außerdem tritt wegen der Wechselwirkung der Systeme ein zusätzlicher Relaxationskanal auf. Eine quantitative Übertragung des Modells auf Gläser ist zwar nicht möglich, jedoch lässt sich das Konzept vermutlich — zumindest bis zu einem gewissen Grad — auf amorphe Festkörper anwenden [Ens97]. Da die resonanten Prozesse aufgrund des inkohärenten Tunnelns reduziert werden, erhält man unterhalb von 100 mK einen flacheren Verlauf in der Schallgeschwindigkeit. Außerdem bewirken die zusätzlichen Relaxationsprozesse einen Dämpfungsbeitrag, so dass die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung bei tiefen Temperaturen schwächer als T^3 wird. Die Vorhersagen des Tunnelmodells für die akustischen Messgrößen werden somit in Richtung der experimentellen Ergebnisse modifiziert. Eine genauere Darstellung des Modells erfolgt in Kapitel 5, in dem Messungen der Temperaturabhängigkeit der elastischen Eigenschaften an verschiedenen Gläsern vorgestellt und diskutiert werden.

2.3.3 Magnetfeldabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten

Gläser sind isotrope Dielektrika, deren Dielektrizitätskonstante unabhängig vom Magnetfeld B sein oder quadratisch mit diesem abnehmen sollte [Ket99]. Tatsächlich wird in der Literatur von Gläsern berichtet, deren Abhängigkeit nur relativ schwach ist. Bei einem Feld von 1 T beträgt die relative Änderung $\delta\epsilon/\epsilon \simeq -10^{-6}$ [Nau83].

In den von Strehlow *et al.* [Str00] am Multikomponenetenglas BaO-Al_2O_3-SiO_2 durchgeführten Messungen wurde überraschend ein abweichendes Verhalten gefunden. Abb. 2.10 zeigt die Änderung der dielektrischen Konstanten in Abhängigkeit des äußeren Magnetfelds im Bereich bis ca. 150 mT in halblogarithmischer Auftragung. Die Messpunkte wurden für sechs unterschiedliche Temperaturen im Bereich von 15 bis 77 mK bei einer Messfrequenz von 1 kHz aufgenommen. Die durchgezogenen Linien dienen lediglich der optischen Führung. Auffällig ist, dass die relative Änderung der Dielektrizitätskonstanten in entgegengesetzter Richtung und von ihrer Quantität weitaus größer als erwartet ausfällt. Die Ausprägung des Effekts nimmt zu tiefen Temperaturen hin zu, und das Ma-

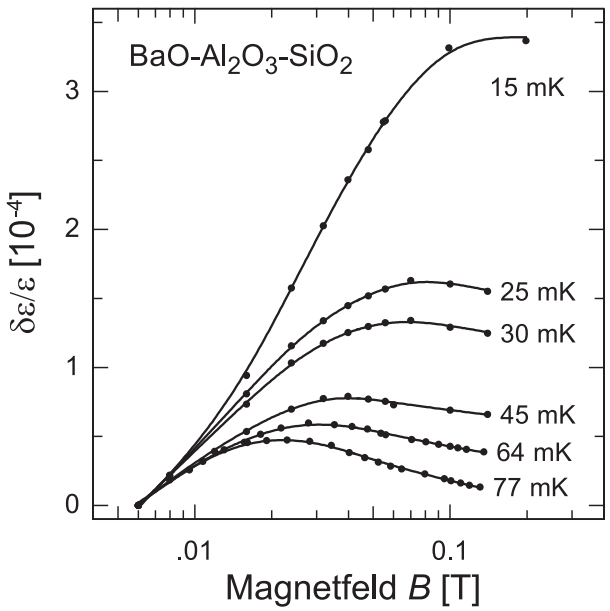


Abb. 2.10: Magnetfeldabhängigkeit der relativen Dielektrizitätskonstanten des Multikomponentenglases $BaO\text{-}Al_2O_3\text{-}SiO_2$ zwischen 15 und 77 mK [Str00].

ximum verschiebt sich zu größeren Magnetfeldern. Desweiteren ist zu erkennen, dass die Änderung nicht monoton verläuft. In [Str00] wird für die Messung bei $T = 64\,\mathrm{mK}$ gezeigt, dass die Änderung der Dielektrizitätskonstanten bei größeren Magnetfeldern sogar oszillatorischen Charakter aufweist.

Zur Erklärung dieser Effekte schlugen Kettemann *et al.* ein verallgemeinertes Tunnelmodell vor [Ket99]. In diesem wird das in Abschnitt 2.2 vorgestellte Doppelmuldenpotential auf drei Dimensionen erweitert, so dass die Bewegung des tunnelnden Teilchens eine endliche Fläche einschließt. Da das Tunnelsystem eine elektrische Ladung trägt, kann es wie ein diamagnetischer Defekt reagieren und direkt an das äußere Magnetfeld koppeln. Aus der Lösung der Schrödingergleichung dieses Einteilchenproblems folgen Energieeigenwerte, die einen oszillatorischen Charakter im magnetischen Fluss ϕ, welcher die Teilchenbahn durchsetzt, aufweisen. Die Oszillationsperiode ist durch $\phi_0 = h/\mathcal{Q}$ festgelegt, wobei $\mathcal{Q}$ die Ladung bezeichnet. Die Anwendung der Tunnelmodelldynamik mit dieser Energieaufspaltung ergibt konsequenterweise eine Magnetfeldabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante $\epsilon(\phi(B))$, auf die sich das oszillatorische Verhalten überträgt. Allerdings verlangt die Größe der beobachteten Oszillationsperiode zusätzlich die Annahme einer makroskopischen Anzahl ($\mathcal{Q} \simeq 10^5|e|$) von stark gekoppelten Tunnelsystemen. Diese Cluster von Defektsystemen bewirken aufgrund ihrer kohärenten Bewegung eine Verstärkung der Kopplung an das äußere Feld. Außerdem wird verständlich, dass die Magnetfeldabhängigkeit erst bei Temperaturen unterhalb von 100 mK auftritt. Erst in diesem Temperaturbereich ist die Wechselwirkungsenergie der Tunnelsysteme vergleichbar mit der typischen Energieskala der Phononen.

Es erscheint aufgrund der Analogien in den Voraussagen des Standardtunnelmodells

(vgl. Abschnitt 2.2) lohnenswert, zu untersuchen, ob dieses erweiterte Modell auch auf die elastischen Eigenschaften von Gläsern übertragbar ist. Die Messung der Schallgeschwindigkeitsänderung und der inneren Reibung von verschiedenen Gläsern im äußeren Magnetfeld wird in Kapitel 6 vorgestellt.

3 Die untersuchten Oszillatoren

Bei niederfrequenten akustischen Messungen erzeugt man Schallwellen durch Anregung von Eigenschwingungen der Probe. Die Resonanzfrequenz der Probe — und somit die Messfrequenz — ist durch deren geometrische Ausmaße festgelegt. Gegenstand des folgenden Kapitels werden die in den Experimenten untersuchten Oszillatoren sein. Im ersten Abschnitt wird zunächst der einfachste mechanische Oszillator, ein einseitig eingespanntes Plättchen (*Vibrating Reed*), beschrieben. Anschließend wird auf die im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich verwendete *Double Paddle*-Geometrie eingegangen. Im letzten Abschnitt werden die untersuchten Gläser hinsichtlich ihrer chemischen Zusammensetzung charakterisiert und die verschiedenen Herstellungsprozesse der Oszillatoren kurz beschrieben.

3.1 Vibrating Reed

Ein weit verbreiteter mechanischer Oszillator ist das Vibrating Reed. Abb. 3.1 zeigt schematisch die Anordnung eines Vibrating Reed-Experiments. Ein dünnes Plättchen wird an einem Ende in eine Halterung gespannt und an seinem freien Ende zu Biegeschwingungen angeregt. Das Messprinzip und der elektronische Aufbau, welche für Vibrating Reed- und Double Paddle-Messungen gleich sind, werden in Kapitel 4 dargestellt.

Die Bewegungsgleichung eines einseitig eingespannten Plättchens wird in [Kin62, Sku54, Cou53] über die hierbei auftretenden Kräfte aufgestellt und die Lösung der Differentialgleichung diskutiert. Auf die Herleitung soll an dieser Stelle verzichtet werden. Man erhält

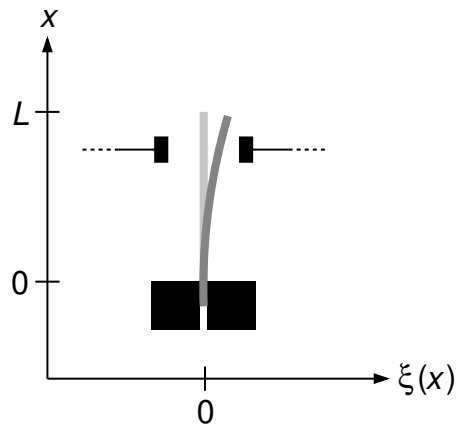


Abb. 3.1: Schematische Darstellung eines Vibrating Reed-Aufbaus. Zu sehen ist das Plättchen in Ruhe und im ausgelenkten Zustand. Die Auslenkung der Probe als Funktion des Abstands von der Einspannung ist mit $\xi(x)$ bezeichnet. Des Weiteren sind die zur Anregung und Detektion benötigten Elektroden angedeutet.

für die Resonanzfrequenzen folgende Abhängigkeit:

$$f_n = \alpha_n (2n+1)^2 \frac{\pi}{16\sqrt{3}} \frac{d}{L^2} v_\mathrm{Y} \ . \tag{3.1}$$

Hierbei sind die nummerisch bestimmten Werte für die Modenkonstante α_n:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1{,}424987 \\ \alpha_1 &= 0{,}992249 \\ \alpha_2 &= 1{,}000198 \\ \alpha_3 &= 0{,}999994 \\ \alpha_n &\simeq 1 \quad \text{für} \quad n \geq 4 \ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Geschwindigkeit v_Y ist über das Verhältnis aus Youngschem Elastizitätsmodul und Massendichte definiert

$$v_\mathrm{Y} \equiv \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \ . \tag{3.3}$$

Zusätzlich gehen in Gl. 3.1 zur Berechnung der Resonanzfrequenz die Länge L und die Dicke d des Plättchens ein. Für typische Dimensionen des Reeds von 5 – 15 mm Länge, 2 – 3 mm Breite und einigen 100 μm Dicke, sowie einer Schallgeschwindigkeit von einigen $10^3\,\mathrm{ms}^{-1}$ erhält man Frequenzen für die Grundmode, die im Bereich zwischen 100 Hz und 20 kHz liegen. Bemerkenswert ist, dass die Frequenzen der Oberschwingungen keine ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz sind. Für die erste Oberschwingung ergibt sich z. B. $f_1/f_0 \approx 6{,}27$, für die zweite gilt $f_2/f_0 \approx 17{,}55$.

Die bei dem dünnen Plättchen auftretende Biegeschwingung enthält sowohl transversale als auch longitudinale Verzerrungskomponenten. Nach [Rab86] gilt für die Schallgeschwindigkeitsänderung

$$\frac{\delta v_\mathrm{Y}}{v_\mathrm{Y}} = \frac{\delta v_\mathrm{t}}{v_\mathrm{t}} \, \mathrm{g}(\sigma) + \frac{\delta v_\mathrm{l}}{v_\mathrm{l}} \, (1 - \mathrm{g}(\sigma)) \ , \tag{3.4}$$

bzw. für die innere Reibung

$$Q^{-1} = Q_\mathrm{t}^{-1} \, \mathrm{g}(\sigma) + Q_\mathrm{l}^{-1} \, (1 - \mathrm{g}(\sigma)) \ , \tag{3.5}$$

wobei der jeweilige Anteil über die Poissonzahl σ gemäß

$$\mathrm{g}(\sigma) = \left(\frac{4\sigma - 2\sigma^2}{1+\sigma} \right) \tag{3.6}$$

gegeben ist. Für das in Abschnitt 3.3 näher spezifizierte Glas BK 7 beträgt die Poissonzahl $\sigma = 0{,}206$, so dass die Transversalkomponente mit 61 % etwas stärker eingeht als die Longitudinalkomponente mit 39 %.

Der wesentliche Vorteil der Vibrating Reed-Methode liegt in der einfachen Geometrie der Proben und deren unkomplizierter Herstellung begründet. Durch mechanische Bearbeitung kann man aus einer Vielzahl von Materialien geeignete Proben herstellen. Außer bei Gläsern wird die Technik zur Untersuchung elastischer Eigenschaften auch bei Kristallen und metallischen Proben eingesetzt. Die Auswahl unterschiedlicher Kristallschnitte erlaubt die Untersuchung der Anisotropie der Messgrößen. Allerdings weist die Methode auch Nachteile auf. Oftmals kann beim Vibrating Reed nur eine Mode gemessen werden, da die Auslenkungen der Oberschwingungen zu klein und somit kaum detektierbar sind. Außerdem tritt die maximale Verzerrung an der Einspannungsstelle auf. Dies führt dazu, dass dort ein Großteil der elastischen Energie lokalisiert ist. Ein Teil der Schwingungsenergie kann in den Probenhalter dissipiert werden und zu einem zusätzlichen Beitrag der Dämpfung des Oszillators führen. Da die Verlustmechanismen im Detail nicht bekannt sind, kann die Größe dieses Beitrags nur schwer abgeschätzt werden, scheint aber typischerweise von der Größenordnung $Q^{-1} \simeq 10^{-5}$ zu sein.

3.2 Double Paddle

Das *Double Paddle* ist ein im Vergleich zum Vibrating Reed weiterentwickelter Oszillator, der ebenfalls zur Untersuchung von akustischen Eigenschaften benutzt werden kann. Die prinzipielle Geometrie dieses Oszillators wurde von Kleiman *et al.* [Kle87] entwickelt und von Pohl *et al.* [Hes96, Whi95a] weiter verbessert.

Abb. 3.2 zeigt den Umriss des Paddles. Der Oszillator ist aus trägen und Torsionselementen aufgebaut, denen zur einfacheren Darstellung anschauliche Bezeichnungen zuge-

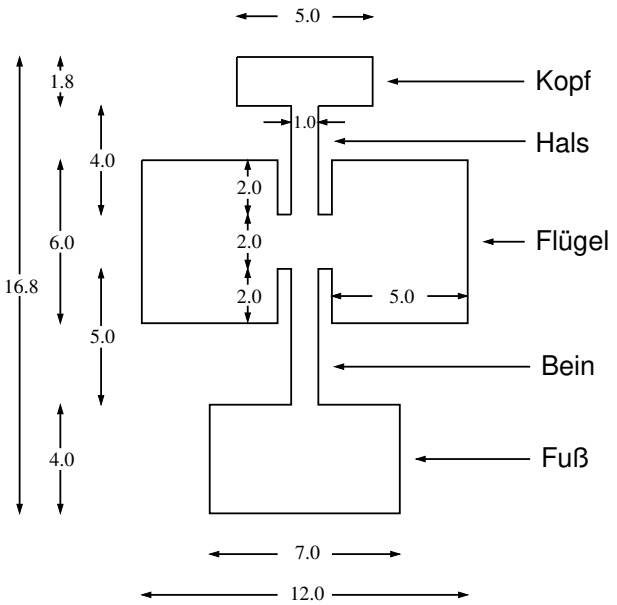


Abb. 3.2: Geometrie der untersuchten *Double Paddles* mit den üblichen Bezeichnungen. Alle Bemaßungen in mm.

ordnet wurden. Der Fuß des Paddles wird in den Probenhalter eingespannt (vgl. Abb. 4.1). Er ist über ein Torsionselement, das Bein, mit den Flügeln verbunden. Über ein weiteres Torsionselement, den Hals, gelangt man zum Kopf, welcher wie die Flügel ein träges Element darstellt. Anhand des im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Glases BK 7 soll exemplarisch das Schwingungsverhalten des Paddles vorgestellt werden.

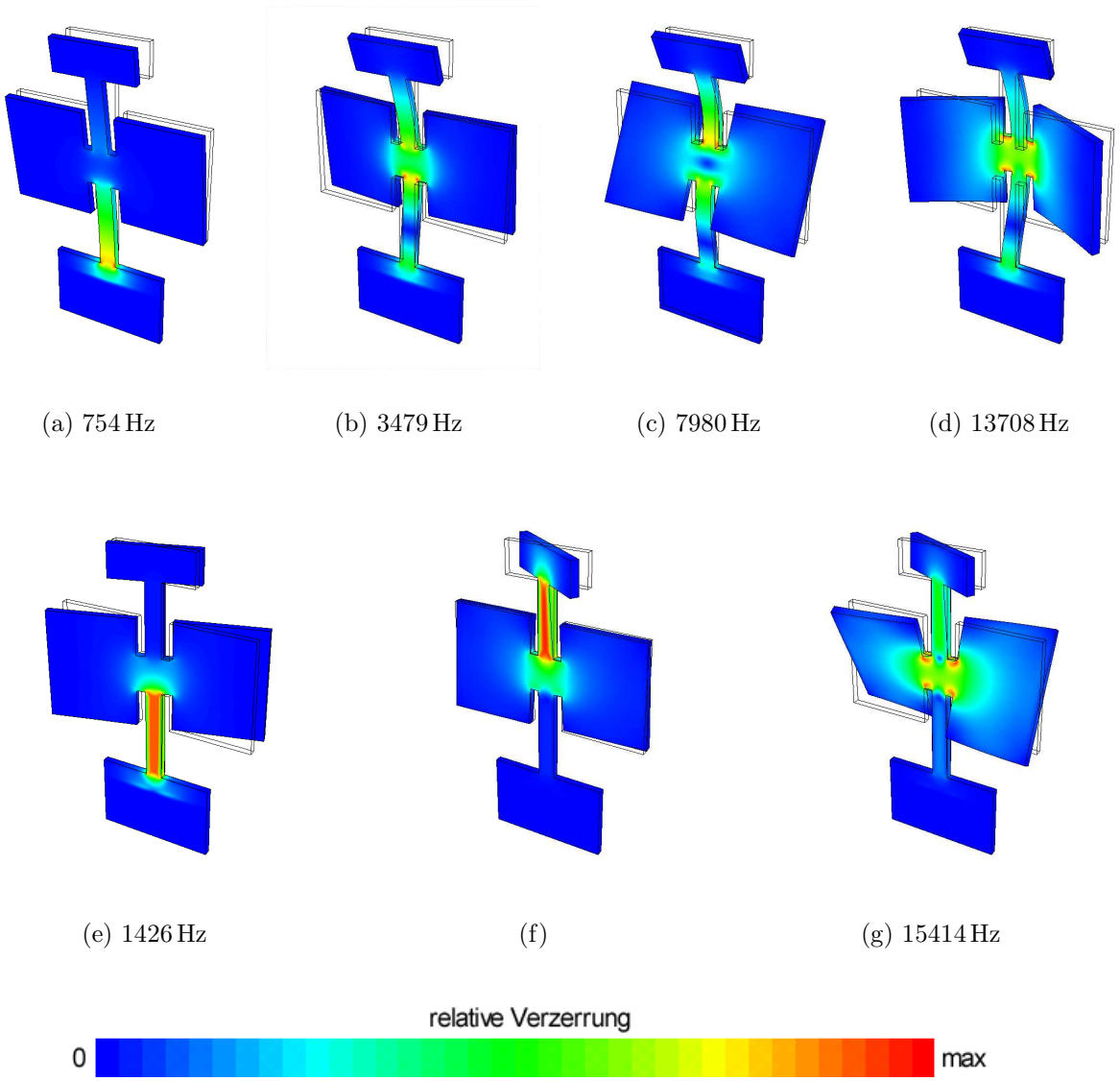
Aufgrund der komplizierten Geometrie existiert beim Double Paddle eine Vielzahl von Moden. Bei der weiteren Diskussion werden nur die mit dem in Kapitel 4 vorgestellten experimentellen Aufbau beobachtbaren Moden betrachtet. Unberücksichtigt bleiben Schwingungsformen, die innerhalb der Ebene des Paddles liegen, da diese aufgrund der verwendeten experimentellen Anordnung weder angeregt noch detektiert werden können. Mit Hilfe von Finite-Elemente-Simulationen lassen sich unter Vorgabe der elastischen Konstanten, der Dichte, sowie der Randbedingung an der Einspannungsstelle die Resonanzfrequenzen, die Auslenkungen und die dabei auftretenden Verzerrungen der einzelnen Moden berechnen [Hei00]. Die in die Berechnungen eingehenden elastischen Konstanten können im Anhang eingesehen werden. Das Spektrum der im Folgenden diskutierten Schwingungen bis 20 kHz ist in Abb. 3.3 dargestellt. Neben den Biegemoden (obere Reihe), die schon bei der Behandlung des Vibrating Reeds in Abschnitt 3.1 auftraten, existieren beim Paddle auch Torsionsmoden (untere Reihe), bei denen der Hals bzw. das Bein verdrillt werden. Die Einteilung in Biege- (die Flügel schwingen gleichphasig) und Torsionsschwingungen (die Flügel schwingen gegenphasig) kann experimentell über die Phasenbeziehung von Anregungs- und Detektionssignal vorgenommen werden (vgl. hierzu Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.3). Jedes Bild ist so aufgebaut, dass die Kontur des Paddles in Ruhe und farbig gefüllt im Zustand maximaler Auslenkung zu sehen ist. Die hierbei auftretenden relativen Verzerrungen sind der unteren Skala zu entnehmen. Die

f_{res} [Hz]			Mode	
exp.	finite El.	$f_{\mathrm{theo}}/f_{\mathrm{exp}}$	Typ	Bezeichnung
754	879	1,165	B	Grundschwingung
1426	1580	1,108	T	symmetrische Torsionsmode
3479	3950	1,135	B	1. Biege-Oberschwingung
7980	8588	1,076	B	2. Biege-Oberschwingung
	11470		T	antisymmetrische Torsionsmode
13708	12495	0,912	B	
15414	13752	0,892	T	

Tabelle 3.1: Bei tiefen Temperaturen im Bereich 100 Hz – 20 kHz beobachtete Resonanzfrequenzen. In der zweiten Spalte sind die für Raumtemperatur berechneten Frequenzen der Finite-Elemente-Simulationen [Hei00] und in der dritten Spalte das Verhältnis von theoretisch und experimentell bestimmten Werten angegeben. Der Modentyp bezeichnet den Charakter der Schwingung: B bezeichnet Biegeschwingungen, T Torsionsschwingungen. Außerdem stehen in der letzten Spalte die Bezeichnungen einiger Moden.

unter den Bildern stehenden Resonanzfrequenzen spiegeln die bei tiefen Temperaturen experimentell ermittelten Werte wider.

In der oberen Reihe sind die Biegemoden des Paddles dargestellt, die in Tabelle 3.1 mit B bezeichnet sind. In Abb. 3.3(a) ist die Grundmode bei einer Frequenz von 754 Hz



(a) 754 Hz (b) 3479 Hz (c) 7980 Hz (d) 13708 Hz

(e) 1426 Hz (f) (g) 15414 Hz

Abb. 3.3: Experimentell relevante Moden eines BK 7-Paddles mit Resonanzfrequenzen bei tiefen Temperaturen. Dargestellt ist die Kontur des Paddles in Ruhe und eine Momentaufnahme der Auslenkung. Die dabei auftretenden relativen Verzerrungen sind farbkodiert dargestellt [Hei00].

zu sehen, bei der das gesamte Paddle ähnlich einem Vibrating Reed ausgelenkt wird. Abb. 3.3(b) und Abb. 3.3(c) zeigen die erste und zweite Oberschwingung, bei denen weitere Auslenkungsknoten auftreten. Das in Abb. 3.3(d) gezeigte Bild stellt ebenfalls eine Biegemode dar, weist jedoch im Übergangsbereich zu den Flügeln stärkere Verzerrungen auf.

Die untere Reihe zeigt die drei niederfrequenten Torsionsmoden des Paddles, die in Tabelle 3.1 mit T gekennzeichnet sind. Die in Abb. 3.3(e) dargestellte *symmetrische* Mode ist durch eine phasengleiche Auslenkung von Kopf und Flügeln ausgezeichnet. Das Bein wird hierbei stärker tordiert als der Hals. Dies hat zur Folge, dass die mechanische Ankopplung an den Probenhalter stärker als bei den folgenden Torsionsmoden ist und ein größerer Anteil an Schwingungsenergie dissipiert werden kann. Die Untergrunddämpfung dieser Mode sollte dadurch größer sein. Bei der in Abb. 3.3(f) zu sehenden *antisymmetrischen* Mode schwingen Kopf und Flügel gegenphasig, d. h. mit einer Phasenverschiebung von 180° zueinander. Da die Flügel bezüglich der Symmetrieachse des Paddles ein größeres Trägheitsmoment als der Kopf aufweisen, ist ihre Auslenkung wesentlich kleiner. Das Bein wird somit kaum tordiert. Die Lokalisierung der Schwingungsenergie im Bereich des Halses des Paddles bewirkt eine weitgehende Entkopplung von der Einspannungsstelle. Die Dissipation von elastischer Energie in den Probenhalter wird bei dieser Schwingungsform minimiert, und daher ist die Mode besonders zur Messung kleiner intrinsischer Dämpfungen geeignet. Die geringe Auslenkung der Flügel hat allerdings auch eine sehr kleine Detektionsspannung zur Folge. Leider konnte diese Mode bei dem BK 7-Paddle nicht beobachtet werden, so dass in Abb. 3.3(f) auch keine Frequenz angegeben ist. Die in Abb. 3.3(g) dargestellte Torsionsmode weist dieselbe Phasenbeziehung wie die antisymmetrische Mode bezüglich Flügel und Kopf auf. Da die Flügel stärker ausgelenkt werden, ist einerseits das Detektionssignal, andererseits aber auch die Ankopplung an den Probenhalter über die Torsion des Beins größer. Im Vergleich zu den Biegemoden ist die Verzerrung jedoch auf das Bein beschränkt, so dass auch bei dieser Mode die Untergrunddämpfung klein sein sollte.

Erwähnenswert ist, dass die gezeigten Schwingungsformen eindrucksvoll über ein Zeigerexperiment bestätigt werden konnten. Hierbei wurde an Luft ein Laserstrahl auf die Rückseite des senkrecht zur Tischplatte eingespannten Paddles fokussiert und der reflektierte Strahl auf eine ca. 5 m entfernte Wand abgebildet. Bei den Biegeschwingungen ergab sich gegenüber dem nichtschwingenden Paddle eine Aufweitung des reflektierten Strahls entlang der Paddlesymmetrieachse, die Torsionsmoden zeigten eine Aufweitung senkrecht dazu.

Die berechneten Resonanzfrequenzen sowie die zwischen 100 Hz und 20 kHz beobachteten Resonanzfrequenzen bei tiefen Temperaturen sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Des Weiteren gibt die Tabelle eine Übersicht über die Charakterisierung der Moden. Der Quotient aus berechneter und gemessener Resonanzfrequenz ist ebenfalls angegeben. Die Abweichung von theoretisch und experimentell bestimmten Werten kann mehreren Ursachen zugeschrieben werden. Auffällig ist, dass die berechneten Resonanzfrequenzen der

höherfrequenten Moden unter den experimentell ermittelten liegen, wohingegen die vier niederfrequenten Moden systematisch einen zu groß berechneten Wert aufweisen. Da sich bei den höherfrequenten Moden eine größere Verzerrung im Bereich des Halses und des Übergangsbereichs zu den Flügeln abspielt (vgl. Abb. 3.3), könnte die Ursache in den bei den Berechnungen zu klein gewählten Maßen dieser Bereiche liegen. Wegen der kleineren rücktreibenden Kraft ist auch die Resonanzfrequenz kleiner als berechnet. Umgekehrt erscheint bei den niederfrequenteren Moden die Breite des Beins zu groß gewählt, so dass sich die Resonanzfrequenz zu höheren Werten verschiebt. Aus den „wahren“ Paddle-Abmessungen quantitative Aussagen zu erhalten erscheint schwierig, da die Maße herstellungsbedingt (vgl. Abschnitt 3.3) selbst innerhalb der einzelnen Elemente variieren. Abweichungen der Geometrie im Bereich von 10 % erscheinen jedoch nicht unrealistisch und stellen sicherlich den Haupteffekt zur Erklärung der Abweichungen dar. Weitere kleine Beiträge ergeben sich aus den elastischen Konstanten und dem Silberfilm. Da die Werte der elastischen Konstanten nur für Raumtemperatur bekannt sind, erhöht sich die Resonanzfrequenz um ca. 1 % gegenüber den Werten bei tiefen Temperaturen. Der aufgebrachte Silberfilm (vgl. Abschnitt 4.2), der in den Simulationen unberücksichtigt blieb, liefert ebenfalls eine kleine Korrektur. Für die Änderung der Resonanzfrequenz gilt nach [Whi96] für die Torsionsmoden:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\frac{h_{\mathrm{film}}}{h_{\mathrm{sub}}}\left(\frac{3\,G_{\mathrm{film}}}{G_{\mathrm{sub}}} - \frac{\rho_{\mathrm{film}}}{\rho_{\mathrm{sub}}}\right) \ . \tag{3.7}$$

Die Indizes stehen für die Größen der Silberschicht (film) und für die des Substrats (sub), d. h. des Glases. Hierbei ist h die jeweilige Dicke, G der Schermodul und ρ die Dichte. Betrachtet man hingegen die Biegemoden muss der Elastizitätsmodul E anstatt des Schermoduls G eingesetzt werden. Für eine Abschätzung des Effekts werden die Werte von BK 7 und einer Silberschicht eingesetzt. Mit $G_{\mathrm{Ag}} = 2{,}95 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Nm}^{-2}$, $G_{\mathrm{BK\,7}} = 3{,}4 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Nm}^{-2}$, sowie $\rho_{\mathrm{Ag}} = 10{,}50\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$, $\rho_{\mathrm{BK\,7}} = 2{,}51\,\mathrm{g\,cm}^{-3}$ und $h_{\mathrm{Ag}}/h_{\mathrm{SiO_2}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ folgt nach Gl. 3.7 $\Delta f/f \approx -2 \cdot 10^{-3}$, d. h. die berechnete Resonanzfrequenz ist um ein fünftel Prozent zu hoch. Alle drei genannten Effekte bewirken eine Korrektur der Resonanzfrequenz, wobei der Hauptanteil durch die nichtperfekte Geometrie gegeben ist. Die Abweichungen von experimentellen und Simulationswerten lassen sich somit in diesem Rahmen erklären.

Ein wesentlicher Vorteil des Double Paddles gegenüber dem Vibrating Reed, bei dem die maximale Verzerrung an der Stelle der Einspannung auftritt, ist die verringerte mechanische Ankopplung an den Probenhalter und damit verbunden eine reduzierte Untergrunddämpfung durch Dissipation von Schwingungsenergie. Insbesondere bei der antisymmetrischen Mode sollte am unteren Ende des Fußes kaum noch Verzerrung auftreten, aber auch bei den anderen Schwingungsformen ist eine Verkleinerung des Beitrags gegenüber dem Reed zu erwarten. Eine vollständige Eliminierung des Untergrunds ist bei mechanischen Oszillatoren allerdings nicht möglich. Auch die Tatsache, dass mehrere Moden zur Verfügung stehen, zeichnet das Paddle gegenüber dem Reed aus. Bei diesem kann die

Frequenz nur durch einen äußeren Eingriff in das Experiment — wie z. B. die Änderung der Probenlänge — modifiziert werden, was insbesondere bei Tieftemperaturexperimenten einen erheblichen Mehraufwand bedeutet. Außerdem stehen beim Paddle unterschiedlich polarisierte Moden zur Verfügung. Während die Biegeschwingungen eine Mischung aus transversalen und longitudinalen Moden darstellen, sind die Torsionsschwingungen rein transversale Moden. Das bedeutet, dass die innere Reibung und die relative Änderung der Schallgeschwindigkeit auch in Bezug auf ihre Polarisation untersucht werden können.

3.3 Probenspezifikation und Herstellung der Oszillatoren

In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, dass Wechselwirkungseffekte zwischen Tunnelsystemen für die Tieftemperatureigenschaften von Gläsern von entscheidender Bedeutung sein können. Beispiele hierfür waren die im Multikomponentenglas BaO-Al_2O_3-SiO_2 gefundene Magnetfeldabhängigkeit der dielektrischen Konstanten und die elastischen Eigenschaften von Quarzglas im Nullfeld. In stark polaren Gläsern können die elektrischen Wechselwirkungseffekte über die elastischen Wechselwirkungseffekte dominieren. Mögliche Kandidaten für Materialien, die diese Eigenschaften besitzen, wurden im Rahmen dieser Arbeit untersucht und werden im folgenden Abschnitt vorgestellt. Außerdem wird auf die Herstellung der jeweiligen Oszillatoren eingegangen.

3.3.1 Die Borsilikatgläser BK 7 und AF 45

Bei dem schon in Abb. 2.3 erwähnten BK 7 und dem modifizierten Borsilikatglas AF 45 handelt es sich um kommerzielle Multikomponentengläser, die hauptsächlich bei der Herstellung optischer und elektrooptischer Bauteile Verwendung finden. Die Angaben des Herstellers (Schott Glaswerke, Mainz) über die chemische Zusammensetzung von BK 7 geben nur einen groben Überblick über die quantitativen Bestandteile (alle Angaben in Gewichtsprozent). Neben der Hauptkomponente SiO_2 ($60-70\,\%$) finden sich als weitere Komponenten mit einem größeren prozentualen Anteil B_2O_3 ($10-20\,\%$), BaO ($<1-10\,\%$), Na_2O ($1-15\,\%$) und K_2O ($5-15\,\%$). Weitere Spurenverbindungen sind in ZnO, CaO, TiO_2, As_2O_3 gegeben, deren Anteil jeweils unter $1\,\%$ beträgt [Scho00].

Die Zusammensetzung von AF 45 zeichnet sich neben den für Borsilikatgläser üblichen Bestandteilen SiO_2 (ca. $50\,\%$) und B_2O_3 ($>10\,\%$) durch einen hohen Anteil an BaO ($>20\,\%$) und Al_2O_3 ($>10\,\%$) aus. Als Spurenkomponente ist zusätzlich As_2O_3 mit einem Anteil von weniger als $1\,\%$ vorhanden. Bei seiner Synthese ist das Glas praktisch alkalifrei [Scho00].

Die für die Messungen verwendeten Paddles wurde im Rahmen einer Produktionsserie in der Glasbläserei des Physikalischen Instituts der Universität Heidelberg aus $400\,\mu$m dicken BK 7- bzw. AF 45-Plättchen mit Hilfe eines Ultraschallbohrers herausgeschnitten. Bei dieser Art der Herstellung der Paddles traten mehrere Probleme zu Tage. Die Bemaßung des aus Edelstahl gefertigten Bohrers wich aufgrund seines Herstellungsprozesses von

der in Abb. 3.2 angegebenen ab. Dies hatte zur Folge, dass auch die herausgeschnittenen Paddles nicht der gewünschten Symmetrie entsprachen. Mit zunehmendem Einsatz des Bohrers wurde zusätzlich eine Verschllechterung der Kantenqualität sowie deren Planparallelität beobachtet. Dies zog Toleranzen in der Paddlegeometrie innerhalb einer Herstellungsserie nach sich. Am Stärksten waren die Abweichungen im Bereich des Halses, hier wurden Unterschiede bis zu 30 % der vorgegebenen Breite registriert. Des Weiteren ist die Kantenrauhigkeit der Paddles erheblich größer als bei einem lasergeschnittenen Glaspaddle. Die Technik des Laserschneidens kann jedoch bei BK 7 und AF 45 nicht eingesetzt werden, da der thermische Expansionskoeffizient der Gläser zu groß ist (vgl. hierzu die Angaben im Anhang). Diese Proben halten den durch die großen Temperaturgradienten bedingten Verspannungen nicht stand und zerspringen. Zur Verbesserung des Herstellungsprozesses der Paddles mit der Ultraschallbohrtechnik wurde ein weiterer Bohrkopf aus gehärtetem Stahl gefertigt. Die Kantengeometrie dieses Bohrers war wesentlich besser definiert, allerdings kam er im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr zum Einsatz.

3.3.2 Fs 21

Fs 21 ist ein an der Technischen Universität Ilmenau am Fachgebiet für Glas- und Keramiktechnologie entwickeltes, fotostrukturierbares Multikomponentenglas. Die chemische Sollzusammensetzung der Hauptbestandteile lautet ([Har00], alle Angaben sind in Gewichtsprozent): SiO_2 (74,92 %), Li_2O (11,61 %), Al_2O_3 (7,2 %), Na_2O (2,74 %) und K_2O (4,16 %). Zusätzlich ist das Glas dotiert mit $AgNO_3$ (0,18 %), Sb_2O_3 (0,4 %), SnO (0,07 %), $CeCl_3{\cdot}7H_2O$ (0,65 %). Die Anteile der Dotanden beziehen sich hierbei auf 100 % Grundglas, das aus den Hauptbestandteilen zusammengesetzt ist.

Die Herstellung des zur Durchführung der Messungen verwendeten Fs 21-Paddles erfolgte ebenfalls in obengenanntem Fachbereich über einen modifizierten Fotolithografieprozess. Prinzipiell nutzt dieses Mikrostrukturierungsverfahren die Eigenschaft der Gläser, dass durch optischen und thermischen Einfluss lokale kristalline Phasen entstehen. Diese besitzen eine wesentlich größere Löslichkeit in verdünnter Flusssäure als die entsprechende Glasphase. Abb. 3.4 gibt einen Überblick über die verschiedenen Schritte des Strukturierungsverfahrens. In der ersten Stufe (Initiierung) erfolgt eine partielle Belichtung des Glases mit UV-Strahlung im Wellenlängenbereich zwischen 300 und 320 nm. Mit Hilfe einer in der gewünschten Form gefertigten Maske (Chrommaske auf Kieselglas) oder mit einem fokussierten Laserstrahl wird der zu belichtende Bereich festgelegt. In diesem Gebiet bildet sich infolge des im nächsten Schritt (Entwicklung) durchgeführten Temperprozesses eine Kristallphase aus. Diese lässt sich im abschließenden Prozess (Strukturierung) mittels verdünnter Flusssäure aus der Glasmatrix herausätzen. Aufgrund des endlichen Ätzratenverhältnisses von belichteten und unbelichteten Gebieten (zwischen 10 : 1 und 25 : 1) lässt sich eine Aufätzung der Glasstruktur nicht gänzlich verhindern. Dies erklärt die beim untersuchten Glaspaddle aufgetretenen Unebenheiten, die speziell im Bereich der Flügel zu erkennen waren. Die Kanten erschienen mit einer geringeren Rauhigkeit

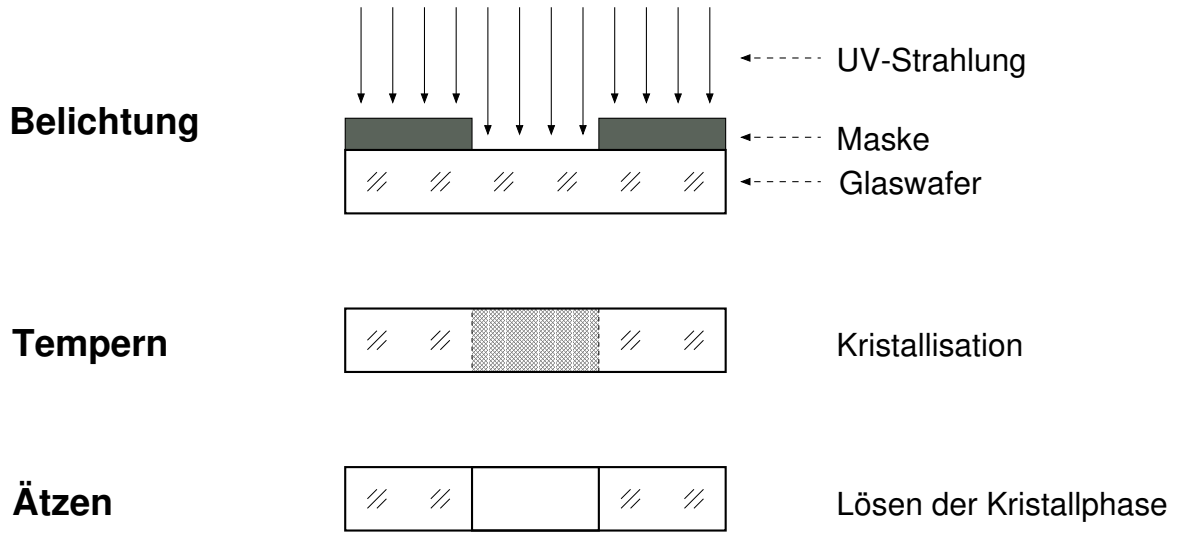


Abb. 3.4: Schematische Darstellung des Fotostrukurierungsprozesses des Fs 21-Paddles. Gezeigt ist ein Schnittbild der drei relevanten Prozessschritte.

behaftet als die des ultraschallgeschnittenen Paddles. Die geometrischen Ausmaße folgen den in Abb. 3.2 angegebenen Werten.

3.3.3 Amorphes BaO-Al_2O_3-SiO_2

Bei a-BaO-Al_2O_3-SiO_2 handelt es sich um das in Abschnitt 2.3 angesprochene Multikomponentenglas, an der die Magnetfeldabhängigkeit der dielektrischen Konstanten gefunden wurde. Die Glasprobe wurde uns dankenswerterweise von Herrn Priv.-Doz. Dr. P. Strehlow (PTB Berlin) zur Verfügung gestellt. Neben den oben angeführten Hauptkomponenten wurden bei einer im Physikalisch-Chemischen Institut der Universität Heidelberg durchgeführten XPS-Analyse[1] des Glases zudem noch Anteile an Zinn, Calzium und Natrium nachgewiesen.

Die Glasprobe lag als massiver Block mit Kantenmaßen von ca. $5\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm} \times 2\,\mathrm{cm}$ vor. Zur Herstellung einer Oszillatorgeometrie war eine mechanische Bearbeitung des Materials in der Glasbläserei des Physikalischen Instituts notwendig. Beim Sägen und Schleifen des Glases bildeten sich allerdings Risse im Material aus, so dass lediglich Reedgeometrien hergestellt werden konnten.

[1] X-ray Photoemission Spectroscopy: Hierbei wird die zu untersuchende Probe mit monochromatischen Röntgenquanten bestrahlt. Die aus der Probe emittierten Elektronen werden mit Hilfe eines energieauflösenden Detektors nachgewiesen. Aufgrund der charakteristischen Bindungsenergien der Elektronen im jeweiligen Atom kann über die kinetische Energie der Elektronen eine Zuordnung zu den einzelnen Elementen erfolgen.

4 Experimenteller Aufbau und Messtechnik

Nach der Vorstellung der untersuchten Proben wird im folgenden Kapitel der im Rahmen dieser Arbeit verwendete experimentelle Aufbau betrachtet. Zunächst wird kurz auf die Erzeugung und Messung der für die Untersuchungen notwendigen tiefen Temperaturen eingegangen. Die für Vibrating Reed- und Double Paddle-Messungen verwendeten Probenhalter sowie der gemeinsame elektronische Aufbau sind Gegenstand von Abschnitt 4.2. Hieran schliesst sich die Erläuterung des Messverfahrens zur Bestimmung der elastisch relevanten Größen innere Reibung und relative Änderung der Schallgeschwindigkeit an. Zur Untersuchung dieser Größen in einem äußeren Magnetfeld wurde eine Spule eingesetzt. Die charakteristischen Eigenschaften und die Bestimmung des Magnetfelds werden in Abschnitt 4.4 dargestellt. Am Ende von Kapitel 4 werden noch einige experimentelle Probleme diskutiert. Die Konzepte werden zum Großteil anhand des Paddles dargestellt, lassen sich aber auch auf Vibrating Reed-Experimente übertragen.

4.1 Erzeugung und Messung tiefer Temperaturen

Besonders der Temperaturbereich unterhalb von ca. 100 mK ist für die Untersuchung von Wechselwirkungseffekten zwischen Tunnelsystemen von Bedeutung (vgl. Abschnitt 2.3). Zur Erzeugung dieser Temperaturen wurde ein *Verdünnungskryostat* eingesetzt. Bei diesem nutzt man als Kühlmechanismus die Eigenschaften eines verdünnten ^{3}He/^{4}He-Gemischs aus. Auch wenn der prinzipielle Aufbau und die Funktionsweise dieser Kältemaschine an dieser Stelle nicht näher erläutert werden, sollen zumindest die für die weiteren Abschnitte relevanten Begriffe eingeführt werden.[1] Der kälteste Ort innerhalb des Kryostaten ist die sog. *Mischkammer*, welche sich innerhalb des *Vakuumtopfs* (Experimentiervolumen) befindet. Die tiefsten hier erreichten Temperaturen lagen bei ca. 5 mK.

Die Mischkammertemperatur wurde mit einem Suszeptibilitäts- und mehreren Widerstandsthermometern bestimmt. Im Temperaturbereich zwischen Raumtemperatur und 1,5 K wurde ein RhFe-Widerstand[2] verwendet, bei niedrigeren Temperaturen kam ein kalibrierter Kohlewiderstand zum Einsatz [Wei95]. Optionsweise wurde im Temperaturbereich unterhalb von ca. 700 mK mit einem Suszeptibilitätsthermometer gearbeitet.[3]

[1] Der Aufbau und die Funktionsweise eines Verdünnungskryostaten sowie die Eigenschaften eines ^{3}He/^{4}He-Gemischs sind in verschiedenen Lehrbüchern ausführlich beschrieben, z. B. in [Ens00], [Pob92].

[2] Firma Oxford Instruments

[3] Hierbei wird ausgenutzt, dass die magnetische Suszeptibilität einer mit Erbium dotierten Goldprobe einem Curie-Weiss-Gesetz gehorcht. Die Eichung dieses Thermometers erfolgte gegen ein Kernorientierungsthermometer. Alle genannten Thermometertypen sind z. B. in [Ens00] genauer beschrieben.

4.2 Probenhalter und elektronischer Aufbau

In Abb. 4.1 ist die schematische Abbildung eines Double Paddle-Probenhalters dargestellt. Das Paddle wird mittels zweier Schrauben zwischen ein kleines Kupferklötzchen und einen Kupferblock geklemmt. Der Probenhalter ist mit der Mischkammer des Verdünnungskryostaten verbunden. Auf diese Weise kann man den Aufbau bis auf Temperaturen von 5 mK kühlen. Für die Bauteile des Halters findet Kupfer wegen seiner hohen Wärmeleitfähigkeit Verwendung. Die Anregung des Paddles zu erzwungenen Schwingungen sowie deren Detektion erfolgt auf elektrostatischem Weg. Dafür sind in Höhe der beiden Flügel des Paddles zwei Elektroden am Probenhalter befestigt. Die anregende Elektrode und die Paddlefläche bilden die zwei Platten eines Kondensators. Das dielektrische Glaspaddle muss hierzu zuvor einseitig mit einer Metallschicht bedampft werden. Zu beachten ist, dass der Film so dünn gewählt wird, dass er die elastischen Eigenschaften der zu untersuchenden Substanz nur unmerklich beeinflusst. Die Plättchen eines Vibrating Reed-

Abb. 4.1: Schematische Abbildung des Probenhalters mit Paddle und Elektroden. Das Paddle ist zwischen zwei Kupferklötzchen gespannt.

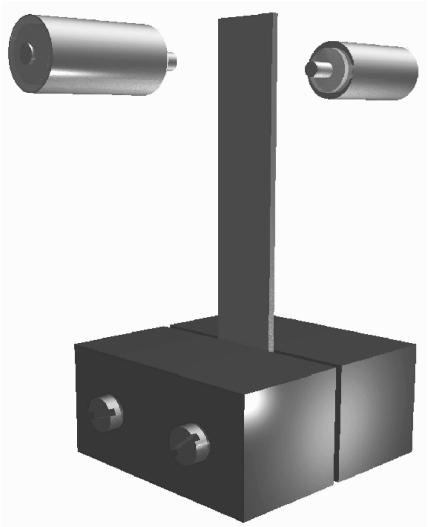


Abb. 4.2: Schematische Abbildung eines Vibrating Reed-Aufbaus. Der Abstand der Elektroden vom Plättchen ist übertrieben dargestellt.

Experiments werden üblicherweise mit einer einige 10 nm dicken Goldschicht besputtert. Auf ein Paddle muss wegen des in [Burk99] beobachteten Thermalisierungsproblems eine ca. 1 μm dicke Silberschicht aufgedampft werden (siehe auch Abschnitt 4.5). Die zweite Elektrode dient der kapazitiven Detektion der Schwingung. Die Probe ist hierbei über den Halter geerdet.

Der in Abb. 4.2 gezeigte Vibrating Reed-Probenhalter ist ähnlich aufgebaut. Der wesentliche Unterschied besteht in der geometrischen Anordnung der Elektroden bzgl. der Probe. Außerdem ist zu beachten, dass das Reed beidseitig mit einem Metallfilm besputtert sein muss.

Um das Zustandekommen des Messsignals zu erklären, betrachtet man zunächst die Kapazität der beschriebenen Plattenkondensatoren

$$C_{\mathrm{a/d}} = \frac{\epsilon_0 S}{x_{\mathrm{a/d}}} \ . \tag{4.1}$$

Der Index steht hierbei für Anregung (a) bzw. Detektion (d). Die Größe S bezeichnet die Grundfläche der Elektroden und $x_{\mathrm{a/d}}$ deren Abstand zum Paddle. Mit typischen Abständen von 100 μm und einer Fläche S von 0,3 cm^2 ergeben sich Kapazitäten, die in der Größenordnung von 1 pF liegen.

Unter der Annahme nicht zu großer Schwingungsamplituden ergibt sich die zwischen den Kondensatorplatten wirkende Kraft zu

$$F = \frac{1}{2} C_{\mathrm{a}} \frac{U^2}{x_{\mathrm{a}}} \tag{4.2}$$

und ist somit proportional zum Quadrat der angelegten Spannung. Die Modulation des Abstands durch die Schwingung kann bei den tatsächlich auftretenden Auslenkungen vernachlässigt werden. Bei der Verwendung einer Wechselspannung $U(t) = U_0 \cos(\frac{1}{2}\,\omega t)$ folgt für die Zeitabhängigkeit der resultierenden Kraft:

$$F = \frac{1}{4} C_{\mathrm{a}} \frac{U_0^2}{x_{\mathrm{a}}} (1 + \cos \omega t) \ . \tag{4.3}$$

Das bedeutet, dass die Probe mit der doppelten Frequenz der angelegten Wechselspannung schwingt. Dies ist anschaulich klar, da bei einem Wechsel der Elektrodenpolarität im Silberfilm des Paddles eine gegenpolige Ladung induziert wird und somit immer eine anziehende Kraft zwischen Paddle und Elektrode wirkt. Der Oszillator weist also während *einer* Schwingungsperiode der Anregungsspannung *zwei* maximale Auslenkungen auf.

Der Nachweis der Auslenkung erfolgt ebenfalls kapazitiv. Hierbei nutzt man aus, dass die Abstandsänderung der Probe gegenüber der Detektionselektrode eine Modulation der zwischen ihnen gebildeten Kapazität bewirkt:

$$C(t) = C_{\mathrm{d}} \frac{1}{1 - \xi(t)/x_{\mathrm{d}}} \simeq C_{\mathrm{d}} \left(1 + \frac{\xi(t)}{x_{\mathrm{d}}} \right) \ . \tag{4.4}$$

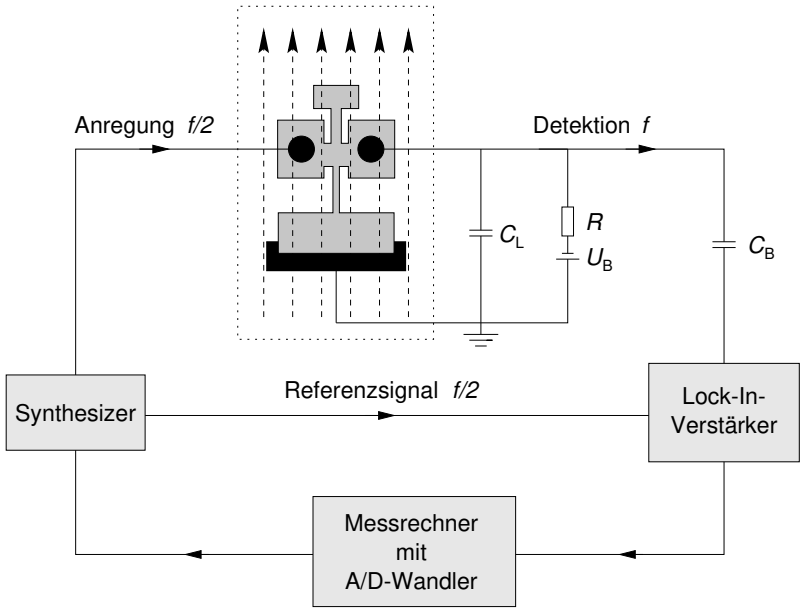


Abb. 4.3: Prinzipbild der Messelektronik. Nur der Probenhalter befindet sich innerhalb des Kryostaten (gepunktete Linie). Schematisch durch Pfeile ist das Magnetfeld dargestellt, das mit dem in Abschnitt 4.4 vorgestellten Aufbau erzeugt werden kann.

In der Näherung wurde eine Reihenentwicklung durchgeführt und nach dem Term erster Ordnung abgebrochen. Dies ist möglich, da die mit ξ bezeichnete Auslenkung klein gegen den Gleichgewichtsabstand ist. Legt man an der Detektionselektrode über einen hochohmigen Vorwiderstand ($R \simeq 400\,\mathrm{M\Omega}$) eine Vorspannung U_B an, so fällt aufgrund der Modulation der Kapazität C_d am Widerstand R eine Wechselspannung U_d ab, die sich unter Berücksichtigung der Kapazität der Zuleitungen ($C_\mathrm{L} \simeq 300\,\mathrm{pF}$) nach [Ber75] zu

$$U_\mathrm{d}(t) = U_\mathrm{B}\frac{\xi(t)}{x_\mathrm{d}}\,\frac{C_\mathrm{d}}{C_\mathrm{d}+C_\mathrm{L}}\,\frac{\omega R(C_\mathrm{d}+C_\mathrm{L})}{\sqrt{1+(\omega R(C_\mathrm{d}+C_\mathrm{L}))^2}} \tag{4.5}$$

ergibt. Für die im Experiment benutzten Frequenzen im Bereich bis 20 kHz und den typischen Werten für R und C_L kann der letzte Faktor durch 1 ersetzt werden. Da außerdem $C_\mathrm{L} \gg C_\mathrm{d}$ ist, folgt:

$$U_\mathrm{d}(t) = U_\mathrm{B}\frac{\xi(t)}{x_\mathrm{d}}\,\frac{C_\mathrm{d}}{C_\mathrm{L}} = U_\mathrm{B}\frac{\xi(t)}{x_\mathrm{d}^2}\,\frac{\epsilon_0 S}{C_\mathrm{L}}\,. \tag{4.6}$$

Die detektierte Spannung ist somit proportional zur angelegten Vorspannung U_B, die im Experiment typischerweise 250 V betrug, sowie zur Auslenkung des Paddles. Insbesondere ist das Verhältnis von detektierter Spannung und Auslenkung frequenzunabhängig. Desweiteren ist das Signal umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat zwischen Detektionselektrode und Probe, was die bei der Einspannung des Paddles bzw. der Ausrichtung

der Elektroden notwendige Feinjustage in Bezug auf das Detektionssignal betont. Mit den oben genannten Zahlenwerten und typischen Detektionsspannungen in der Größenordnung von $1\,\mu$V ergibt sich aus Gl. 4.6 eine Abschätzung der Amplitude ξ von einigen Nanometern. Dies rechtfertigt nachträglich die Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit des Abstands bei der Berechnung der auf das Paddle wirkenden Kraft in Gl. 4.2 und die Näherung in Gl. 4.4.

In Abb. 4.3 ist in einer Prinzipskizze der Aufbau der Messelektronik dargestellt. Schematisch durch Pfeile gekennzeichnet ist das Magnetfeld, welches optionsweise angelegt werden kann (vgl. hierzu Abschnitt 4.4). Ein über IEC-Bus gesteuerter Funktionsgenerator (Phillips PM 5191) regt die Probe mit einem sinusförmigen Signal der Frequenz $f/2$ zu Schwingungen an. Die im Detektionskreis erzeugte Wechselspannung U_d der Frequenz f wird einem Lock-In-Verstärker (Stanford Research 830 oder Ithaco Dynatrac 393) zugeführt. Der Gleichspannungsanteil wird vorher durch die Kapazität C_B herausgefiltert. Als Referenzsignal erhält der Lock-In-Verstärker zusätzlich eine vom Synthesizer generierte Wechselspannung, die mit dem Anregungssignal in Phase ist. Da die Probe mit der doppelten Anregungsfrequenz schwingt, arbeitet der Lock-In-Verstärker im sog. $2f$-Modus, d. h. es werden nur Signale detektiert, die der doppelten Frequenz des Referenzsignals entsprechen. Dies hat den Vorteil, dass die Messung gegen mögliches Übersprechen der Anregespannung auf die Detektionselektrode weniger empfindlich ist. Zur Minimierung des Übersprechens ist zwischen den Elektroden ein metallischer Steg als Abschirmung in den Probenhalter integriert (in Abb. 4.1 nicht eingezeichnet). Nach Vergleich der Phasenlage der Eingangssignale stellt der Lock-In-Verstärker drei Ausgangssignale zur Verfügung (A, $A\sin\phi$, $A\cos\phi$, wobei A die Amplitude des Detektionssignals und ϕ die Phasendifferenz der Eingangssignale ist), die über einen im Messrechner integrierten Analog-Digital-Wandler ausgelesen werden. Torsionsmoden des Paddles und Vibrating Reed-Schwingungen weisen bei den in Abb. 4.1 und Abb. 4.2 dargestellten Anordnungen der Elektroden die gleiche Phasenlage auf. Bei den Biegemoden des Paddles sind das $A\sin\phi$- und das $A\cos\phi$-Signal invertiert. Dies erlaubt die experimentelle Unterscheidung zwischen Torsions- und Biegeschwingungen beim Paddle.

Neben der Speicherung und Darstellung der Daten übernimmt der Computer die Regelung der Anregungsfrequenz auf eine der Resonanzfrequenzen der Probe. Im Messprogramm ist ein PID[4]-Regelalgorithmus implementiert. Die Regelung auf Resonanz erfolgt über das $A\cos\phi$-Signal, dessen Verlauf im Bereich einer Eigenfrequenz des Paddles in Abb. 4.5 gezeigt wird. Bei Resonanz ist die Phase eines zu erzwungenen Schwingungen angeregten Systems gerade $\pi/2$, so dass dieses Signal einen Nulldurchgang aufweist. Hierauf beruht der Algorithmus, der bei einer Abweichung die Frequenz entsprechend nachstellt. Mit dieser Regelung kann, wie im nächsten Abschnitt erklärt wird, auf elegante Weise die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung und der relativen Schallgeschwindigkeitsänderung über die im Experiment ermittelten Größen bestimmt werden.

[4] Proportional-Integral-Differential

4.3 Bestimmung der akustischen Messgrößen

Relative Schallgeschwindigkeitsänderung

Die relative Änderung der Schallgeschwindigkeit läßt sich direkt über die Verschiebung der Resonanzfrequenz bestimmen. Wegen Gl. 3.1 gilt die Proportionalität $f_{\mathrm{res}} \propto v_{\mathrm{Y}}$, und unter Vernachlässigung der thermischen Ausdehnung ergibt sich:

$$\frac{\delta f_{\mathrm{res}}}{f_{\mathrm{res}}} = \frac{\delta v_{\mathrm{Y}}}{v_{\mathrm{Y}}} \ , \tag{4.7}$$

wobei

$$\frac{\delta f_{\mathrm{res}}}{f_{\mathrm{res}}} = \frac{f_{\mathrm{res}}(T) - f_{\mathrm{res}}(T_0)}{f_{\mathrm{res}}(T_0)}$$

und einem entsprechenden Ausdruck für v_{Y}. T_0 bezeichnet dabei eine Referenztemperatur. Die Werte der thermischen Expansionskoeffizienten der untersuchten Gläser liegen bei 300 K in der Grösenordnung von $10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$. Die genauen Angaben der jeweiligen Hersteller kann man dem Anhang entnehmen. Bei tiefen Temperaturen ($T < 1\,\mathrm{K}$) ist die Vernachlässigung der thermischen Ausdehnung für praktisch alle Substanzen gerechtfertigt, was die Anwendung von Gl. 4.7 in guter Näherung auch im gesamten vermessenen Temperaturbereich ermöglicht. Mit Hilfe des in Abschnitt 4.2 beschriebenen Regelmechanismus kann man das Paddle auf seiner Resonanzfrequenz halten und aus deren Verschiebung direkt den Temperaturgang der Schallgeschwindigkeit bestimmen. Die Genauigkeit der Frequenzmessung liegt zwischen 10^{-7} und einigen 10^{-6}.

Innere Reibung

Die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung wird im Experiment in zwei Stufen bestimmt. Zunächst gewinnt man den relativen Verlauf der inneren Reibung über die Aufnahme von Amplitude und Resonanzfrequenz gemäß der Beziehung

$$Q^{-1} \propto A^{-1} f_{\mathrm{res}}^{-2} \ , \tag{4.8}$$

die aus der Lösung der Bewegungsgleichung für $f = f_{\mathrm{res}}$ folgt. An ausgewählten Temperaturpunkten bestimmt man dann den Absolutwert durch die Aufnahme von Resonanzkurven oder freien Amplitudenzerfällen. Die beiden Methoden sollen im Folgenden näher betrachtet werden.

Bei der Beobachtung des freien Amplitudenzerfalls nutzt man die bisher nicht betrachtete Dämpfung der Schwingung aus. Formal kann diese durch Einführung eines komplexen Youngschen Moduls in das Problem integriert werden

$$Y = Y' + \mathrm{i}Y'' = Y'(1 + \mathrm{i}\eta) \ . \tag{4.9}$$

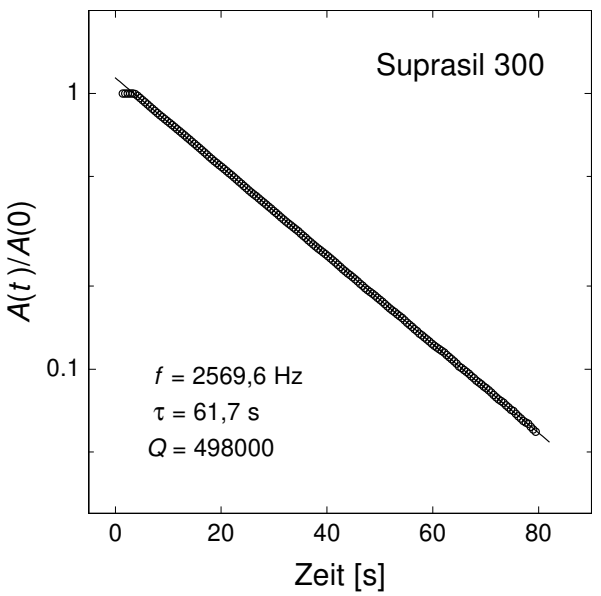


Abb. 4.4: Freier Amplitudenzerfall eines Quarzglas-Paddles bei Raumtemperatur (Suprasil 300, [Burk99]). Nach 2 s wurde die Anregungsspannung abgeschaltet.

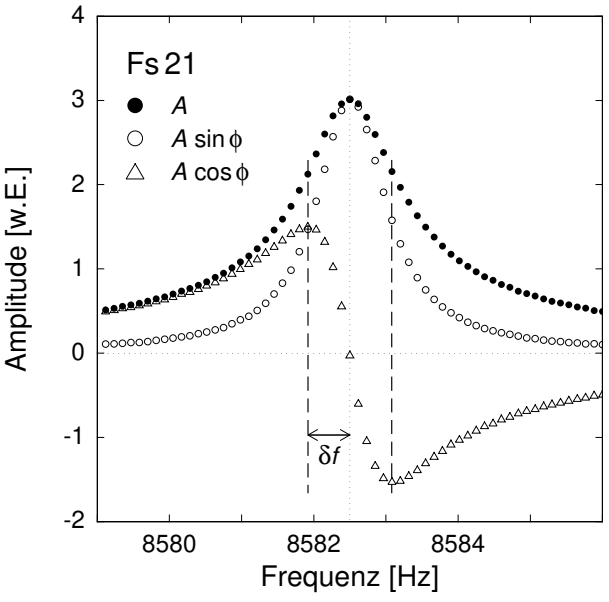


Abb. 4.5: Resonanzkurve eines Fs 21-Paddles bei $T = 48\,\mathrm{mK}$. Zu sehen sind A, $A\sin\phi$ und $A\cos\phi$ als Funktion der Anregungsfrequenz. Die Halbwertsbreite $2\,\delta f$ ist über Gl. 4.12 mit der Güte verknüpft.

Nach [Sku54] ist im Falle kleiner Dämpfungen der sog. Verlustfaktor η identisch mit der inneren Reibung Q^{-1} des Oszillators. Verwendet man den folgenden charakteristischen Lösungsansatz für ein gedämpftes, zu erzwungenen Schwingungen angeregtes System

$$\xi(x,t) = A_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \psi(x) \;, \tag{4.10}$$

wobei durch $\psi(x)$ die Ortsabhängigkeit der Auslenkung gegeben ist und ξ, A_0 komplexwertige Größen sind, so erhält man durch Einsetzen in die entsprechende Bewegungsgleichung und Vergleich der Imaginärteile

$$\eta = \frac{1}{\pi f_{\mathrm{res}} \tau} = Q^{-1} \;. \tag{4.11}$$

Hierbei ist τ die Zeitkonstante, innerhalb der die Amplitude des Oszillators auf 1/e abgefallen ist. Abb. 4.4 zeigt die Zerfallskurve der Amplitude eines Quarzglas-Paddles (Suprasil 300, [Burk99]), aus der auf einfache Weise die Güte der Mode und somit der Absolutwert der inneren Reibung bestimmt werden kann. Allerdings ist diese Methode nur anwendbar, wenn die Zeitkonstante τ genügend groß ist, um über einen möglichst langen Zeitraum das Amplitudensignal verfolgen zu können. Außerdem können in diesem Modus weder Amplitudenoffsets noch Zusatzphase, mit denen das Signal i. Allg. behaftet ist und die möglicherweise elektronischen Ursprungs sind, bestimmt und korrigiert werden.

Hierzu eignet sich die Bestimmung der inneren Reibung mit Hilfe von Resonanzkurven. Das Verfahren ist am Beispiel eines Fs 21-Paddles in Abb. 4.5 gezeigt. Wie aus der Darstellung ersichtlich, wird die Anregungsfrequenz schrittweise innerhalb eines Intervalls um die Resonanzfrequenz f_{res} variiert und die Signale A, $A\sin\phi$, $A\cos\phi$ aufgetragen. An den Stellen, an denen die Amplitude auf $A/\sqrt{2}$ abgefallen ist, bestimmt man die Breite $2\,\delta f$ der Kurve und gemäß

$$Q = \frac{f_{\mathrm{res}}}{2\,\delta f} \tag{4.12}$$

die Güte des Systems. Alternativ dazu kann an die Messdaten eine Lorentzkurve angepasst werden. Der Vorteil hierbei ist, dass diese Methode eine genauere Bestimmung der Güte gewährleistet. Bei hohen Güten kann diese Methode sehr zeitaufwendig werden, da man bei jeder Frequenzänderung immer die charakteristische Einschwingzeit des Systems abwarten muss. Im Falle des in Abb. 4.4 gezeigten Quarzglaspaddles beträgt die Zeitkonstante 61 s, so dass die Aufnahme einer Resonanzkurve mit 60 Punkten weit über eine Stunde dauert. Die Aufnahme von Resonanzkurven liefert jedoch auch Aussagen über die Qualität des Signals, insbesondere lassen sich Nichtlinearitäten aufgrund einer zu hohen Anregungsspannung detektieren. Wie in [Cla94, Esq92] berichtet, führen diese Effekte zu einer Verkippung der Resonanzkurve. Insbesondere bei tiefen Temperaturen, bei denen die Güten der Paddlemoden aufgrund kleiner intrinsischer Dämpfungen groß werden, ist somit die Aufnahme von Resonanzkurven unumgänglich.

4.4 Erzeugung und Bestimmung des Magnetfelds

In Abb. 2.10 wurde die Abhängigkeit der dielektrischen Konstanten des Multikomponentenglases BaO-Al_2O_3-SiO_2 vom äußeren Magnetfeld dargestellt. Aufgrund der ähnlichen Voraussagen des Tunnelmodells für dielektrische und akustische Parameter sollten die möglichen magnetischen Effekte auch in akustischen Messungen im gleichen Bereich der Feldstärke zu beobachten sein. Die Zielvorgabe bei der Erzeugung eines Magnetfelds war somit, eine Spule zu fertigen, die Feldstärken bis 150 mT ermöglicht.

Die Halterung der Spule besteht aus einem Edelstahlrohr, dessen Außenradius $R = 12\,\mathrm{mm}$ und dessen Länge $l = 64\,\mathrm{mm}$ beträgt. Auf die Halterung wurde ein $50\,\mu$m dicker supraleitender NbTi-Draht der Länge 1 km gewickelt.[5] Die Windungszahl der Spule wurde hierbei zu $N = 12470$ bestimmt.

Geht man aufgrund der Symmetrie der Spule zu Zylinderkoordinaten über, dann gibt die Symmetrieachse der Spule die z-Richtung vor. Legt man zusätzlich den Koordinatenursprung in den Spulenmittelpunkt, so erhält man nach [Dem95] für das Magnetfeld einer Spule endlicher Länge entlang der z-Achse

$$B(z) = \mu_0 n I \left(\frac{u}{2\sqrt{1+u^2}} - \frac{v}{2\sqrt{1+v^2}} \right) , \tag{4.13}$$

[5] Sprungtemperatur von NbTi $T_{\mathrm{c}} = 9{,}8\,\mathrm{K}$ [Lid95]

mit den Abkürzungen

$$u = \frac{z}{R} + \frac{l}{2R} \quad \text{und} \quad v = \frac{z}{R} - \frac{l}{2R} \ . \tag{4.14}$$

In Gl. 4.13 treten zusätzlich die durch den Draht fließende Stromstärke I, die magnetische Permeabilitätskonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{VsA^{-1}m^{-1}}$ und das Verhältnis der Anzahl der Windungen und der Länge des Spulenkörpers $n = N/l \approx 1{,}95 \cdot 10^5\,\mathrm{m^{-1}}$ auf. Für die Mitte der Spule ergibt sich mit den oben angegebenen geometrischen Maßen

$$B(z = 0) \simeq 0{,}936 \cdot \mu_0 n I \ , \tag{4.15}$$

d. h. 93,6 % des Werts einer unendlich langen Spule. Für die maximale Ausdehnung des Paddles ($z_{\max} = \pm\,6\,\mathrm{mm}$) folgt nach Gl. 4.13

$$B(z_{\max}) \simeq 0{,}931 \cdot \mu_0 n I \ . \tag{4.16}$$

Die Abweichung vom Maximalwert der dargestellten Spule, Gl. 4.15 beträgt ca. 0,5 %. Die Homogenität des Magnetfelds im Bereich des Paddles entlang der z-Achse ist somit in guter Näherung gewährleistet. Die in Kapitel 6 gezeigten Diagramme enthalten Werte der magnetischen Feldstärke B, die durch Mittelung von Gl. 4.13 über die Paddleausdehnung bestimmt wurden

$$\overline{B} \simeq 0{,}935 \cdot \mu_0 n I \ . \tag{4.17}$$

Als Maß für die Stromstärke wurde die mittels einer Konstantstromquelle (Digi 35 CPU) eingestellte Größe eingesetzt. Die maximal erreichbaren Stromstärken lagen bei 1 A, was einer maximalen Feldstärke von ca. 230 mT entspricht. Bei einer größeren Stromstärke als 1 A wird über die Zuleitungen eine hinreichend große Wärmemenge eingekoppelt, um den Supraleiter über dessen Sprungtemperatur zu heizen. Hierdurch wird der supraleitende Zustand zerstört und Strom und Magnetfeld brechen zusammen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem „Quench“ der Spule, da hierbei die gesamte gespeicherte Energie von $W = \frac{1}{2}LI^2$ frei wird und zu einer Erwärmung der Mischkammer führt.

Eine Fehlerabschätzung für das Magnetfeld erhält man über die Unbestimmtheiten der in die Berechnung eingehenden Größen. Hierzu eignet es sich, die Induktivität L der Spule näher zu betrachten. Ausgehend von der für eine unendlich lange Spule geltenden Beziehung $B = \mu_0 n I$ erhält man die Induktivität

$$L = \mu_0 n^2 V \ . \tag{4.18}$$

Mit den Spulendaten folgt ein berechneter Wert von $L = 1{,}39\,\mathrm{H}$. Bei einer Spule endlicher Länge verringert sich dieser Wert aufgrund von Randeffekten geringfügig. Der mit einem Multimeter[6] bestimmte Wert der Induktivität von $L = 1{,}36\,\mathrm{H}$ liegt im Rahmen

[6] Hierbei handelt es sich um ein sog. LCR-Meter, das bei Bestimmung der Induktivität die Parameter Kapazität und Widerstand in der Weise abgleicht, dass für feste Messfrequenz die Resonanzbedingung eines Schwingkreises erfüllt wird.