HD – IHEP 99–03

Kinematische Rekonstruktion von WW-Ereignissen bei LEP2

Oliver Buchmüller

Gutachter: Prof. Dr. Alois Putzer
Prof. Dr. Hans Günter Dosch

INAUGURAL – DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich–Mathematischen

Gesamtfakultät

der

Ruprecht–Karls–Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Dipl.–Phys. Oliver Buchmüller

aus Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 25.06.1999

Kinematische Rekonstruktion von WW-Ereignissen bei LEP2

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Messung der Masse des W-Bosons aus seinen Zerfallsprodukten, die ihren Urspung in den semileptonischen Zerfällen $WW \rightarrow e\nu qq$ und $WW \rightarrow \mu\nu qq$ haben. Der hierfür verwendete Datensatz entspricht einer integrierten Luminosität von 56.84 pb^{-1} und wurde mit dem Detektor ALEPH bei einer Schwerpunktenergie von $\sqrt{s} = 183$ GeV im Jahre 1997 aufgezeichnet. Zur Aufbereitung der Daten wurden Selektions- und Rekonstruktionsalgorithmen für semileptonische Ereignisse entwickelt und die daraus resultierende Massenauflösung konnte durch Anwendung eines eigens dafür erstellten kinematischen Anpassungskonzeptes entscheidend verbessert werden.

Die Anpassung einer Breit-Wigner Funktion an die eindimensionale Massenverteilung ergibt nach der Korrektur der Messung entsprechend einer mit Simulationsereignissen erstellten Kalibrationskurve das Resultat:

$$M_W = 80.21 \pm 0.19(stat.) \pm 0.04(syst.) \quad GeV/c^2 \quad .$$

Um die Glaubwürdigkeit dieses Ergebnisses zu untermauern, wurden sieben weitere Massenextraktionsmethoden entwickelt und ausführlich auf Konsistenz überprüft.

Kinematical Reconstruction of WW Events at LEP2

This thesis describes the measurement of the W-boson mass from its decay products in semileptonic channels $WW \rightarrow e\nu qq$ and $WW \rightarrow \mu\nu qq$. The data sample used in this analysis was recorded with the detector ALEPH at a center-of-mass energy of $\sqrt{s} = 183$ GeV during 1997. Selection and reconstruction algorithms of the semileptonic W decay are applied to define the samples. To improve the mass resolution, a constrained kinematic fit package has been developed.

A fit of a Breit-Wigner function to the one-dimensional mass distribution after calibration leads to the result:

$$M_W = 80.21 \pm 0.19(stat.) \pm 0.04(syst.) \quad GeV/c^2 \quad .$$

In order to improve the confidence into this measurement, seven additional mass extraction methods are developed and extensively tested for consistency.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Beschreibung der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung im Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist wohl einer der größten Erfolge der modernen Physik. In diesem Standardmodell können drei der vier elementaren Wechselwirkungen im Rahmen einer Quantenfeldtheorie beschrieben werden.
In den Jahren 1967 und 1968 gelang Glashow, Salam und Weinberg die mathematische Vereinheitlichung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung in einer Eichtheorie. Die beiden Kräfte sind somit nur unterschiedliche Erscheinungsformen einer einzigen Kraft. Die Vermittlung dieser Kraft erfolgt durch die Vektoreichbosonen γ, Z und $W^{\pm}$. Es konnte 1983 am Antiproton-Proton Speicherring $S\bar{p}pS$ am CERN nachgewiesen werden, daß die Bosonen $W^{\pm}$ und Z existieren und im Gegensatz zum masselosen Photon (γ) eine Masse von ca. 80 GeV/c^2 bzw. ca. 91 GeV/c^2 besitzen.

Grundsätzlich kann durch Eichtheorien nur der Austausch von masselosen Eichbosonen beschrieben werden. Somit ist der Ursprung der Massen dieser Bosonen eine der wichtigsten Fragen der Teilchenphysik. Innerhalb des Standardmodells wird dies durch den sogenannten Higgsmechanismus erklärt, in dem zwei komplexe skalare Felder postuliert werden. Eines dieser vier Higgs-Bosonen müßte experimentell beobachtbar sein, wurde aber trotz fieberhafter Suche bisher noch nicht nachgewiesen.

Die dritte im Standardmodell enthaltene Wechselwirkung ist die durch masselose Gluonen vermittelte starke Wechselwirkung. Ihre Beschreibung wird in Analogie zu der elektroschwachen Wechselwirkung innerhalb einer eichinvarianten Quantenfeldtheorie durchgeführt.

Eine der wichtigsten Aufgaben der experimentellen Elementarteilchenphysik ist die Untersuchung dieser Austauschteilchen, sowie der Vergleich von Meßergebnissen mit Vorhersagen des Standardmodells. Zu diesem Zweck wurde 1989 am CERN der LEP-Speicherring in Betrieb genommen, in dem hochenergetische Elektronen und Positronen zur Kollision gebracht werden. An einem der Kollisionspunkte befindet sich der Detektor ALEPH, mit dem die Zerfallsprodukte der Kollision detailliert studiert werden können. In der ersten Phase von LEP wurden die Eigenschaften des neutralen Vektorbosons Z der elektroschwachen Wechselwirkung genau untersucht. So konnte zum Beispiel die Masse des $Z-$Bosons mit einer relativen Genauigkeit von $\mathcal{O}(10^{-5})$ bestimmt werden. Diese und weitere präzise Untersuchungen stehen in guter Übereinstimmung mit dem Standardmodell.

Die zweite Phase von LEP, LEP2 genannt, bietet die Möglichkeit, durch Steigerung der

Schwerpunktenergie über die W-Paarschwelle, eine Untersuchung des geladenen Vektorbosons $W^{\pm}$ der elektroschwachen Wechselwirkung durchzuführen. Eines der wichtigsten Ziele hierbei ist die Messung der Masse des W-Bosons, die zuvor nur mit einer relativen Genauigkeit $\mathcal{O}(10^{-3})$ bekannt war. Mit einer zu erwartenden relativen Genauigkeit auf die Masse des W-Bosons von $\mathcal{O}(10^{-4})$ nach LEP2 und unter Berücksichtigung der bereits gemessenen Parameter des Standardmodells kann der erlaubte Bereich der Masse des Higgs-Bosons im Standardmodell entscheidend eingeschränkt werden. Dies ist vor allem für zukünftige Experimente wie LHC ('Large Hadron Collider') am CERN von besonderer Bedeutung, da ein entscheidender Test des Standardmodells, der experimentelle Nachweis des Higgs-Bosons, noch aussteht.

Die hier vorgestellte Arbeit wurde im Rahmen der ALEPH-Kollaboration durchgeführt und befaßt sich mit der Messung der Masse des W-Bosons aus seinen Zerfallsprodukten. Hierfür ist es besonders wichtig, daß die kinematische Rekonstruktion des 4-Fermion-Endzustandes, erzeugt durch die Reaktion $e^+e^- \rightarrow W^+W^- \rightarrow f_1f_2f_3f_4$, optimiert wird. Eine herausragende Rolle bei dieser Optimierung spielen sogenannte kinematische Anpassungen, mit denen dem im Detektor gemessenen Ereignis Zwangsbedingungen, wie zum Beispiel Energie- und Impulserhaltung, auferlegt werden können. Die detaillierte Beschreibung der Anpassungen ist ein essentieller Bestandteil dieser Arbeit. Desweiteren wird unter Verwendung der im Jahre 1997 mit dem Detektor ALEPH akkumulierten Daten bei einer Schwerpunktenergie von 183 GeV eine Messung der Masse des W-Bosons im semileptonischen Kanal ($W^+W^- \rightarrow e\nu qq, \mu\nu qq$) vorgestellt. Dabei werden auch die unterschiedlichen Möglichkeiten der kinematischen Rekonstruktion sowie verschiedene Methoden zur Extraktion der Masse des W-Bosons aus seiner invarianten Massenverteilung diskutiert.

Im einzelnen ist diese Arbeit wie folgt gegliedert:
Im **Kapitel 2** wird sowohl auf die Grundzüge der theoretischen Beschreibung des W-Bosons im Standardmodell als auch auf den momentanen Stand der experimentellen Untersuchungen eingegangen. Eine Darstellung der sich daraus ergebenden Methoden zur Massenmessung bei LEP 2 bildet den Abschluß dieses Kapitels. Eine kurze Beschreibung des Detektors ALEPH und des Speicherings LEP befindet sich in **Kapitel 3**. Gegenstand von **Kapitel 4** ist die Selektion von hadronischen und semileptonischen WW-Ereignissen und die damit eng verknüpfte Aufstellung der Rekonstruktionshypothese. Diese Hypothese hat entscheidenden Einfluß auf die in **Kapitel 5** ausführlich beschriebene Anwendung von kinematischen Anpassungen. Anhand eines eigens dafür entwickelten, auf der Methode von Lagrangeschen Multiplikatoren beruhenden, Anpassungspakets wird die unterschiedliche Behandlung von semileptonischen und hadronischen Ereignissen in der Anpassung vorgestellt. Zudem wird gezeigt, daß mit einer zusätzlichen Zwangsbedingung auf die beiden rekonstruierten Massen im Ereignis eine deutliche Verbesserung der Massenauflösung und somit eine genauere Messung der Masse des W's erreicht wird. In **Kapitel 6** wird am Beispiel des semileptonischen Kanals eine vollständige Massenmessung vorgestellt. Der Vergleich von acht verschiedenen, teilweise hochgradig korrelierten, Massenextraktionsmethoden zeigt deren Konsistenz und untermauert somit die Vertrauenswürdigkeit des Endergebnisses. Die Systematik dieser Messungen wird in **Kapitel 7** beschrieben, während sich die **Kapitel 8** und **9** den Vergleich mit anderen Messungen sowie der Zusammenfassung der Arbeit widmen.

Kapitel 2

Das W-Boson

In diesem Kapitel werden die theoretischen Aspekte, die zum Verständnis und zur Interpretation dieser Arbeit notwendig sind, beschrieben. Hierbei wird keinesfalls der Anspruch auf vollständige Darstellung der theoretischen Modelle gelegt, sondern vielmehr geht es um die Motivation der experimentellen Messung der Masse des W-Bosons.
Eine umfassendere Abhandlung der theoretischen Materie, aus der auch ein Großteil der in diesem Kapitel dargestellten Information entnommen ist, kann in [**?**], [**?**] und [**?**] gefunden werden.

2.1 Die elektroschwache Vereinheitlichung

Das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung ist eine Eichtheorie, die aus den Gruppen $SU(2)$ des *schwachen Isospins* T und $U(1)$ der *schwachen Hyperladung* Y aufgebaut ist. Die Formulierung dieser Eichtheorie geht auf Glashow, Salam und Weinberg zurück [**?**]. In dieser Theorie gibt es vier fundamentale masselose Vektorbosonen, wobei eines $\mathcal{B}_\mu$ auf die Gruppe $U(1)$ und drei $\vec{\mathcal{W}}_\mu = (\mathcal{W}^1_\mu, \mathcal{W}^2_\mu, \mathcal{W}^3_\mu)$ auf die Eichgruppe $SU(2)$ entfallen. Die Wechselwirkung der in Tabelle 2.1 dargestellten fundamentalen Fermionen mit den Vektorbosonen $\vec{\mathcal{W}}_\mu$ und $\mathcal{B}_\mu$ läßt sich durch folgende Lagrange-Dichte beschreiben:

$$\mathcal{L} = g\vec{J}_\mu \vec{\mathcal{W}}^\mu + g' J^Y_\mu \mathcal{B}^\mu \quad , \tag{2.1}$$

wobei $\vec{J}_\mu = (J^1_\mu, J^2_\mu, J^3_\mu)$ und J^Y_μ jeweils den schwachen Isospin[1]- bzw. den Hyperladungsstrom der Fermionen darstellen, g und g' sind ihre Kopplungen an die Vektorbosonen $\vec{\mathcal{W}}_\mu$ und $\mathcal{B}_\mu$. Definiert man die Hyperladung als die Differenz zwischen der elektrischen Ladung in Einheiten von e und der dritten Komponente des schwachen Isospins T_3, so läßt sich der Hyperladungsstrom wie folgt ausdrücken:

$$J^Y_\mu = J^{em}_\mu - J^3_\mu \quad . \tag{2.2}$$

Der elektromagnetische Strom J^{em}_μ koppelt nur an die elektrische Ladung Q.

Die Überführung der in Gleichung 2.1 verwendeten fundamentalen Felder in die physikalisch

[1] Analog zur quantenmechanischen Behandlung eines Teilchens mit Spin 1/2 können auch für den schwachen Isospin mit $T = 1/2$ Unterzuständen mit $T_3 = \pm 1/2$ definiert werden.

relevanten Felder W_μ^+, W_μ^-, Z_μ und A_μ erfolgt durch eine linearen Transformation:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\mu^1 \\ \mathcal{W}_\mu^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} cos\theta_W & -sin\theta_W \\ sin\theta_W & cos\theta_W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\mu^3 \\ \mathcal{B}_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad . \tag{2.3}$$

Der Winkel θ_W wird als schwacher Mischungswinkel oder auch Weinberg-Winkel bezeichnet und hängt mit den in Gleichnug 2.1 definierten Kopplungskonstanten g und g' wie folgt zusammen:

$$tan\theta_W = g'/g \tag{2.4}$$

Unter Verwendung der Gleichungen 2.2, 2.3 und 2.4 kann die in Gleichung 2.1 definierte Lagrange-Dichte folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{g}{\sqrt{2}}(J_\mu^- W^{+\,\mu} + J_\mu^+ W^{-\,\mu})}_{\substack{\text{schwacher geladener} \\ \text{Beitrag}}} + \underbrace{\frac{g}{cos\theta_W}(J_\mu^3 - sin^2\theta_W J_\mu^{em})Z^\mu}_{\substack{\text{schwacher neutraler} \\ \text{Beitrag}}} + \underbrace{gsin\theta_W J_\mu^{em} A^\mu}_{\substack{\text{e.m. neutraler} \\ \text{Beitrag}}} , \tag{2.5}$$

wobei an dieser Stelle $J_\mu^\pm = J_\mu^1 \pm iJ_\mu^2$ als schwacher geladener Strom definiert wird. Diese Separation der Lagrange-Dichte der elektroschwachen Wechselwirkung in die einzelnen physikalischen Beiträge erleichtert ihre Interpretation. Der elektromagnetische, neutrale Beitrag entspricht der, in der QED bereits definierten, Beschreibung der Wechselwirkung von geladenen Teilchen. Somit läßt sich das Feld A_μ als das in der QED definierte Photon interpretieren, dessen Kopplung gleich e ist. Also gilt:

$$e = gsin\theta_W \quad . \tag{2.6}$$

Der schwache, neutrale Beitrag setzt sich zusammen aus einem elektromagnetischen Anteil und einem schwachen Anteil. Somit koppelt das Z_μ, wie auch das Photon, an links- und rechtshändige Fermionen mit Ladung ungleich Null (paritätserhaltender Anteil). Aufgrund des Beitrages von J_μ^3 koppelt es aber noch zusätzlich an linkshändige Fermionen (paritätsverletzender Anteil), wobei hier die neutralen Neutrinos zu erwähnen sind. Der experimentelle Nachweis der schwachen neutralen Ströme gelang erstmals 1973 in Neutrino-Experimenten und war eine wichtige Bestätigung des elektroschwachen Standardmodells.

Entsprechend des Isospinformalismus der $SU(2)$ koppelt der schwache geladene Strom nur an linkshändige Fermionen und ist daher maximal paritätsverletzend. Auf der anderen Seite ist die elektromagnetische Wechselwirkung paritätserhaltend und unterscheidet deshalb nicht zwischen links- und rechtshändigen Fermionen. Es liegt daher nahe, die in Tablle 2.1 dargestellten Fermionen in linkshändige Dubletts mit $T = 1/2$ und $T_3 = \pm 1/2$ zusammenzufassen. Da die geladenen Leptonen und die Quarks Masse haben, treten sie auch als rechtshändige Teilchen auf, die nicht an den schwachen geladenen Strömen teilnehmen. Aus diesem Grund werden sie in Singuletts mit $T = 0$ angeordnet. Die Hyperladung Y wird so gewählt, daß sich, entsprechend $Y = T_3 - Q$, die Ladung der Fermionen ergibt. Die Quarks d', s' und

Fermionenmultipletts	T	T_3	Q/e	$Y = Q - T_3$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	1/2 1/2	+1/2 −1/2	0 −1	−1/2 −1/2
$e_R \quad \mu_R \quad \tau_R$	0	0	−1	−1
$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	1/2 1/2	+1/2 −1/2	+2/3 −1/3	+1/6 +1/6
$u_R \quad c_R \quad t_R$ $d_R \quad s_R \quad b_R$	0 0	0 0	+2/3 −1/3	+2/3 −1/3

Tabelle 2.1: *Übersicht über die heute als fundamental angesehenen Teilchen und deren für das $SU(2) \times U(1)$-Modell notwendigen Eigenschaften.*

b', die mit u, c und t linkshändige Dubletts bilden, sind Eigenzustände der elektroschwachen Wechselwirkung. Die Transformation dieser Zustände in die Eigenzustände der starken Wechselwirkung wird mit der unitären Cabbibo-Kobayashi-Maskawa Matrix V_{CKM} (CKM Matrix) durchgeführt:

$$\begin{pmatrix} u' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cd} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad . \tag{2.7}$$

Analog zur Mischungsmatrix der Quarks kann auch eine unitäre Matrix für die Leptonen aufgestellt werden. Da aber bis heute nicht nachgewiesen ist, daß Neutrinos massebehaftete Teilchen sind, ist diese Matrix diagonal. Im Falle der Quarks weichen die Diagonalelemente nur wenige Prozent von Eins ab und die Beiträge V_{cb} und V_{ts} sind um fast eine Größenordnung kleiner als die von V_{us} und V_{cd}. Die Übergänge von der dritten in die erste Generation sind sogar um fast zwei Zehnerpotenzen unterdrückt.

Der in Gleichung 2.5 definierte schwache neutrale Strom führt innerhalb des Standardmodells nicht zu sogenannten *Flavour-ändernden* Prozessen, in denen ein Fermion in ein anderes umgewandelt wird. Dies läßt sich mit der folgenden schematischen Darstellung[2] von J^3_μ zeigen:

$$J^3_\mu = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) T_3 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.8}$$

[2] Da es sich hier nur um eine qualitative Betrachtung handelt, werden Kopplungskonstanten und Raumzeitoperatoren wie γ_μ und γ_5 weggelassen.

wobei für $(f_1, f_2, f_3) = (d, s, b)$ noch entsprechend Gleichung 2.7 eine Transformation in die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung durchgeführt werden muß:

$$\begin{aligned} J_\mu^3 = & \quad (\bar{\nu_e}, \bar{\nu_\mu}, \bar{\nu_\tau}) \quad +1/2 \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ + & \quad (\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}) \quad -1/2 \begin{pmatrix} e \\ \nu \\ \tau \end{pmatrix} \\ + & \quad (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \quad +1/2 \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} \\ + & \quad (\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}) V_{CKM}^{-1} \quad -1/2 \quad V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Aufgrund der Unitarität der CKM Matrix hebt sich ihr Beitrag in dem letzten Abschnitt von Gleichung 2.9 gerade heraus. Somit bleibt der schwache neutrale Strom auch in der Massenbasis (d, s, b) Flavour-diagonal. Dies ändert sich allerdings für den ebenfalls in Gleichung 2.5 definierten geladenen Strom. Analog zu Gleichung 2.8 gilt:

$$J_\mu^+ = (\bar{\nu_e}_L, \bar{\nu_\mu}_L, \bar{\nu_\tau}_L) \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} + (\bar{u}_L, \bar{c}_L, \bar{t}_L) \quad V_{CKM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Aufgrund des Isospinformalismus verknüpft der geladene Strom Fermionen unterschiedlichen Flavours miteineinander[3]. Die CKM Matrix der Quarks bewirkt, daß nicht nur innerhalb eines Dubletts Übergänge möglich sind, sondern auch von einer Generation in die andere.

Abschließend bleibt festzustellen, daß die in Gleichung 2.5 definierte Lagrange-Dichte die Kopplungsstruktur der fundamentalen Fermionen an die Vektorbosonen W^+, Z, W^- und Photon beschreibt. Die $SU(2) \times U(1)$-Eichgruppe ermöglicht somit eine Vereinheitlichung von elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung.

Aufgrund der fast punktförmigen schwachen Wechselwirkung müssen die Vektorbosonen massiv sein. Ein möglicher Weg, den Teilchen Masse zu verleihen, wurde von Weinberg und Salam vorgeschlagen. Sie verwenden das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung[4], ohne dabei die Renormierbarkeit der Theorie zu zerstören. Zusätzlich zu den bereits definierten Fermionen- und Vektorbosonfeldern werden noch skalare Felder, sogenannte Higgs-Felder postuliert. In der einfachsten Version genügen zwei komplexe Felder Φ_1 und Φ_2. Diese skalaren Felder werden additiv in die in Gleichung 2.5 definierte Lagrange-Dichte aufgenommen. Die Struktur dieses Terms ist so gewählt, daß die $SU(2) \times U(1)$ Eichinvarianz erhalten bleibt. Durch die Dublettstruktur der Higgs-Felder und die unterschiedlichen Kopplungskonstanten der $SU(2)$ und der $U(1)$ können diese Felder zwischen den einzelnen Vektorbosonen unterscheiden. Infolge der spontanen Symmetriebrechung erhalten drei Bosonen (W^+, Z, W^-) eine Masse, während eines (Photon) masselos bleibt.

[3] Mathematisch sind hierfür die Aufsteige- und Absteigeoperatoren $T^\pm = T_1 \pm iT_2$ verantwortlich. Sie führen z.B. die Fermionenfelder (u_L, c_L, t_L) in die Felder (d'_L, s'_L, b'_L) über.

[4] Die Einführung der spontanen Symmetriebrechung stützte sich im wesentlichen auf Arbeiten von Higgs, Englert, Guralnik und Kibble und wird heutzutage meist als Higgsmechanismus bezeichnet.

Durch den Higgsmechanismus können also auch massive Eichbosonen in eine Eichtheorie eingebettet werden. Der Preis dafür ist die dazu notwendige Postulierung eines weiteren massiven neutralen Bosons mit Spin Null, dem sogenannten Higgs-Boson. Es koppelt an sich selbst, an $W^{\pm}$, Z und massebehaftete Fermionen mit einer Kopplungsstärke proportional zu deren Massen. Allerdings fehlt bis heute der experimentelle Nachweis dieses, für die Bestätigung des Standardmodells so entscheidenden, massenbehafteten Bosons.

2.2 Die Masse des W-Bosons

Entsprechend der Zählweise von [?] gibt es 18 freie Parameter innerhalb des Standardmodells, deren Werte experimentell ermittelt werden müssen. Aufgabe der modernen Teilchenphysik ist die Bestimmung dieser Parameter und der gleichzeitig damit verbundene Test des Modells. Eine dieser freien Größen ist die Masse M_W des geladenen Vektorbosons der elektroschwachen Wechselwirkung, dem sogenannten W-Boson. Sie ist über folgende Relation mit der Fermikonstanten G_F, der Masse des Z-Bosons M_Z und der elektromagnetischen Kopplungskonstanten α verknüpft:

$$G_F = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2(1 - M_W^2/M_Z^2)}\frac{1}{1-\Delta r} \quad . \tag{2.11}$$

Dabei steht Δr für elektroschwache Strahlungskorrekturen, die zum einen das Laufen von α berücksichtigen, und zum anderen auch Beiträge von virtuellen Bosonen- und Fermionenloops, wie sie in Abbildung 2.1 schematisch dargestellt sind, enthalten. Diese Loopkorrekturen hängen insbesondere von der Masse des Higgs-Bosons (M_H) und der des t-Quarks (M_t) ab. Je nach Interpretation von Gleichung 2.11 ergibt sich somit eine von M_H und M_t abhängige Bestimmung von M_W oder die Möglichkeit, bei bekanntem M_W, Schranken auf M_H und M_t anzugeben. Beide Fälle stellen einen fundamentalen Konsistenztest des Standardmodells dar und werden in Abschnitt 2.2.2 noch genauer diskutiert.

Abbildung 2.1: *Strahlungskorrekturen zur Masse des W-Bosons aufgrund von Bosonenaustausch (links) und Fermionenaustausch (rechts).*

2.2.1 Bestimmung von M_W in $p\bar{p}$-Kollisionen

Historisch gesehen kommt der Untersuchung der Vektorbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung an Hadron-Speicherringen eine besondere Bedeutung zu, da dort erstmalig die Existenz des W- und Z-Bosons nachgewiesen werden konnte.

Im Jahre 1983 gelang den Experimenten UA1 [?] und UA2 [?] am CERN bei $\sqrt{s} = 540\ GeV$ die Rekonstruktion der Zerfälle:

$$Z \rightarrow e^+e^- \quad und \quad Z \rightarrow \mu^+\mu^-$$

sowie

$$W^{\pm} \rightarrow e^+\nu_e, e^-\bar{\nu}_e \quad und \quad W^{\pm} \rightarrow \mu^+\nu_\mu, \mu^-\bar{\nu}_\mu$$

und somit der Beweis der Existenz von W und Z.

Zur direkten Messung von M_W werden bei $p\bar{p}$-Kollisionen nur Reaktionen der Art $W^{\pm}X \rightarrow l^{\pm}\nu X$ verwendet. Hierfür wird die sogenannte transversale Masse M_T des $l\nu$-Systems wie folgt definiert:

$$M_T^2 = 2p_T^l p_T^\nu (1 - cos\Phi_{l\nu}) \quad .$$

Dabei steht p_T^l (p_T^ν) für den senkrecht zur Strahlrichtung stehenden Anteil des Lepton-(Neutrino-)Impulses und $\Phi_{l\nu}$ für den Azimutwinkel zwischen beiden. Da das Neutrino nicht im Detektor nachgewiesen werden kann, wird p_T^ν aus dem fehlenden transversalen Impuls des Ereignisses abgeleitet. Die Masse des W-Bosons wird dann durch Vergleich der gemessenen M_T-Verteilung mit Spektren aus Simulationsrechnungen für verschiedene M_W's bestimmt. Ein Beispiel für eine derartige Verteilung ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

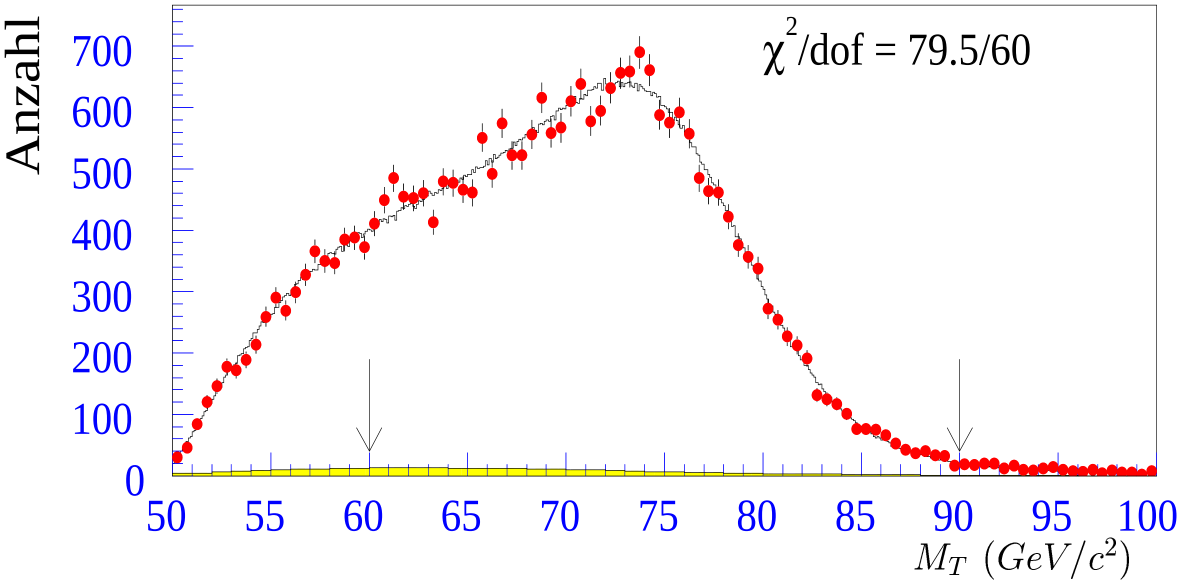


Abbildung 2.2: *Darstellung der transversalen Massenverteilung M_T gemessen von der D0-Kollaboration [?]. Die Pfeile grenzen die Region ein, in der die Anpassung der simulierten Spektren an die Daten vorgenommen wurde.*

Die ersten Messungen von M_W wurden ebenfalls von UA1 [?] und UA2 [?] durchgeführt und ergaben:

$$M_W = 81.00^{+5}_{-5} GeV/c^2 \qquad \text{(UA1)}$$

$$M_W = 80.00^{+10}_{-6} GeV/c^2 \qquad \text{(UA2)} \quad .$$

Beide Werte sind in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen des Standardmodells (siehe 2.12).

Die derzeit genauesten Bestimmungen von M_W an $p\bar{p}$-Speicherringen kommen vom TEVATRON am Fermilab in den USA. Bei einer Schwerpunktenergie von 1.8 TeV haben die Experimente D0 und CDF M_W wie folgt bestimmt [**?**]:

$$M_W = 80.43 \pm 0.110 \quad GeV/c^2 \qquad \text{(D0)}$$

$$M_W = 80.38 \pm 0.120 \quad GeV/c^2 \qquad \text{(CDF)} \quad .$$

Es ist geplant, daß das TEVATRON im Jahre 2000 erneut mit der Datennahme beginnt. Bei einer erwarteten integrierte Luminosität von 2 fb^{-1} wird der Fehler auf die Masse des W-Bosons etwa $\Delta M_W = 30 - 40 \quad MeV/c^2$ betragen. Dies ist allerdings frühestens für das Ende des Jahres 2002 zu erwarten.

2.2.2 Bestimmung von M_W in e^+e^--Kollisionen

Im Gegensatz zu $p\bar{p}$-Kollisionen wird an e^+e^--Speicherringen aufgrund der Ladungserhaltung das W-Boson vorwiegend paarweise produziert. Dafür muß die Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ mindestens die Schwellenenergie für die Produktion von W-Boson-Paaren von ca. 160 GeV überschreiten. Dies ist zum ersten Mal im Juni 1996 am Speicherring LEP2 am CERN erreicht worden, wo e^+e^--Paare mit $\sqrt{s} = 161$ GeV zur Kollision gebracht wurden.
Zuvor konnte bei LEP mit Strahlenergien von 46 GeV nur eine indirekte Bestimmung von M_W durchgeführt werden.

In den beiden nachfolgenden Abschnitten wird etwas ausführlicher auf die Bedeutung der indirekten Massenmessung bei LEP und die der direkten Messung bei LEP2 eingegangen.

Indirekte Messung von M_W bei LEP

Nach Beendigung von LEP im Jahre 1995 konnte eine sehr genaue Messung der Masse des Z-Bosons durchgeführt werden [**?**]:

$$M_Z = 91.1867 \pm 0.0020 \quad GeV/c^2 \quad .$$

Mit einer relativen Genauigkeit von $\mathcal{O}(10^{-5})$ ist M_Z um zwei Größenordnungen genauer bekannt als die beste an $p\bar{p}$-Speicherringen direkt gemessene Masse des W's.
Eine genauere, wenn auch indirekte, Bestimmung von M_W kann unter Zuhilfenahme des Standardmodells durchgeführt werden. Gleichung 2.11 gibt den Zusammenhang von M_W mit M_Z, G_F und α im Standardmodell an. Aufgrund der in Abbildung 2.1 dargestellten Loopkorrekturen ergibt sich noch eine zusätzliche Sensitivität von M_W auf das Quadrat von M_t und den Logarithmus der Masse des Higgs-Bosons. Daher kann aus globalen Anpassungen der freien Parameter des Standardmodells an die in großer Zahl und mit hoher Genauigkeit[5] zur Verfügung stehenden Meßwerte die Masse des W-Bosons bestimmt werden. Aus diesen Anpassungen stammt derzeit der genaueste Wert für M_W [**?**]:

$$M_W^{indirekt} = 80.351 \pm 0.040 \quad GeV/c^2 \quad , \tag{2.12}$$

[5]Die Masse des Z-Bosons sowie G_F sind mit einer relativen Genauigkeit von $\mathcal{O}(10^{-5})$ bekannt. Entsprechend Gleichung 2.11 haben beide einen großen Einfluß auf M_W.

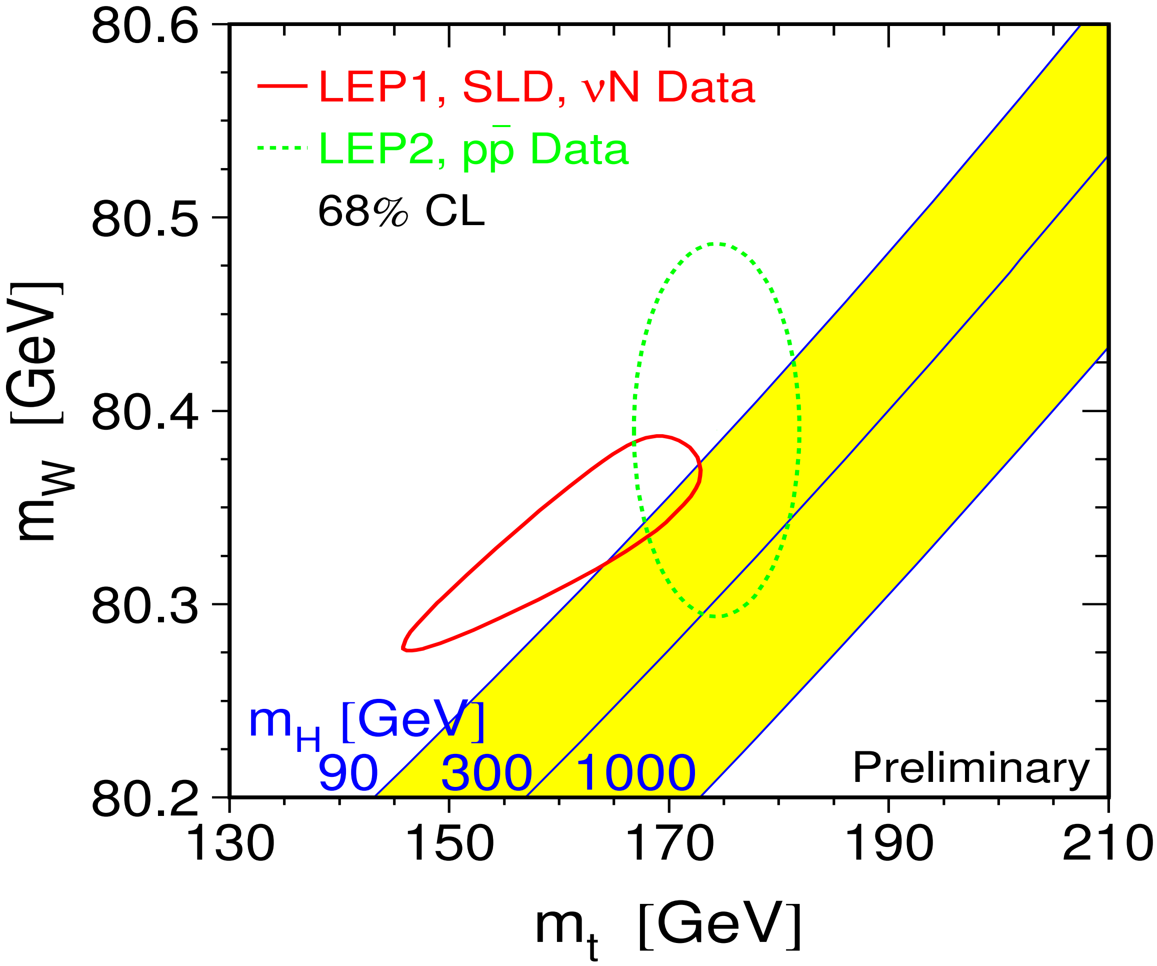


Abbildung 2.3: *Vergleich der direkten Messung von M_W und M_t (gestrichelte 68%-CL-Kontur) mit der indirekten Messung dieser Größen, die sich aus Anpassung an das Standardmodell ergeben (durchgezogene 68%-CL-Kontur). Der schraffierte Bereich stellt den Zusammenhang der Massen als Funktion von M_H im Standardmodell dar. Diese Darstellung ist aus [**?**] entnommen.*

wobei hier keine direkte Messung von M_W in die Anpassung eingegangen ist. Die beiden weiteren, nicht mit Messungen eingeschränkten Anpassungsvariablen ergeben sich zu:

$$M_t^{indirekt} = 161^{+9}_{-8} \quad GeV/c^2 \quad und \quad M_H^{indirekt} = 33^{+45}_{-17} \quad GeV/c^2 \quad .$$

In Abbildung 2.3 ist die Abhängigkeit der indirekt bestimmten Größen M_W,M_t und M_H untereinander dargestellt. Eindeutig ist dabei die logarithmische Sensitivität auf die Masse des Higgs-Bosons zu sehen. Die indirekte Messung bevorzugt Werte von M_H die weit unterhalb von 1 TeV/c^2 liegen. Diese Information ist vor allem für zukünftige Experimente wie LHC ('Large Hadron Collider') am CERN von besonderer Bedeutung.

Direkte Messung von M_W bei LEP2

Der Vergleich einer direkten modellunabhängigen Messung der Masse des W-Bosons mit dem in 2.12 angegeben Wert aus der indirekten Messung stellt einen fundamentalen Test des Standardmodells dar. Mit einer relativen Genauigkeit von $\mathcal{O}(10^{-4})$ ist die indirekte Messung immer noch eine Größenordung genauer als die an $p\bar{p}$-Speicherringen direkt gemessene Masse. Aufgabe von LEP2 ist es, die direkte Messung von M_W mit einer mit der indirekten Messung vergleichbaren Präzision durchzuführen. Der am Ende von LEP2 erwartete Fehler auf M_W liegt bei etwa 30-40 MeV/c^2. Die hierfür angewendeten Methoden sind in 2.3.2 beschrieben. Derzeit (Januar 1999) ergibt die Kombination aller Messungen bei LEP2 [**?**]:

$$M_W^{direkt} = 80.35 \pm 0.09 \quad GeV/c^2 \quad . \tag{2.13}$$

Dieser Wert steht in sehr guter Übereinstimmung mit dem Resultat aus der indirekten Messung (2.12). In Abbildung 2.3 ist der Vergleich von direkter und indirekter Messung graphisch dargestellt. Die hierfür notwendige direkte Messung der Masse des t-Quarks ist am TEVATRON durchgeführt worden und ergab [**?**]:

$$M_t^{direkt} = 174.1 \pm 5.4 \quad GeV/c^2 \quad .$$

Abschließend kann festgestellt werden, daß eine direkte Messung der Masse des W-Bosons einen wichtigen Test des Standardmodells darstellt, da sie mit den indirekten Vorhersagen von Anpassungen der bereits mit hoher Genauigkeit gemessenen Parameter des Modells verglichen werden kann. Dies gilt insbesondere, wenn die Messungen die Präzision der Anpassung erreichen ($\mathcal{O}(10^{-4})$).
Wird noch die direkte Bestimmung der Masse des t-Quarks am TEVATRON berücksichtigt, ergibt sich die Möglichkeit, den erlaubten Bereich der Masse des Higgs-Bosons im Standardmodell einzuschränken.

2.3 W-Physik bei LEP2

Im ersten Teil dieses Abschnitts wird speziell auf die Beschreibung der W-Physik an e^+e^--Speicherringen eingegangen. Die sich daraus ergebenden Methoden zur Bestimmung der Masse des W-Bosons werden dann im zweiten Teil behandelt.

2.3.1 $e^+e^- \rightarrow W^+W^- \rightarrow f_1f_2f_3f_4$

Oberhalb einer Schwerpunktenergie von $\sqrt{s} \approx 161\ GeV$ können bei LEP2 W-Bosonen paarweise erzeugt werden. Der Prozeß $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ wird auf Bornniveau durch die sogenannten CC03-Diagramme beschrieben. In Abbildung 2.4 sind die entprechenden Feynmangraphen dargestellt. Im t-Kanal findet die Produktion über den Austauch eines Neutrinos statt, während im s-Kanal entweder ein Z-Boson oder ein Photon ausgetauscht wird.
Der Wirkungsquerschnitt auf Bornniveau ist wie folgt gegeben:

$$\sigma^{CC03}(s) = \int_0^s ds_1 \int_0^{(\sqrt{s}-\sqrt{s_1})^2} ds_2 \rho(s_1)\rho(s_2)\sigma_0^{CC03}(s, s_1, s_2) \quad , \tag{2.14}$$

wobei σ_0^{CC03} durch den Beitrag von t- und s-Kanal sowie deren Interferenzen bestimmt ist:

$$\sigma_0^{CC03} = \sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{ZZ} + \sigma_{\nu\nu} + \sigma_{Z\gamma} + \sigma_{Z\nu} + \sigma_{\nu\gamma} \quad .$$

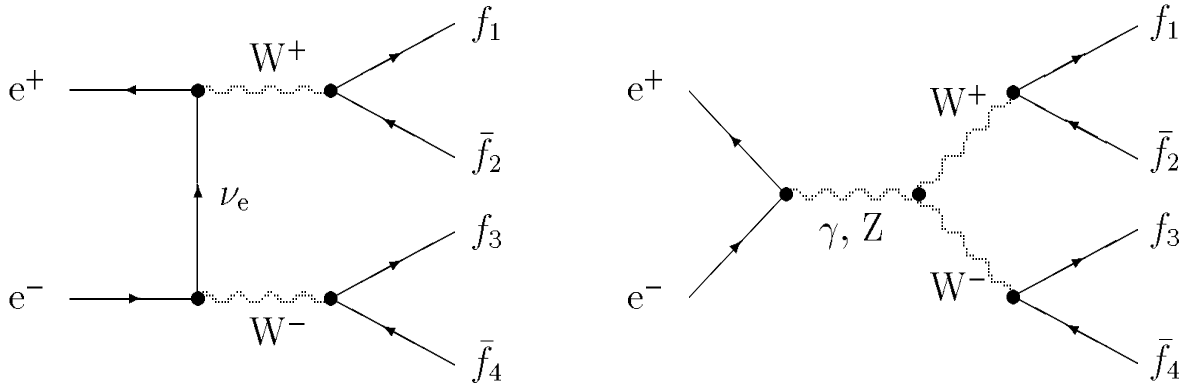


Abbildung 2.4: *CC03-Graphen für die Produktion von W-Paaren. Der t-Kanal ist links und der s-Kanal ist rechts dargestellt. Der Endzustand ist durch vier Fermionen charakterisiert.*

Eine ausführliche Aufstellung der einzelnen Beiträge ist in [**?**] zu finden. Im Limit für stabile W-Bosonen ($\Gamma_W \to 0$) geht Gleichung 2.14 in den sogenannten *on-shell*-Wirkungsquerschnitt über:

$$\sigma^{CC03}_{on-shell}(s) = \sigma^{CC03}_0(s, M_W^2, M_W^2) \quad mit \quad \rho(s) = \delta(s - M_W^2) \quad .$$

Für zerfallende W's erhält man den *off-shell*-Wirkungsquerschnitt indem in Gleichung 2.14 für $\rho(s)$ eine Breit-Wigner Verteilung eingesetzt wird:

$$\rho(s) = \mathcal{BW}(s) = \frac{1}{\pi}\frac{\Gamma_W}{M_W}\frac{s}{(s - M_W^2)^2 + s^2\Gamma_W^2/M_W^2} \quad . \tag{2.15}$$

Entsprechend Gleichung 2.14 ergibt sich die einzige Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von M_W und Γ_W über die Breit-Wigner Verteilung in der *off-shell*- Variante. Der Rest der Gleichung ist unabhängig von beiden Größen [6].

Im Fall des *off-shell*-Wirkungsquerschnitts besitzt das W-Boson eine endliche Breite, die sich aus der Summe der Partialbreiten für die Reaktion $W \to f_i f_j$ ergibt. Unter Vernachlässigung der Fermionenmassen ($M_W \gg m_f$) kann auf Bornniveau die partielle Breite des W-Bosons für eine Kopplung an ein beliebiges Fermionpaar dargestellt werden:

$$\Gamma^{Born}_{W \to f_i f_j} = \frac{N_C^f}{12}\frac{\alpha M_W}{sin^2\theta_W}|V_{ij}|^2 \quad .$$

Hierbei bezeichnet θ_W den Weinberg-Winkel, α die elektromagnetische Kopplungskonstante und N_C^f den Farbfaktor, der für Quarks 3 und für Leptonen 1 beträgt. Wie in Abschnitt 2.1 bereits besprochen, ist die CKM Matrix für Leptonen diagonal und die Übergangswahrscheinlichkeit V_{ii}^2 immer 100%. Werden auch die Nebendiagonalelemente der Mischungsmatrix der Quarks vernachlässigt und berücksichtigt man noch zusätzlich, daß der Zerfall $W \to tx$ aufgrund der großen Masse des t-Quarks ($M_t \approx 2M_W$) kinematisch nicht möglich ist, bleiben nur zwei hadronische Zerfallsmoden für das W übrig:

$$W \to ud' \quad \text{und} \quad W \to cs' \quad .$$

[6]Dies gilt nur, wenn Strahlungskorrekturen nicht berücksichtigt werden.

Zusammen mit den drei leptonischen Kanälen ergibt sich damit als Näherung für Γ_W:

$$\Gamma_W^{Born} \approx (2 \times 3 + 3) \frac{\alpha M_W}{12 sin^2_{\theta_W}} = \frac{3}{4} \frac{\alpha M_W}{sin^2 \theta_W} \quad . \tag{2.16}$$

Der W-Paar-Zerfall wird somit durch einen Vier-Fermion-Endzustand charakterisiert. In Tabelle 2.2 sind die Bezeichnungen für die einzelnen Zerfallskanäle definiert. Die entprechenden Verzweigungsverhältnisse können aus Gleichung 2.16 abgeleitet werden.

Zerfallskanal	VV (in %)	Bezeichnung
$WW \to q\bar{q}q'\bar{q}'$	44.4	hadronisch
$WW \to q\bar{q}l\nu_l$	29.6	semileptonisch
$WW \to l\nu_l l\nu_l$	4.9	leptonisch
$WW \to q\bar{q}\tau\nu_\tau$	14.8	τ
$WW \to l\nu_l\tau\nu_\tau$	4.9	τ
$WW \to \tau\nu_\tau\tau\nu_\tau$	1.2	τ

Tabelle 2.2: *Verzweigungsverhältnisse (VV) der verschiedenen Zerfallskanäle und deren Bezeichnungen.*

4-Fermion-Endzustand

Die Paarproduktion von W-Paaren ist nicht der einzige Prozeß, bei dem 2 Elektronen im Anfangszustand in vier Fermionen im Endzustand überführt werden. In Abbildung 2.5 sind Beispiele für solche Feynman-Diagramme dargestellt. Diese Graphen können den gleichen Endzustand wie die CC03-Graphen aufweisen, so daß prinzipiell mit Beiträgen aus Interferenzen gerechnet werden muß. Eigentlich hat also eine Klassifizierung in CC03-Diagramme und Nicht-CC03-Diagramme keine physikalische Bedeutung. Aus 4-Fermion-Rechnungen und Monte-Carlo-Simulation hat sich allerdings ergeben, daß diese Interferenzterme klein sind und eine Vernachlässigung nur zu kleinen Effekten führt, die im systematischen Fehler absorbiert werden können.

Unter Vernachlässigung von Interferenzen zwischen den Diagrammen, die zu einem 4-Fermion-Endzustand führen, kann der totale Wirkungsquerschnitt in Signal (CC03) und Untergrund aufgeteilt werden:

$$\sigma^{tot}_{e^+e^- \to 4f} = \sigma^{CC03} + \sigma^{bkd} \quad . \tag{2.17}$$

Korrekturen zu σ^{CC03}

Um eine realistische Beschreibung der W-Paar-Produktion bei LEP2 zu bekommen, muß der in niedrigster Ordnung berechnete *off-shell*-Wirkungsquerschnitt (siehe Gleichung 2.14) noch mit Korrekturen versehen werden:

$$\sigma^{WW} = \sigma^{CC03}(1 + \delta_{EW} + \delta_{QCD}) \quad . \tag{2.18}$$

Dabei steht δ_{EW} für Korrekturen von σ^{CC03} durch Berechnungen von Effekten höherer Ordnung wie zum Beispiel Emission von reellen Photonen im Anfangszustand (ISR). In δ_{QCD}

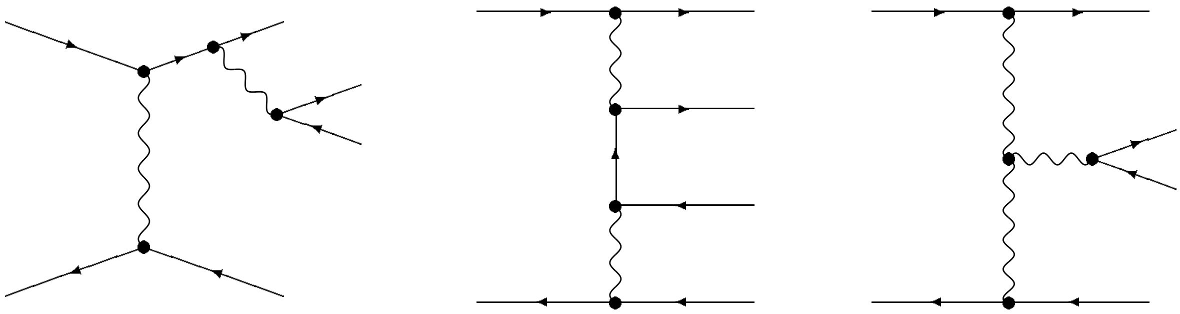


Abbildung 2.5: *Typische Untergrund-Diagramme, die zu vier Fermionen im Endzustand führen.*

sind die QCD-Korrekturen für den W-Paar-Zerfall mit Quarks im Endzustand enthalten. In [?] und [?] werden diese Korrekturen ausführlicher diskutiert. An dieser Stelle wird nur eine kurze Zusammenfassung der für diese Arbeit wichtigen Korrekturen gegeben:

- ISR-Korrektur

  Diese Korrektur ist durch die Abstrahlung eines reellen Photons von einem der beiden Elektronen im Anfangszustand charakterisiert. Dies hat zur Folge, daß nahe der Erzeugungsschwelle für W-Paare der rapide Anstieg des Born-Wirkungsquerschnitts aufgeweicht wird. Die effektive Reduzierung der Schwerpunktenergie führt im Falle einer direkten Messung von M_W aus der invarianten Massenverteilung der Zerfallsprodukte zu einer Überschätzung der Massenwerte (siehe hierzu auch die Kapitel 5 und 6).

- Coulomb-Korrektur

  Die sogenannte Coulomb-Singularität wird durch den niederenergetischen Austausch von Photonen zwischen den beiden W's erzeugt. Sie ist somit ein Beispiel für eine QED-Wechselwirkung zwischen Bosonen. Mit etwa 6% liefert diese Korrektur vor allem an der Erzeugungsschwelle einen signifikanten Beitrag zum Wirkungsquerschnitt.

- Gluon-Bremsstrahlung

  Hierbei handelt es sich um eine QCD-Korrektur, bei der eines der beiden Quarks aus einem hadronischen W-Zerfall ein oder mehrere harte Gluonen emittiert ($W \to q\bar{q}g$). Dies führt zu zusätzlichen Jets im Endzustand. Für die Messung von M_W aus dem Schwellenverhalten des Wirkungsquerschnitts ist diese Korrektur vernachlässigbar. Jedoch hat sie, ebenso wie die ISR-Korrektur, einen großen Einfluß auf die kinematische Rekonstruktion der Ereignisse und somit auch auf die direkte Messung der Masse (siehe dazu auch Kapitel 5).

Zusammenfassung der theoretischen Aspekte

Bei der W-Paar-Produktion handelt es sich um einen 4-Fermion-Prozeß, der in niedrigster Ordung durch drei Diagramme beschrieben werden kann. Allerdings sind diese CC03-Graphen nicht die einzigen Diagramme mit vier Fermionen im Endzustand. Die sogenannten

Untergrund-Prozesse interferieren nur geringfügig mit den Signal-Prozessen und somit ist eine Aufteilung des Wirkungsquerschnitts für die Produktion von vier Fermionen in einen Signal- und Untergrundanteil gerechtfertigt.
Der Signalwirkungsquerschnitt kann durch $\sigma^{CC03}_{on-shell}$ in Gleichung 2.14 beschrieben werden. Hierbei wird davon ausgegangen, daß die invariante Massenverteilung der W-Bosonen durch eine in Gleichung 2.15 definierte relativistische Breit-Wigner Verteilung gegeben ist. Um mit der Beschreibung des Wirkungsquerschnitts für die W-Paar-Produktion realistische Vorhersagen zu machen, müssen noch Strahlungskorrekturen höherer Ordung angefügt werden. Dabei sind vor allem die ISR- und Coulomb-Korrekturen von besonderer Bedeutung. In Abbildung 2.6 ist der theoretische Wirkungsquerschnitt für die W-Paar-Produktion in der Nähe der Erzeugungsschwelle für die verschiedenen Approximationsstufen dargestellt. Sehr deutlich ist dabei die Evolution der exakt bei $\sqrt{s} = 2M_W$ ansetzenden Flanke in der *on-shell*-Approximation ($\Gamma_W = 0$) zu einer stark aufgeweichten Verteilung zu sehen.

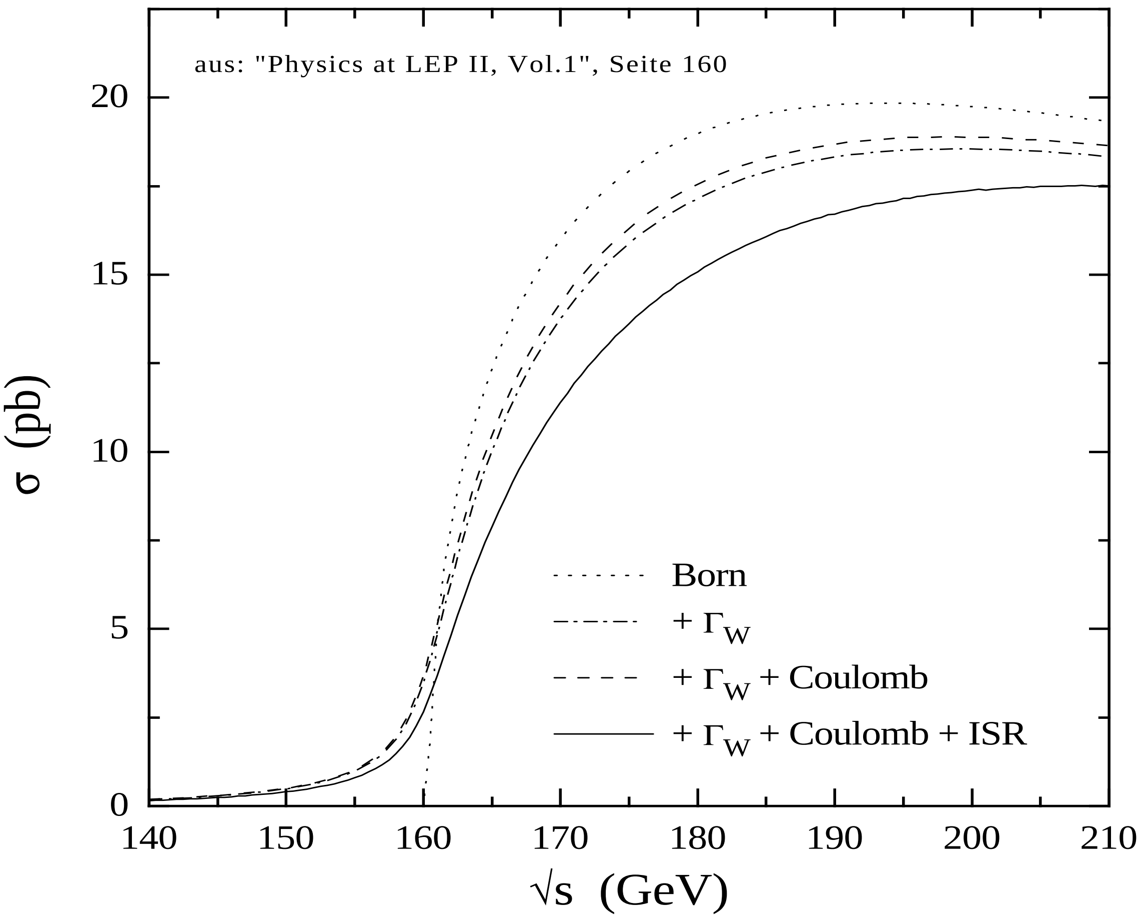


Abbildung 2.6: *Darstellung des in Gleichung 2.14 definierten totalen Wirkungsquerschnitts in Abhängigkeit von $\sqrt{s}$ für eine Masse von 80 GeV/c^2. Die einzelnen Stufen entsprechen den im Text beschriebenen Modifikationen von σ^{WW}.*

2.3.2 Methoden zur Massenmessung

In diesem Abschnitt werden Methoden zur Messung der W-Masse bei LEP2 vorgestellt. Im wesentlichen können drei Kategorien unterschieden werden, die sowohl auf unterschiedliche theoretische als auch auf verschiedene experimentelle Aspekte zurückgreifen.

Schwellenmethode

Wie bereits zuvor erwähnt hat der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von W-Paaren eine Sensitivität auf die W-Masse und Breite, die im wesentlichen über die Breit-Wigner Verteilungen in Gleichung 2.14 gegeben ist. Aufgrund der notwendigen Korrekturen höherer Ordung, wie ISR und Coulomb-Singularität, ergibt sich allerdings auch hier eine zusätzliche, wenn auch kleine Massen- und Breitenabhängigkeit. Mit Hilfe von Simulationen, die *off-shell*-Rechnungen und QED-Korrekturen höherer Ordnung enthalten, kann eine Anpassung der gemessenen Wirkungsquerschnitte an die Vorhersagen des Standardmodells gemacht werden. Ein Vergleich der bei LEP2 gemessenen Wirkungsquerschnitte mit dieser Vorhersage ist in Abbildung 2.7 zu sehen. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung der gemessenen Wirkungsquerschnitte mit der Vorhersage des Standardmodells. Aus der Energieabhängigkeit des

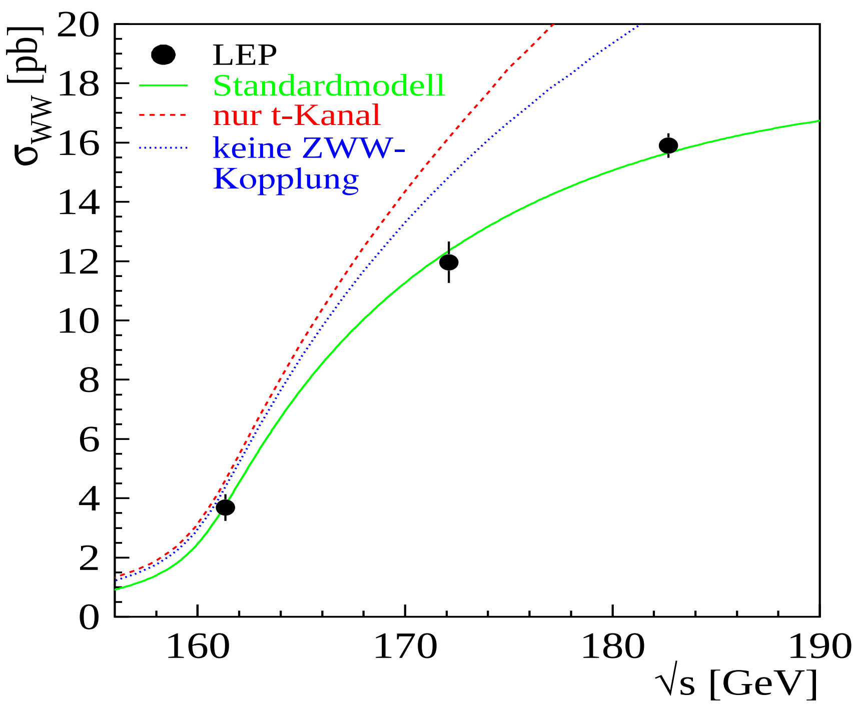


Abbildung 2.7: *Anpassung der Messungen des Wirkungsquerschnitts bei LEP. Gezeigt ist eine Kombination der vier LEP-Experimente bei $\sqrt{s}$ =161, 172, 183. Die Vorhersage des Standardmodells wurde mit dem in 2.13 gezeigten Massenwert erstellt. Als Vergleich sind auch die Vorhersagen des Wirkungsquerschnitts für den reinen t-Kanal sowie für die Annahme verschwindender ZWW-Kopplung dargestellt.*

Wirkungsquerschnitts kann abgeleitet werden, daß die höchste Sensitivität dieser Messung bei $\sqrt{s} \approx 161\ GeV$ erreicht wird[7]. Somit wird die Messung von M_W mit dieser Methode bei höheren Energien keine wichtige Rolle spielen.

Leptonspektrum

Bei dem Zerfall des W-Bosons wird die zur Verfügung stehende Energie auf die beiden Fermionen verteilt. Unter Vernachlässigung der Fermionenmassen kann das Energiespektrum der Leptonen im Laborsystem wie folgt beschrieben werden:

$$E^l_{Lab} = \frac{e_l}{M_W}(E_W - P_W cos\Theta^\star) \quad ,$$

wobei e_l die Energie der Leptonen im Ruhesystem des W's ist und $E_W(P_W)$ die Energie (der Impuls) des Bosons im Laborsystem darstellt. Der Winkel $\Theta^\star$ spiegelt den Zusammenhang zwischen der Richtung des Leptons im Ruhesystem und der des W's im Laborsystem wider und ergibt sich direkt aus einer Lorentz-Transformation. Im Falle der *on-shell*-Beschreibung des W-Bosons ist dieses Energiespektrum durch zwei scharfe Ränder beschränkt:

$$E^l_{Lab}(\pm) = \frac{\sqrt{s}}{4} \pm \sqrt{\frac{s}{16} - \frac{M_W^2}{4}} \quad .$$

Über die Bestimmung dieser Extremalenergien ergibt sich eine direkte Sensitivität auf die Masse des W-Bosons. Wie bereits erwähnt, ist die *on-shell*-Approximation nur ein Grenzfall für $\Gamma_W \to 0$. Für $\Gamma_W > 0$ gibt es momentan noch keine analytische Beschreibung des Energiespektrums der Leptonen. In Simulationsrechnungen zeigt sich aber, daß ähnlich wie bei dem Verhalten des totalen Wirkungsquerschnitts, ein Aufweichen der scharfen Kanten für die Grenzenergien $E^l_{Lab}(\pm)$ entsteht. In Abbildung 2.8 ist das Energiespektrum in der *off-shell*- und *on-shell*-Approximation dargestellt.

Durch Anpassung von Spektren aus Simulationsrechnungen an die gemessene Energieverteilung der Leptonen kann die Masse des W-Bosons bestimmt werden. Eine im Rahmen der ALEPH-Kollaboration durchgeführte Messung mit semileptonischen Ereignissen ergab [**?**]:

$$M_W = 80.704^{+0.760}_{-0.793}(stat.) \pm 0.092(syst.)^{+0.554}_{-0.361}(MCstatistik) \quad GeV/c^2 \quad .$$

Mit einem statistischen Fehler von etwa 700-800 MeV/c^2 auf M_W hat diese Messung jedoch nur etwa ein Drittel der Sensitivität wie die Methode der direkten Rekonstruktion (siehe Kapitel 6). Aus diesem Grund wird die Bestimmung der Masse des W-Bosons aus dem Leptonspektrum meist nur als Überprüfung der anderen Methoden eingesetzt.

Direkte Rekonstruktion

Bei dieser Methode wird eine vollständige Rekonstruktion des Ereignisses vorgenommen. Aufgrund der erheblich unterschiedlichen experimentellen Signaturen der einzelnen Zerfallskanäle sind die Anforderungen an die Rekonstruktion vielfältig. Allen Kanälen[8] ist jedoch zu eigen, daß mit einer kinematischen Anpassung, unter Auferlegung von Zwangsbedingungen wie Energie- und Impulserhaltung, die Massenauflösung deutlich verbessert werden kann.
Entscheidender Vorteil dieser Methode ist, im Gegensatz zur Bestimmung von M_W aus dem

[7] Bei dieser Energie setzt in der *on-shell*-Approximation von σ^{WW} gerade die W-Paar-Produktion ein.

[8] Im Falle des rein leptonischen Zerfalls ergibt sich zusätzlich die Schwierigkeit, daß es keine eindeutige Lösung gibt.

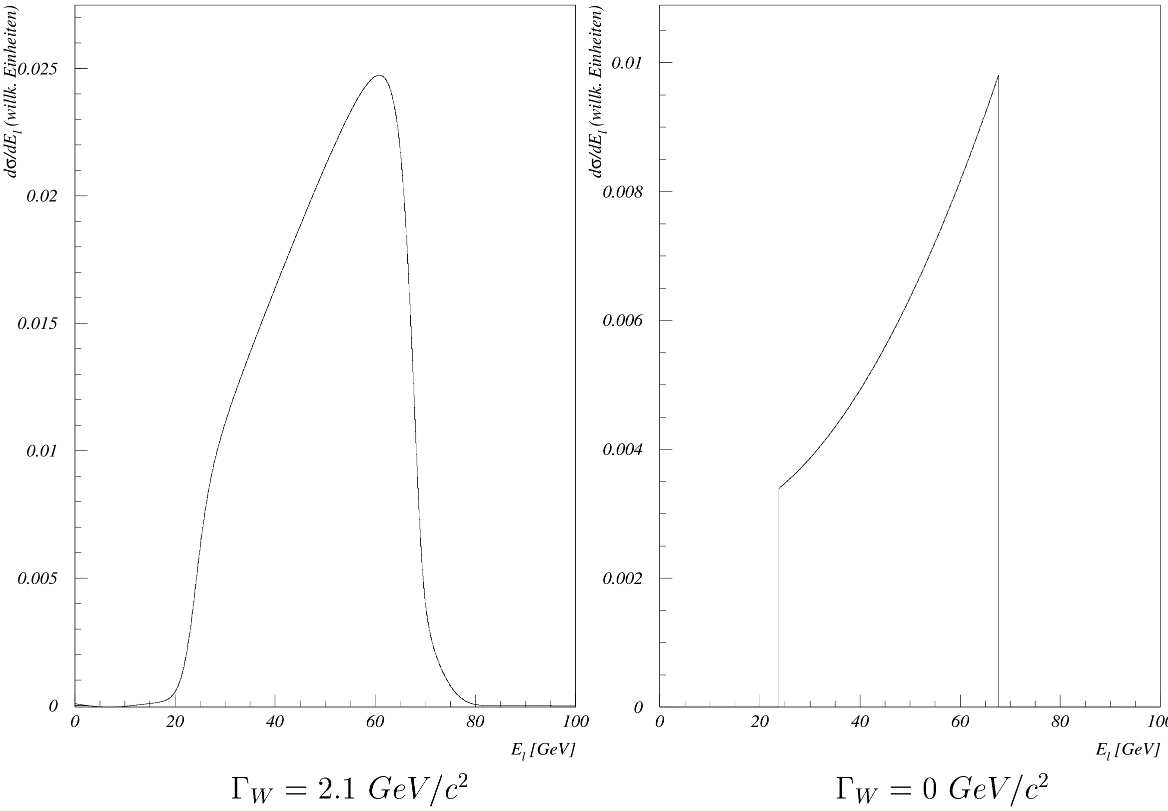


Abbildung 2.8: *Energiespektrum der Leptonen für endliche (links) und verschwindende Breite des W's (rechts) bei* $\sqrt{s} = 183\ GeV$. *Der Anstieg des Wirkungsquerschnitts mit steigender Energie ist auf Polarisationseffekte zurückzuführen.*

Wirkungsquerschnitt, die annähernde Energieunabhängigkeit der Sensitivität auf M_W. Somit tragen alle Messungen bei verschiedenen $\sqrt{s}$ entprechend der akkumulierten Statistik zur endgültigen bei LEP2 bestimmten Masse des W-Bosons bei. Dies ist besonders wichtig, da die Aufgabe von LEP2 nicht nur die Vermessung des W-Bosons sondern auch die Suche nach neuer Physik oder dem Higgs-Boson ist. Hierfür ist allerdings eine kontinuierliche Steigerung der Schwerpunktenergie erforderlich.

Die Methode der direkten Rekonstruktion und die damit eng verknüpfte kinematische Anpassung ist Mittelpunkt dieser Arbeit. Die Motivation basiert vor allem darauf, daß damit die genaueste Messung der Masse des W-Bosons bei LEP2 möglich ist. Die Messungen aus dem Wirkungsquerschnitt oder dem Leptonspektrum haben entweder eine stark energieabhängige oder unzureichende Sensitivität und werden daher nicht weiter betrachtet.

Kapitel 3

Experiment

In diesem Kapitel wird kurz der Aufbau des Experiments, bestehend aus dem Speicherring LEP (Large Elektron Positron collider) und dem Detektorsystem ALEPH (Apparatus for LEP PHysics), beschrieben.

3.1 Speicherring LEP

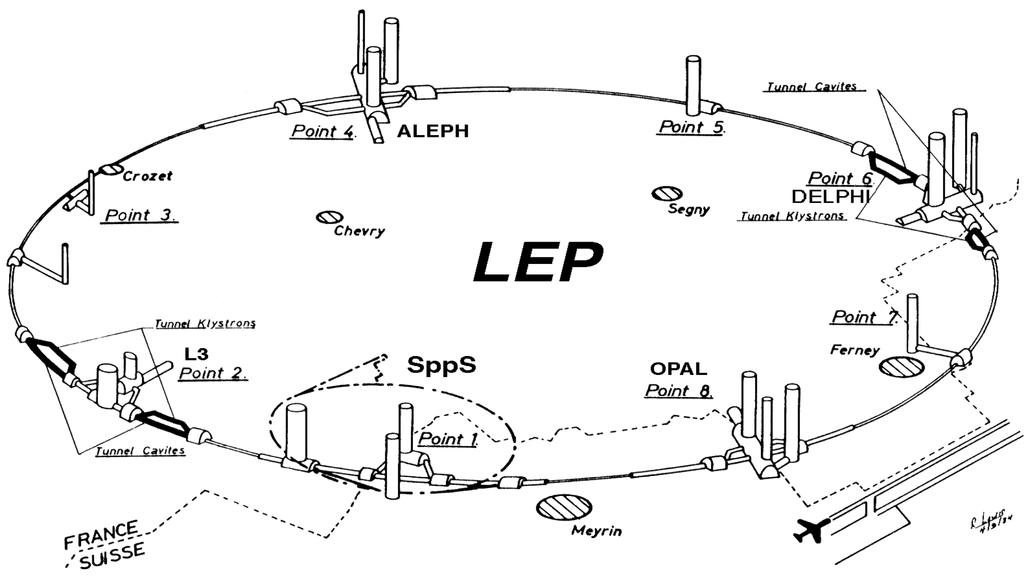


Abbildung 3.1: *Übersicht über den Beschleuniger LEP [?] und die vier assoziierten Experimente ALEPH [?], OPAL [?], DELPHI [?] und L3 [?].*

Am Europäischen Zentrum für Elementarteilchenphysik (CERN) steht der im Jahre 1989 fertiggestellte Speicherring LEP (siehe Abbildung 3.1). Dieser e^+e^--Speicherring mit einem Umfang von 26.6 km wurde gebaut, um Eigenschaften und Zerfälle der in der e^+e^--Kollision erzeugten schweren Vektorbosonen Z, W^+ und W^- zu untersuchen. Die Datenaufnahme auf der Z-Resonanz ist seit Mitte 1995 beendet.

Seit 1996 hat die zweite Phase, LEP2 genannt, begonnen und mit Schwerpunktenergien oberhalb von $\sqrt{s} \approx 160\ GeV$ ist es erstmals in der Geschichte von e^+e^--Speicherringen gelungen, die W-Paar-Produktionsschwelle zu überschreiten.

Eine umfassende Darstellung zum LEP-Speicherring mit allen technischen Einzelheiten kann in [?] gefunden werden.

3.2 Detektor ALEPH

Um vier der acht Wechselwirkungspunkte von LEP sind die Detektoren ALEPH [?], OPAL [?], DELPHI [?] und L3 [?] angeordnet.
ALEPH, mit dem die Daten für diese Analyse aufgenommen wurden, ist entworfen worden, um detaillierte Studien des elektroschwachen Standardmodells und die damit verbundene Untersuchung des Zerfalls der massiven Vektorbosonen W^+, W^- und Z durchzuführen. Um dies zu gewährleisten ist ALEPH aus verschiedenen Detektorkomponenten aufgebaut, die so angeordnet sind, daß ein größtmöglicher Raumwinkelbereich um die Wechselwirkungszone abgedeckt ist. Abbildung 3.2 stellt einen schematischen Querschnitt durch den Detektor ALEPH dar. Die in dieser Abbildung zu erkennenden Detektorkomponenten werden im folgenden kurz vorgestellt.

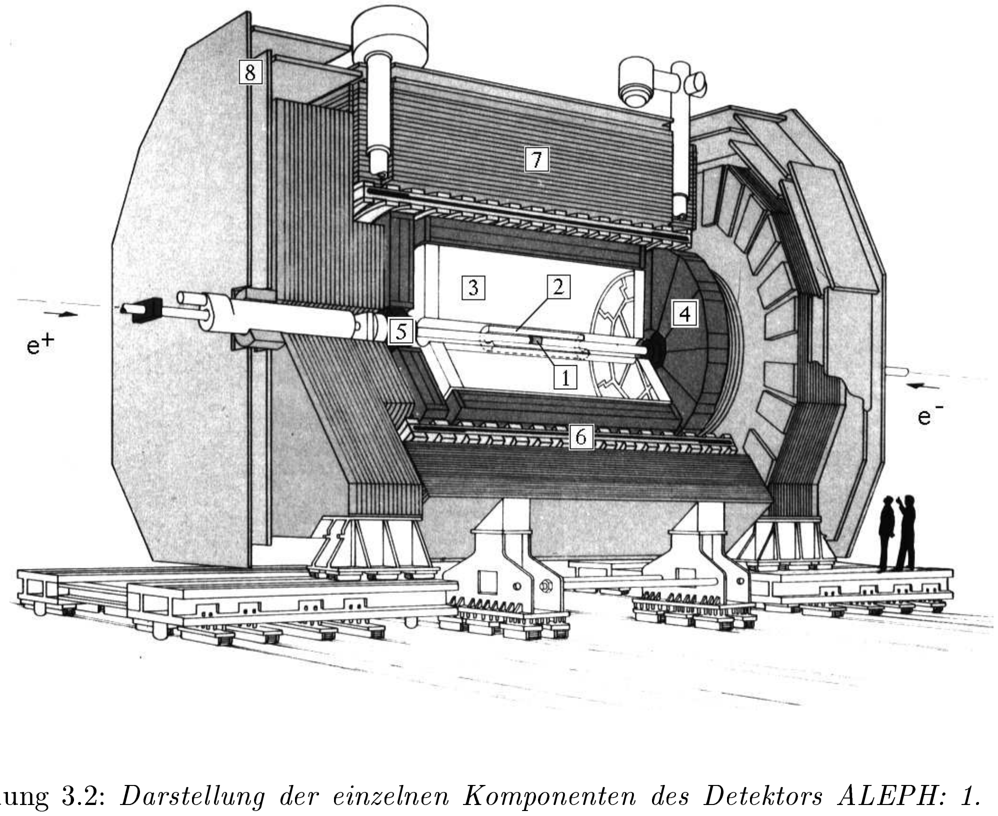


Abbildung 3.2: *Darstellung der einzelnen Komponenten des Detektors ALEPH: 1. Vertexdetektor (VDET), 2. Innere Spurkammer (ITC), 3. Zeitprojektionskammer (TPC), 4. Kalorimeter für elektromagnetische Schauer (ECAL), 5. Luminositätskalorimeter (LCAL), 6. Magnetspule, 7. Hadronkalorimeter (HCAL), 8. Myonkammern.*

1. Vertexdetektor (VDET)

Der Vertexdetektor wurde 1991 nachträglich in ALEPH eingebaut. Mit ihm können geladenen Teilchen zwei Spurpunkte sehr nahe am Primärvertex zugeordnet werden. Dadurch kann bestimmt werden, ob eine Spur aus einem Sekundärvertex kommt und somit durch den Zerfall eines kurzlebigen Teilchens entstanden ist. Abbildung 3.3 ist eine schematische Darstellung des VDET. 96 Siliziumplatten, die in zwei koaxialen zylinderförmigen Einheiten um die Strahlachse angeordnet sind, bilden zusammen den VDET. Der innere Mantel besteht aus 9x4, der äußere aus 16x4 Platten. Jede der Lagen wird von beiden Seiten ausgelesen; auf der einen Seite parallel zur Strahlachse, woraus sich die r-ϕ-Koordinaten ergeben, und auf der anderen Seite in dazu senkrecht verlaufenden Streifen, woraus die z-Koordinate bestimmt werden kann.

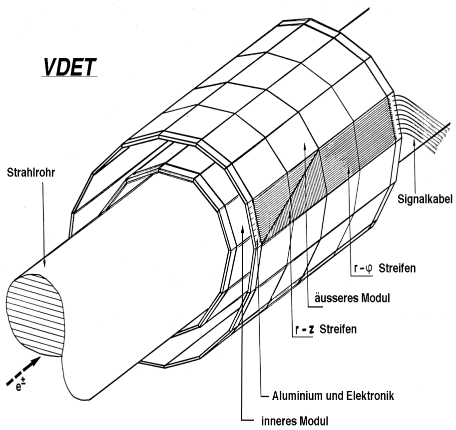


Abbildung 3.3: *Schematische Darstellung des Vertexdetektors*

Die Auflösung des VDET beträgt für senkrechten Einfall von Myonen:

$$\sigma_x \approx 10\mu m \quad , \quad \sigma_{r-\phi} \approx 12\mu m \quad .$$

2. Innere Spurkammer (ITC)

Die ITC ist eine zylinderförmige Vieldraht-Driftkammer, die im wesentlichen zwei Aufgaben erfüllt:
Sie liefert Spurpunkte zur Bahnrekonstruktion geladener Teilchen und verfügt darüberhinaus über einen speziellen schnellen Spurprozessor, dessen Ausgangssignal zur Ableitung einer Triggerentscheidung (LEVEL 1) verwendet wird.
Die Kammer hat eine Länge von 2 m, einen inneren Radius von 12.8 cm und einen äußeren von 28.8 cm. Spuren in einem Winkelbereich von $-0.97 < cos\theta < 0.97$ in Bezug auf die Strahlachse durchdringen alle Lagen der ITC, wobei maximal acht Spurpunkte gemessen werden können. Um die Spurpunkte zu bestimmen, sind Signaldrähte in acht Lagen zu 96 Drähten in den vier inneren Lagen und zu 144 Drähten in den äußeren Lagen angebracht. Durch Ionisation des sich in der ITC befindenden $Ar - CO_2$-Gasgemisches, können mittels der Driftzeit der Elektronen und der Lage der Drähte Spurpunkte in der r-ϕ-Ebene rekonstruiert werden. Aus der Differenz der Ankunftszeiten der Signalimpulse an beiden Enden der ITC können darüberhinaus die z-Koordinaten bestimmt werden.

3. Zeitprojektionskammer (TPC)

Die TPC ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Diese zylindrische Driftkamm er umfaßt ein Volumen von 43 m^3, hat eine Länge von 4.4 m, einen inneren Radius von 31 cm und einen äußeren von 1.8 m. Die Kammer wird in der Mitte durch eine Hochspannungsmembran geteilt, an der eine Spannung von 47 kV anliegt. Beim Durchgang von geladenen Teilchen durch die Kammer werden durch Ionisation des $Ar-CH_4$-Füllgases freie Elektronen erzeugt, die zu den Endplatten der TPC driften. In den Endplatten, die mit Vieldraht-Proportionalkammern bestückt sind, wird die ankommende Ladung registriert und somit eine r-ϕ-Koordinate festgelegt. Die z-Koordinate ergibt sich aus der Ankunftzeit der Elektronen und der konstanten Driftgeschwindigkeit von 5.2 $cm/\mu s$. Es können maximal 21 dieser Spurpunkte für eine Teilchenspur bestimmt werden. Die Ortsauflösung der TPC wurde bei leptonischen Z-Zerfällen zu $\sigma_z \approx 173\ \mu m$ und $\sigma_{r-\phi} \approx 740\ \mu m$ gemessen.

4. Elektromagnetisches Kalorimeter (ECAL)

Das ECAL befindet sich zwischen der TPC und der supraleitenden Spule, die das Magnetfeld erzeugt, mit dem die Spurdetektoren (VDET, ITC und TPC) und das ECAL durchsetzt sind. Die Bestandteile des Kalorimeters sind die zwei Endkappen und der zentrale Zylinder (Barrel). Jedes dieser drei Teile besteht aus 12 Modulen, die jeweils einen Azimutwinkel von 30^o abdecken und aus 45 Bleiplatten aufgebaut sind. Zwischen diesen Platten, die als Absorber dienen, befinden sich Proportionalkammern, mit denen Energie und Größe des elektromagnetischen Schauers bestimmt werden. Die Kathodenebenen der Proportionalkammern sind in kleine Plättchen unterteilt, die zu insgesamt 73728 sogenannten Türmen zusammengefaßt sind. Die Energieauflösung des ECAL beträgt:

$$\frac{\sigma(E)}{E} = 0.009 + \frac{0.18}{\sqrt{E/\mathrm{GeV}}} \quad .$$

Die Granularität beträgt zwischen $\Delta\theta \times \Delta\phi sin\theta = 17\ mrad \times 17\ mrad$ ($\theta = 90^o$) im Bereich des Barrels und $\Delta\theta \times \Delta\phi sin\theta = 10\ mrad \times 10\ mrad$ ($\theta \approx 40^o$) in den Endkappen. Die Winkelauflösung beträgt:

$$\sigma_{\phi,\theta} = \left(0.25 + \frac{2.5}{\sqrt{E/\mathrm{GeV}}}\right) \quad mrad.$$

5.Hadronisches Kalorimeter (HCAL) und Myonkammern

Das HCAL schließt sich außen an die supraleitende Spule an und hat mit einem Barrel und zwei Endkappen eine ähnliche Geometrie wie das ECAL. Sowohl Barrel als auch Endkappen sind aus 22 Lagen Eisenplatten mit einer Dicke von 5 cm aufgebaut, wobei sich zwischen den Platten Zählrohre aus PVC,sogenannte limitied streamer tubes befinden. Mit Hilfe dieser streamer tubes kann die Energiedeposition von hadronischen Objekten bestimmt werden. Die Energieauflösung des HCAL beträgt für senkrecht einfallende Pionen:

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{0.85}{\sqrt{E/\mathrm{GeV}}} \quad .$$

Das HCAL wird von den Myonenkammern umgeben, die aus zwei weiteren Lagen von streamer tubes bestehen und für Myonenkandidaten zwei Spurpunkte liefern.

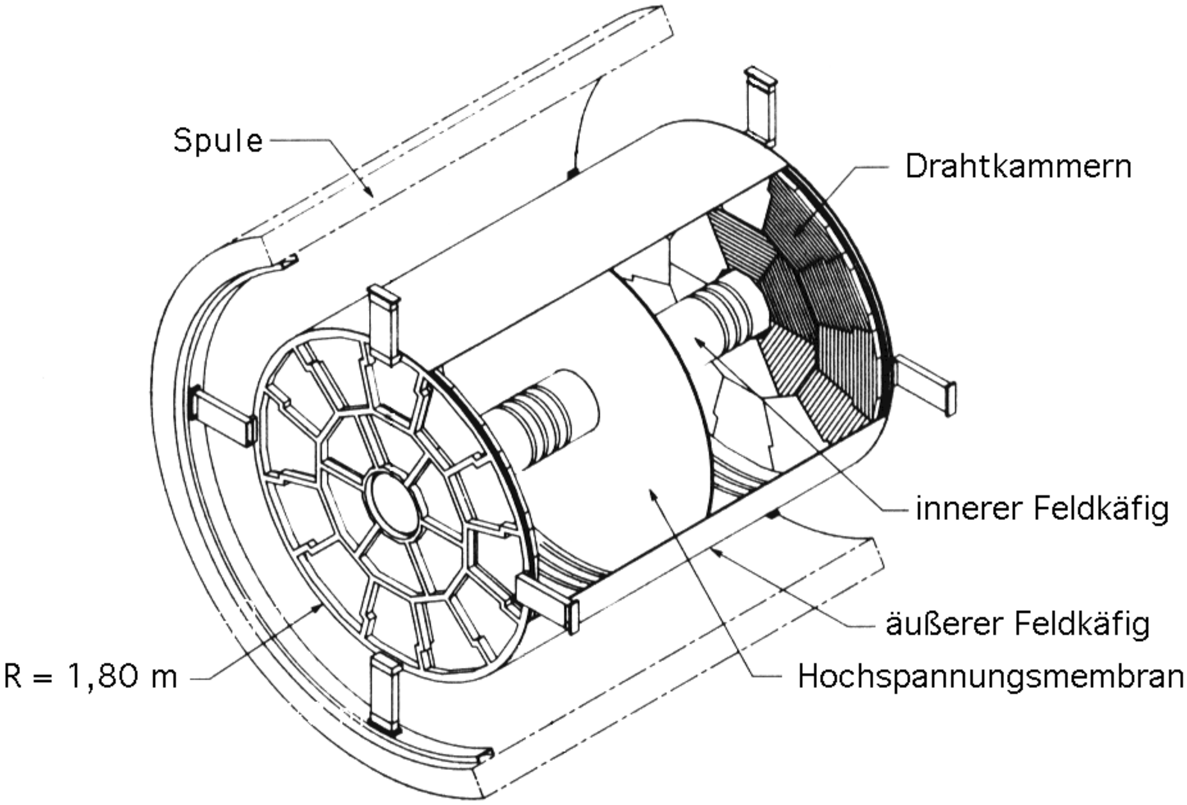


Abbildung 3.4: *Ansicht der TPC im Querschnitt*

Kapitel 4

Selektion und kinematische Rekonstruktion

Für eine Messung der Masse des W-Bosons aus seiner invarianten Massenverteilung ist zuvor eine Rekonstruktion der Zerfallsprodukte des W's im Detektor notwendig. Diese Rekonstruktion kann in zwei Bereiche unterteilt werden. Der erste Teil, der Gegenstand dieses Kapitels ist, befaßt sich mit der Selektion von WW-Ereignissen unter Verwendung der experimentellen Signatur der einzelnen Zerfallskanäle. Das nächste Kapitel ist dem zweiten Teil, der Verbesserung der Auflösung durch Anpassungen von kinematischen Variablen an Zwangsbedingungen (nC-Fits), gewidmet.

Wie in Kapitel 2 beschrieben, ist der W-Paar-Zerfall durch vier Fermionen im Endzustand charakterisiert. Auf diesem Niveau sind alle in Tabelle 2.2 dargestellten Endzustände physikalisch äquivalent. Aufgrund von Nachweiswahrscheinlichkeiten im Detektor ergeben sich allerdings erhebliche Unterschiede in der experimentellen Signatur für die einzelnen Zerfallstopologien. Der hadronische Zerfallskanal zeichnet sich durch eine große Anzahl von Spuren und viel sichtbarer Energie ($E_{vis} \approx \sqrt{s}$) im Detektor aus, während der rein leptonische Kanal zwei hochenergetische Spuren und aufgrund der nicht detektierten Neutrinos viel fehlende Energie aufweist. Die Signatur des semileptonischen W-Paar-Zerfalls ergibt sich aus den Signaturen der beiden anderen Zerfälle, wobei eine geladene hochenergetische Spur in einer und mehrere Spuren in der anderen Detektorhemisphäre vorhanden sind.[1]

In den folgenden Abschnitten wird auf die Selektion der einzelnen Zerfallskanäle und die damit verbundenen Rekonstruktionshypothesen eingegangen. Aus diesen Hypothesen ergibt sich dann später die in Kapitel 5 dargestellte Anwendung der kinematischen Anpassungen. Der Schwerpunkt wird dabei auf den semileptonischen Kanal gelegt, an dessen Beispiel auch eine vollständige Messung von M_W in dieser Dissertation vorgestellt wird.

[1] Entsprechend der Nomenklatur von Tabelle 2.2 sind Zerfälle $W \to \tau\nu_\tau$ separat angeführt. Aufgrund der kurzen Lebensdauer des τ-Leptons zerfällt dieses noch im Detektor und erschwert somit die klare Abtrennung der einzelnen Zerfallstopologien. Da dieser Kanal nicht Bestandteil dieser Arbeit ist, wird auf die sich daraus ergebende Problematik nicht weiter eingegangen.

4.1 Daten und Monte Carlo Ereignisse

Im Jahr 1997 wurde mit dem Detektor ALEPH ein Datensatz entsprechend einer integrierten Luminosität von 56.81 pb^{-1} auf Band aufgezeichnet. Die mittlere Schwerpunktenergie für diese Ereignisse liegt bei 182.655 ± 0.048 GeV, wobei 0.17 pb^{-1} bei 180.83 GeV, 3.92 pb^{-1} bei 181.72 GeV, 50.79 pb^{-1} bei 182.69 GeV und 1.93 pb^{-1} bei 183.81 GeV aufgenommen wurden.

Die zur Analyse notwendigen Simulationsereignisse sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Die Signalereignisse $W^+W^- \to 4f$ sind mit dem Monte Carlo Genarator KORALW 1.21 [?] erzeugt worden, wobei die Berechnung der Vier-Fermion-Diagramme mit dem Programmpaket GRACE [?] vorgenommen wurde. Optional kann auch eine Simulation auf Basis der CC03-Graphen allein erfolgen. Die Fragmentation von Quarks wurde entsprechend des LUND-Stringmodells mit JETSET [?] durchgeführt. Multi-Photon ISR sowie Photonabstrahlung im Endzustand (FSR) sind ebenso wie Effekte der Coulombwechselwirkung in den mit KORALW produzierten Ereignissen enthalten.

Die Untergrundprozesse $e^+e^- \to ZZ$, $e^+e^- \to Ze^+e^-$ und $e^+e^- \to We\nu$, die zu vier Fermionen im Endzustand führen sind, wie auch die Annihilation von e^+e^- in Quarkpaare, mit PYTHIA [?] simuliert worden. Endzustände mit zwei Leptonen ($\tau^+\tau^-$) wurden mit KORALZ [?] erzeugt.

Für die folgenden Abschnitte ist es an dieser Stelle sinnvoll, einige häufig verwendete Begriffe sowie die Unterteilung des Untergrundes festzulegen:

- Reinheit:

  Anzahl der selektierten Signalereignisse normiert auf die Anzahl aller selektierten Ereignisse. $WW \to 4f$-Ereignisse, die nicht zu den betrachteten Signalereignissen zählen aber dennoch selektiert werden, sind somit Untergrundereignisse. Die Definition der Reinheit erfolgt immer auf der Basis von CC03-Ereignissen.

- Effizienz:

  Anzahl der selektierten Signalereignisse normiert auf alle Signalereignisse. $WW \to 4f$-Ereignisse die nicht zu den betrachteten Signalereignissen zählen, werden hierbei nicht berücksichtigt. Auch die Definition der Effizienz erfolgt immer auf der Basis von CC03-Ereignissen.

- Klassifikation des Untergrundes:

  Aufgrund der unterschiedlichen Zusammensetzung des Untergrundes für den hadronischen und semileptonischen Kanal, ist es schwer eine Klassifikation des Untergrundes, die beiden Kanälen angemessen ist, vorzunehmen.

  Da im Falle des hadronischen Kanals die wichtigsten Quellen für Untergrund Prozesse der Art $ZZ \to 4f$ und $Z/\gamma \to q\bar{q}(\gamma)$ sind, wäre eine Unterteilung in Untergrund mit vier Fermionen und Nicht-Vier-Fermionen im Endzustand sinnvoll. Hingegen erscheint für den semileptonischen Kanal eine Trennung nach WW-Untergrund und Nicht-WW-Untergrund angebrachter. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Analyse von semileptonischen Ereignissen liegt, wird im folgenden die Klassifikation nach

WW-Untergrund ($WW \to 4f$-Ereignisse die nicht zu den betrachteten Signalereignissen zählen) und Nicht-WW-Untergrund erfolgen.

Prozeß	σ in pb	Anzahl
$e^+e^- \to W^+W^-$		
$4f \quad M_W = 79.85 \quad GeV/c^2$	16.04	50000
$4f \quad M_W = 80.10 \quad GeV/c^2$	16.01	50000
$4f \quad M_W = 80.35 \quad GeV/c^2$	16.01	400000
$4f \quad M_W = 80.60 \quad GeV/c^2$	15.97	50000
$4f \quad M_W = 80.85 \quad GeV/c^2$	15.69	50000
$CC03 \quad M_W = 80.35 \quad GeV/c^2$	15.71	400000
Untergrund		
$e^+e^- \to ZZ$	2.768	30000
$e^+e^- \to Ze^+e^-$	97.0	60000
$e^+e^- \to We\nu$	0.672	6000
$e^+e^- \to Z/\gamma \to q\bar{q}(\gamma)$	107.6	600000
$e^+e^- \to Z/\gamma \to \tau^+\tau^-(\gamma)$	8.3	350000

Tabelle 4.1: *Anzahl und die bei der Erzeugung verwendeten Wirkungsquerschnitte von Signal- und Untergrundereignissen.*

4.2 Hadronische Ereignisse

Der Vorzug des großen Verzweigungsverhältnisses dieses Kanals ($\approx$ 44%) wird durch die experimentellen Schwierigkeiten getrübt, die mit der reinen hadronischen Struktur dieses W-Zerfalls zusammenhängen.
Nach dem Zerfall des W-Paares in jeweils zwei Quark-Antiquark-Paare fragmentieren diese aufgrund des Confinements der starken Wechselwirkung in eine Schar abgegrenzter Hadronen, auch Jets genannt. Der hadronische W-Zerfall manifestiert sich demnach als ein sogenanntes 4-Jet-Ereignis im Detektor, wobei die Jets vor allem die Eigenschaften (Energie, Impuls) der primären Quarks wiederspiegeln. Solche Ereignisse führen im Allgemeinen zu einer hohen Teilchenmultiplizität und zu viel sichtbarer Energie im Detektor. Diese Eigenschaften des hadronischen Systems können für die notwendige Ereignisselektion genutzt werden. Die folgenden, in Abbildung 4.1 dargestellten, Variablen werden typischerweise zur Selektion eines hadronischen WW-Ereignisses verwendet:

- Teilchenmultiplizität im Detektor
- Anteil an sichtbarer Energie (geladen+neutral)
- Spherizität, da die Zerfallsprodukte von hadronische W-Zerfällen annähernd isotrop im Detektor verteilt sein sollten.

Aufgrund der nicht bekannten Korrelation zwischen einzelnen Selektionsvariablen ist eine nur auf Schnitten beruhende Selektion nicht optimal. Ein Selektionsverfahren, das eine bessere Optimierung von Reinheit und Effizienz erlaubt, ist beispielsweise die Anwendung von Neuronalen Netzwerken. Sie erlauben eine Reduktion von vielen Eingangsvariablen (Neuronen)

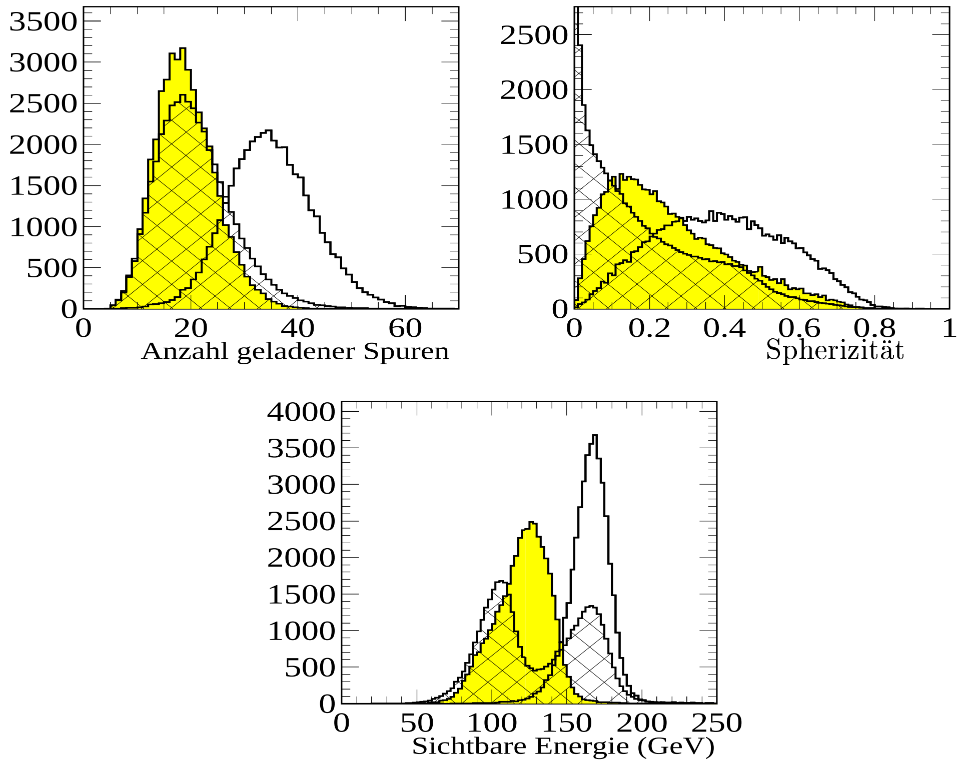


Abbildung 4.1: *Ein Vergleich der Verteilungen der geladenen Spuren, Spherizität und sichtbaren Energie für hadronische Ereignisse (leeres Histogramm), semileptonische Ereignisse (gefülltes Histogramm) und $q\bar{q}\gamma$-Ereignisse (schraffiertes Histogramm).*

zu einer einzigen Schnittgröße, die im Allgemeinen eine optimale Trennung von Signal und Untergrund ermöglicht.

Im Falle der offiziellen ALEPH Messung von M_W im hadronischen Kanal bei $\sqrt{s}$=183 GeV/c^2 wurde ein Netz mit 19 Neuronen verwendet[2]. Eine Verteilung der Schnittgröße ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Ein Schnitt bei -0.3 ergibt eine Reinheit von 77.8% und eine Effizienz von 82.4%. Die hauptsächlichen Untergrundquellen für diesen Kanal sind die Prozesse $e^+e^- \to ZZ$ und $e^+e^- \to q\bar{q}(\gamma)$.

4.2.1 Jet-Cluster-Algorithmen

Der nächste Schritt in der vollständigen Rekonstruktion von hadronischen WW-Ereignissen ist die Festlegung der Rekonstruktionshypothese. Wie zuvor bereits angesprochen, ist der Endzustand dieses Kanals in niedrigster Näherung durch vier Quarks gegeben. Aufgrund der Eigenschaft der starken Wechselwirkung fragmentieren die Quarks im Detektor zu hadronischen Teilchenbündeln. Diese sogenannten Jets stellen die einzige Möglichkeit dar, eine Abschätzung von Eigenschaften der Partonen wie z. B. Energie und Impuls zu erhalten. Allerdings ist die Definition und Rekonstruktion von Jets keineswegs eindeutig und man ist gezwungen, zwischen vielen phänomenologischen und theoretisch berechenbaren Modellen zu wählen. Aufgrund seiner guten Rekonstruktionseigenschaften hat sich bei LEP der

[2]Eine genauere Beschreibung des Neuronalen Netzes mit allen Definitionen der Eingangsvariablen ist in [?] und [?] zu finden.

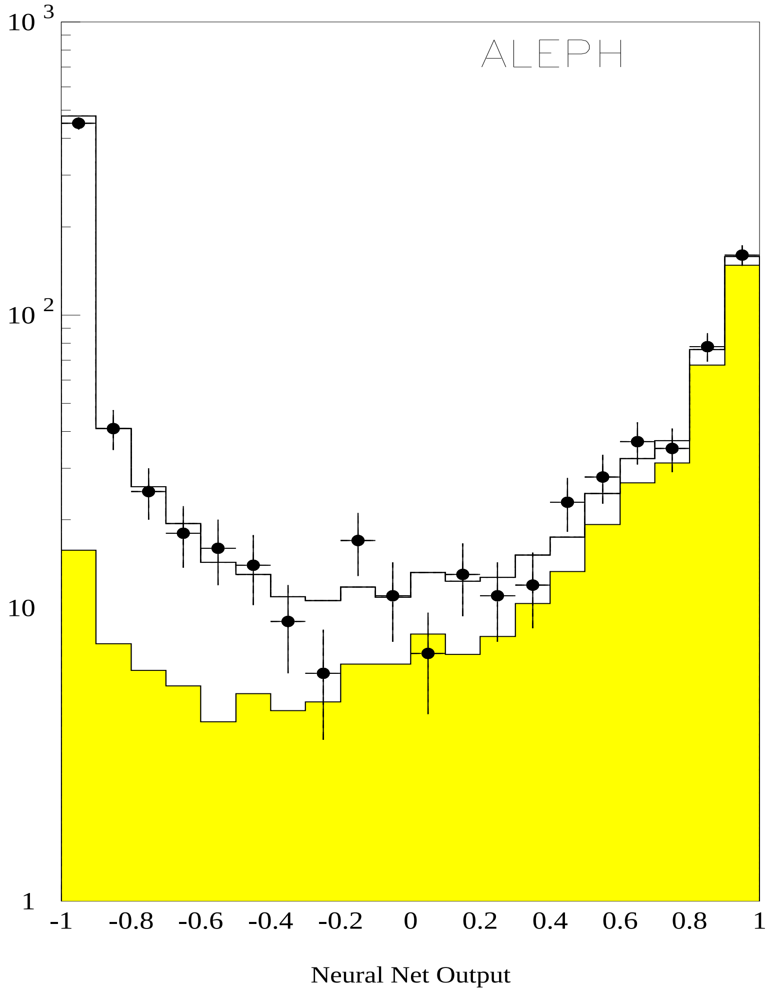


Abbildung 4.2: *Darstellung der Schnittvariable des Neuronalen Netzes, wobei der Untergrundanteil nicht ausgefüllt und das Signalanteil ausgefüllt gezeigt ist. Die Punkte stellen die bei 183 GeV aufgezeichneten Datenereignisse dar.*

DURHAM-Jet-Cluster-Algorithmus [?], [?] als besonders erfolgreich erwiesen. Eine quantitative Definition des Algorithmus ist in Tabelle 4.2 gegeben. Seine Arbeitsweise basiert auf der iterativen Bildung von Pseudoteilchen, wobei das letzte Pseudoteilchen dem Jet entspricht. Für jedes Teilchenpaar (i,j) wird über eine wohldefinierte Metrik ein Abstand d_{ij} im Phasenraum berechnet. Ist dieser Abstand kleiner als der Wert des Abschneideparameters Y_{cut}, so wird aus den beiden Teilchen das oben angesprochene Pseudoteilchen gebildet. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis keine Kombination aus Pseudoteilchen mehr die Bedingung $d_{ij} < Y_{cut}$ erfüllt. Die übriggebliebenen Pseudoteilchen werden nun als Jets identifiziert.
Dieser Vorgang kann auch invertiert werden, anstelle der Wahl eines festen Y_{cut} kann die Anzahl der Jets (N_{Jet}) vorgegeben werden. Dementsprechend ist Y_{cut} frei variierbar und sobald die Anzahl der Teilchen vor dem ersten Schritt der Iteration größer oder gleich N_{Jet} ist, führt der Clusterprozeß immer zu der geforderten Anzahl von Jets im Endzustand. Im Falle des hadronischen Kanals werden alle detektierten Objekte aufgrund der zugrundeliegenden Vier-Quark-Struktur, zu vier Jets im Endzustand gezwungen. Diese Rekonstruktionshypothese

Jetalgorithmus	Metrik:d_{ij}	Kombinationsschema
DURHAM	$\frac{2(MIN(E_iE_j))^2(1-\cos\theta_{ij})}{s}$	$\vec{P}_{ij} = \vec{P}_i + \vec{P}_j$ $E_{ij} = E_i + E_j$

Tabelle 4.2: *Metrik und Kombinationsvorschriften für Energie und Impuls des DURHAM-Jet-Cluster-Algorithmus*

vernachlässigt allerdings die in Abschnitt 2.3.1 angesprochenen QCD-Korrekturen. Aufgrund von harter Gluonbremsstrahlung können durchaus mehr als 4 Partonen im Endzustand auftreten, die dann zu 4+x Jets im Detektor führen[3]. Werden solche Ereignisse mit nur vier Jets im Endzustand rekonstruiert, führt dies zu einer Verfälschung der Kinematik des zugrundeliegenden Prozesses.
Auf die Rekonstruktionshypothese und die damit verbundenen Schwierigkeiten wird noch im nächsten Kapitel eingegangen.

4.3 Semileptonische Ereignisse

Die Signatur des semileptonischen W-Paar-Zerfalls ($W^+W^- \to e/\mu\nu q\bar{q}$) zeichnet sich durch eine geladene hochenergetische Spur in einer Hemisphäre und mehreren Spuren in der anderen aus. Der hohe Anteil an fehlendem Impuls (P_{miss}) bzw. fehlender Energie (E_{miss}) ist auf das, im Detektor nicht nachweisbare Neutrino, zurückzuführen.

Der erste Schritt in der Selektion von semileptonischen Ereignissen ist die Vorselektion. Sie dient hauptsächlich zur Reduktion der zu analysierenden Datenmenge. Dabei werden die Schnitte so gewählt, daß möglichst wenig Signalereignisse verloren gehen. Die Vorselektion setzt sich wie folgt zusammen:

- Anzahl der geladenen Spuren > 4 ,
- Energiesumme der geladenen Spuren $> 10\% \ \sqrt{s}$,
- Fehlender Impuls: $P_{miss} > MAX(0, 35 - E_{miss}) \quad GeV$,
- Fehlender Longitudinalimpuls: $P_{miss,L} < MAX(34, 118 - \sqrt{E_{miss}^2 - P_{miss}^2}) \quad GeV$.

Für diese Selektion werden nur solche geladenen Spuren in Betracht gezogen, die folgende Spurauswahl erfüllen:

- $d_0 < 20 \quad cm$,
- $z_0 < 5 \quad cm$,
- Anzahl TPC Spurpunkte ≥ 4.
- $\mid cos\Theta \mid \leq 0.95$,

[3] Ein bekanntes Beispiel für harte Gluonbremsstrahlung sind die bei LEP genauestens untersuchten Drei-Jet-Ereignisse, bei denen eines der beiden Quarks im Endzustand noch ein hartes Gluon emittiert. Die Wahrscheinlichkeit für solche Prozesse wird von der starken Kopplungskonstanten $\alpha_s(Q^2)$ bestimmt.

Hier ist mit d_0 der minimale radiale Abstand der Spur zum Wechselwirkungspunkt und mit z_0 der minimale axiale Abstand der Spur zum Wechselwirkungspunkt gemeint. Θ bezeichnet den Winkel zwischen Spur und Strahlachse.

Der nächste Schritt in der Selektionskette ist die Identifikation der Leptonen. Aufgabe der allgemeinen Teilchenidentifikation ist die Trennung von Elektronen (Positronen), Myonen und Hadronen (hauptsächlich Pionen). Da aber die experimentellen Signaturen von Elektronen und Myonen in Detektor ALEPH sehr unterschiedlich sind, reduziert sich die Identifikation auf die $e-\pi$-Trennung bzw. die $\mu-\pi$-Trennung.

Die Unterscheidung von Elektronen und Pionen beruht im wesentlichen auf Informationen über das Profil des elektromagnetischen Schauers im ECAL und auf dem Energieverlust von Teilchen durch Ionisation in der TPC (dE/dx). Wird das Elektron als Referenz genommen, so lassen sich zwei Estimatoren aus dem Schauerprofil und ein Estimator aus der dE/dx-Information definieren, die sensitiv auf die Unterscheidung von Elektronen und Hadronen reagieren. Dies ist zum einen ein Maß für die transversale Schauerausbreitung:

$$R_T = \frac{E_4/P - \langle E_4/P \rangle_e}{\sigma_{E_4/P}} \quad , \tag{4.1}$$

wobei E_4 die Summe der Energien in den vier, dem eindringenden Teilchen am nähesten liegenden, Türmen ist. Der in der TPC gemessene Impuls des Teilchens wird hier mit P bezeichnet und $\langle E_4/P \rangle_e$ stellt den als Referenz dienenden Erwartungswert der Energiedeposition von Elektronen dar. Durch Normierung auf die Auflösung $\sigma_{E_4/P}$ wird erreicht, daß R_T einer normierten Korrektur (Pull-Verteilung) entspricht.

Der andere Estimator, der ein Maß für die longitudinale Schauerausbreitung ist, wird analog zu R_T definiert:

$$R_L = \frac{X_L - \langle X_L \rangle_e}{\sigma_{X_L}} \quad \text{wobei} \quad X_L = \frac{E_4}{\sum_{i=j}^{4} \sum_{j=i}^{3} E_i^j S_j} \quad . \tag{4.2}$$

X_L stellt das Inverse der mittleren Positition der vom Teilchen in longitudinalen Richtung angegebener Energie dar, wobei S_j die mittlere Tiefe der Energiedepostion im j-Tiefenabschnitt ist. Somit gibt R_L an, wie genau das gemessene longitudinale Schauerprofil mit dem eines Elektrons übereinstimmt.

Die dritte diskriminierende Göße wird aus dE/dx Messwerten der TPC gebildet, wobei sich hier die massenabhängige Ionisation von Teilchen in Gasmedien zunutze gemacht wird (Bethe-Bloch Formel):

$$R_I = \frac{dE/dx - \langle dE/dx \rangle_e}{\sigma^e_{dE/dx}} \quad . \tag{4.3}$$

R_I testet somit die Abweichung der Messung von der Elektronenhypothese.

Entsprechend ihrer Konstruktion sind alle drei Estimatoren für Elektronen normal verteilt. Eine Darstellung ihrer Verteilungen nach der Vorselektion ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Besonders für die Schauerprofilestimatoren R_T und R_L ist der Charakter der Normalverteilung für Elektronen zu erkennen. Die Separation von Signal und Untergrund ist für den auf

dE/dx-Information beruhenden Estimator R_I nicht ganz so ausgeprägt wie bei den beiden anderen. Aus diesem Grund wird R_I nur dann zur Selektion von Elektronen eingesetzt, wenn die Information der Schauerprofilestimatoren nicht vorhanden oder nicht vertrauenswürdig ist.

Ein Elektronkandidat wird ausgewählt, indem nach der geladenen Spur mit dem kleinsten Winkel antiparallel zum fehlenden Impuls gesucht wird und dann als Elektron bezeichnet, wenn er folgende Kriterien erfüllt:

- Die geladene Spur muß mehr als 2 GeV/c besitzen, damit eine Messung der Schauerestimatoren durchgeführt werden kann.
- In einem reinen ECAL-BARREL- oder ECAL-ENDCAP-Bereich muß gelten: $R_T > -3$ und R_L-Wert vorhanden.
- In einem Überlapp-Bereich zwischen ENDCAP und BARREL muß gelten: $R_T > -3$ und R_L-Wert vorhanden oder $R_I > -5$.
- In einem Crack-Bereich muß gelten: $R_T > -7$ und R_L-Wert vorhanden oder $R_I > -5$.

Mit dieser Elektronenselektion wird für semileptonische Ereignisse mit Elektronen im Endzustand eine Effizienz von 85.3% und eine Reinheit von 38.9% erreicht.
Aufgrund von Wechselwirkung der Elektronen mit Material im Detektor kommt es in etwa 40% der semileptonischen Ereignisse mit Elektronen im Endzustand zu Bremsstrahlung von Photonen. Diese führt zu einer systematischen Unterschätzung, sowie einer Verschlechterung der Energieauflösung. Um einem Teil der Auswirkungen der Bremsstrahlung entgegenzuwirken, werden die Elektronkandidaten korrigiert. Innerhalb eines Kegels mit einem Öffnungswinkel von 2.5 Grad um die Spurrichtung des Kandidaten wird die Energie von ECAL-Objekten zur Energie des Elektrons addiert. Eine ausführliche Beschreibung dieser Bremsstrahlungskorrektur findet sich in [**?**].

Die Identifikation von Myonen beruht im wesentlichen auf dem ALEPH eigenen Softwarepaket QMUIDO [**?**]. In dieser Routine werden die Informationen der unterschiedlichen Subdetektoren in einem Likelihoodestimator vereint. Abhängig von der Entscheidung der einzelnen Subdetektoren wird dann eine Identifikationsflagge ausgegeben. Eine Darstellung dieser Verteilung ist in Abbildung 4.3 zu sehen.

Ein Myonkandidat wird gesucht, indem nach der geladenen Spur mit dem kleinsten Winkel antiparallel zum fehlenden Impuls gesucht wird und als Myon identifiziert, wenn folgende Kriterien erfüllt sind:

- Um sicherzustellen, daß ein Teilchen ECAL und HCAL durchdringen kann, muß diese geladene Spur mehr als 3 GeV/c besitzen.
- Die Identifikationsflagge von QMUIDO muß größer als null sein. Dies ist der Fall, wenn das zweidimensionale digitale Muster im HCAL nicht konsistent mit dem eines Hadrons ist. Alternativ kann mindestens ein Hit in der Myonkammer vorhanden sein.

Mit dieser Myonselektion wird für semileptonische Ereignisse mit Myonen im Endzustand eine Effizienz von 86.5% und eine Reinheit von 57.2% erreicht.

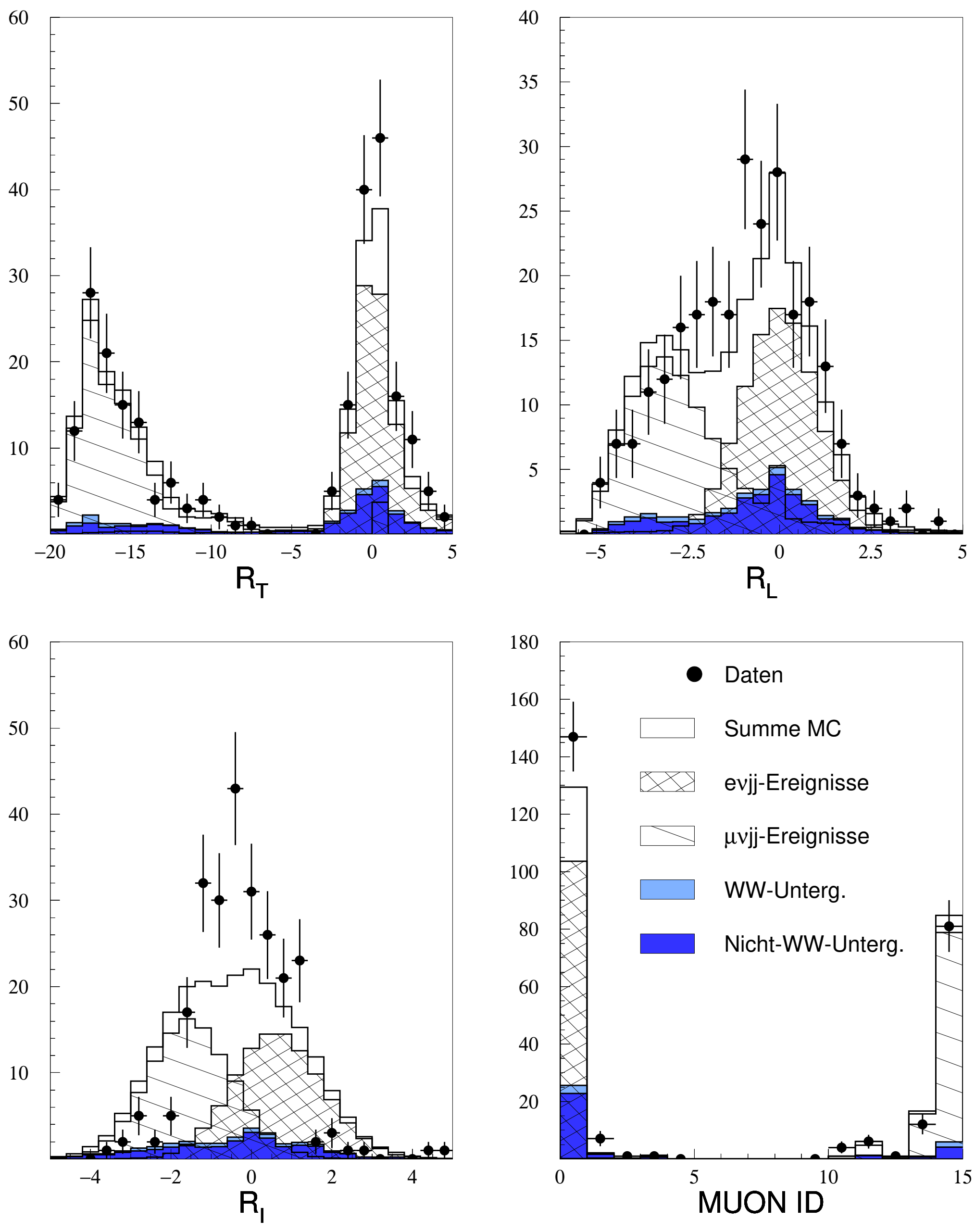


Abbildung 4.3: *Darstellung der Estimatoren R_T, R_L und R_I, sowie der Verteilung der Ergebnisse der Myonidentifikation. Alle Verteilungen enthalten nur Ereignisse, die die Bedingungen der Vorselektion erfüllen. Die Untergrundanteile sind kumulativ dargestellt.*

Prozeß	$\sigma_{sel}^{e\nu jj}$ in pb	$\sigma_{sel}^{\mu\nu jj}$ in pb
$W^+W^- \to q\bar{q}q\bar{q}$	0.001	0.001
$W^+W^- \to e\nu q\bar{q}$	1.927	0.001
$W^+W^- \to \mu\nu q\bar{q}$	0.003	1.981
$W^+W^- \to \tau\nu q\bar{q}$	0.072	0.0073
$W^+W^- \to l\nu l\nu$	0.003	0.002
$q\bar{q}(\gamma)$	0.057	0.012
ZZ	0.011	0.014
$We\nu$	0.009	0.001
Zee	0.060	0.002
$\tau\tau$	0.010	0.004
$\sum \sigma_{sel}$	2.153	2.091
Erwartete Anzahl	122.3	118.9
Reinheit in %	89.5	94.8
Effizienz in %	82.3	84.9

Tabelle 4.3: *Erwartete Wirkunkungsquerschnitte für Signal- und Untergrundprozesse nach der Selektion.*

Nach der Selektion der Leptonen werden die verbliebenden Spuren im Ereignis mit dem DURHAM-Jet-Cluster-Algorithmus zu zwei Jets gezwungen. Die Rekonstruktionshypothese von semileptonischen Ereignissen besteht somit aus zwei Jets, einem Lepton und fehlender Impuls im Endzustand (siehe Abbildung 4.4). Analog zum hadronischen Kanal vernachlässigt auch diese Hypothese die Abstrahlung von harten Gluonen, die zu mehr als zwei Jets im Endzustand führen würde. Die Auswirkung dieser Annahme wird im folgenden Kapitel diskutiert.

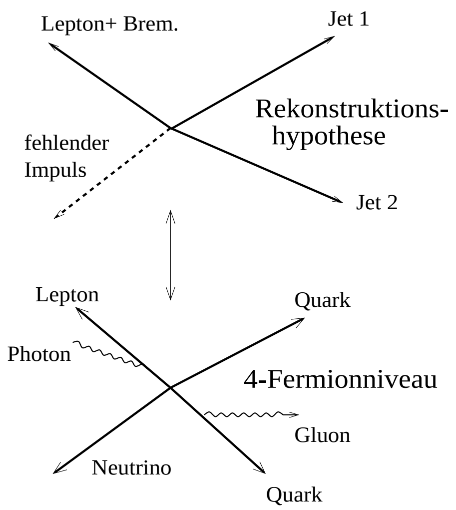


Abbildung 4.4: *Schematische Darstellung der Rekonstruktionshypothese für den semileptonischen Kanal*

Um die Reinheit der Selektion von semileptonischen Ereignissen zu verbessern, wird, basierend auf den bis zu diesem Punkt rekonstruierten Größen, ein multidimensionaler Diskriminator erstellt. Ähnlich wie das Neuronale Netz für die Selektion des hadronischen Kanals, bietet auch dieser Diskriminator eine optimale Trennung von Signal und Untergrund durch Berücksichtigung der Korrelation der Eingangsvariablen. Die Verteilung der Eingangsvariablen für Elektronen und Myonen sind in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellt.

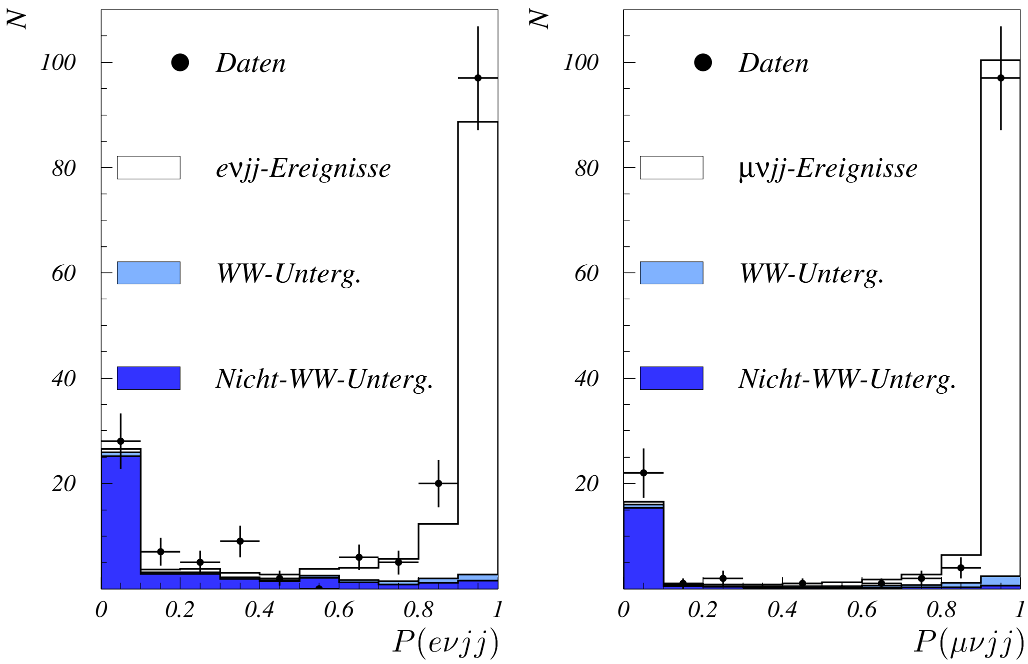


Abbildung 4.5: *Darstellung der in Gleichung 4.4 definierten Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Elektronen- und Myonenhypothese.*

Ihre Definition ist wie folgt:

- Korrigierte Energie der Leptonen (E_L)
- Fehlender Transversalimpuls im Ereignis ($P_{miss,T}$)
- Leptonisolation: $Iso_L = ln(tan(\theta_{Jet}/2)) + ln(tan(\theta_{Spur}/2))$

wobei θ_{Jet} den Winkel zwischen Leptonkandidat und nähestem Jet und θ_{Spur} den Winkel zwischen Lepton und nähester geladener Spur darstellt. Unter Verwendung von simulierten Ereignissen (siehe Tabelle 4.1) können in dem dreidimensionalen Raum, aufgespannt durch die Eingangsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Signal- und Untergrundereignisse aufgestellt werden. Dabei entspricht $pdf(l\nu qq)$ der Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelnes Ereignis ein Signalereignis und $pdf(bkd)$ der Wahrscheinlichkeit, daß es ein Untergrundereignis ist. Mit dieser Information kann eine normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Hypothese, daß es sich bei einem beobachteten Ereignis mit festem E_L,$P_{miss,T}$ und Iso_L um ein Signalereignis handelt, aufgestellt werden:

$$P(l\nu jj) = \frac{\frac{\sigma_{l\nu jj}}{\sigma_{total}} \quad pdf(l\nu jj)}{\frac{\sigma_{l\nu jj}}{\sigma_{total}} \quad pdf(l\nu jj) + \frac{\sigma_{bkd}}{\sigma_{total}} \quad pdf(bkd)} \quad . \tag{4.4}$$

Hierbei sind $\frac{\sigma_{l\nu jj}}{\sigma_{total}}$ und $\frac{\sigma_{bkd}}{\sigma_{total}}$ die relativen Anteile von Signal und Untergrund, wobei $\sigma_{total} = \sigma_{l\nu jj} + \sigma_{bkd}$ gilt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $e\nu jj$- und $\mu\nu jj$-Prozesse sind in

Abbildung 4.5 zu sehen. Ein Schnitt bei $P(e\nu jj) > 0.4$ und $P(\mu\nu jj) > 0.4$ ergibt die in Tabelle 4.3 dargestellten erwarteten Wirkungsquerschnitte σ_{Sel}, Reinheiten und Effizienzen. Zur Berechnung dieser Werte wurde das CC03 Signal Monte Carlo bei $M_W = 80.35\ GeV/c^2$ verwendet. Nach Anwendung der vorgestellten Selektion auf die Daten bleiben 130 $e\nu jj$-Ereignisse und 105 $\mu\nu jj$-Ereignisse übrig. Dies steht in guter Übereinstimmung mit der jeweils erwarteten Anzahl von Ereignissen für die beiden Kanäle (siehe Tabelle 4.3).

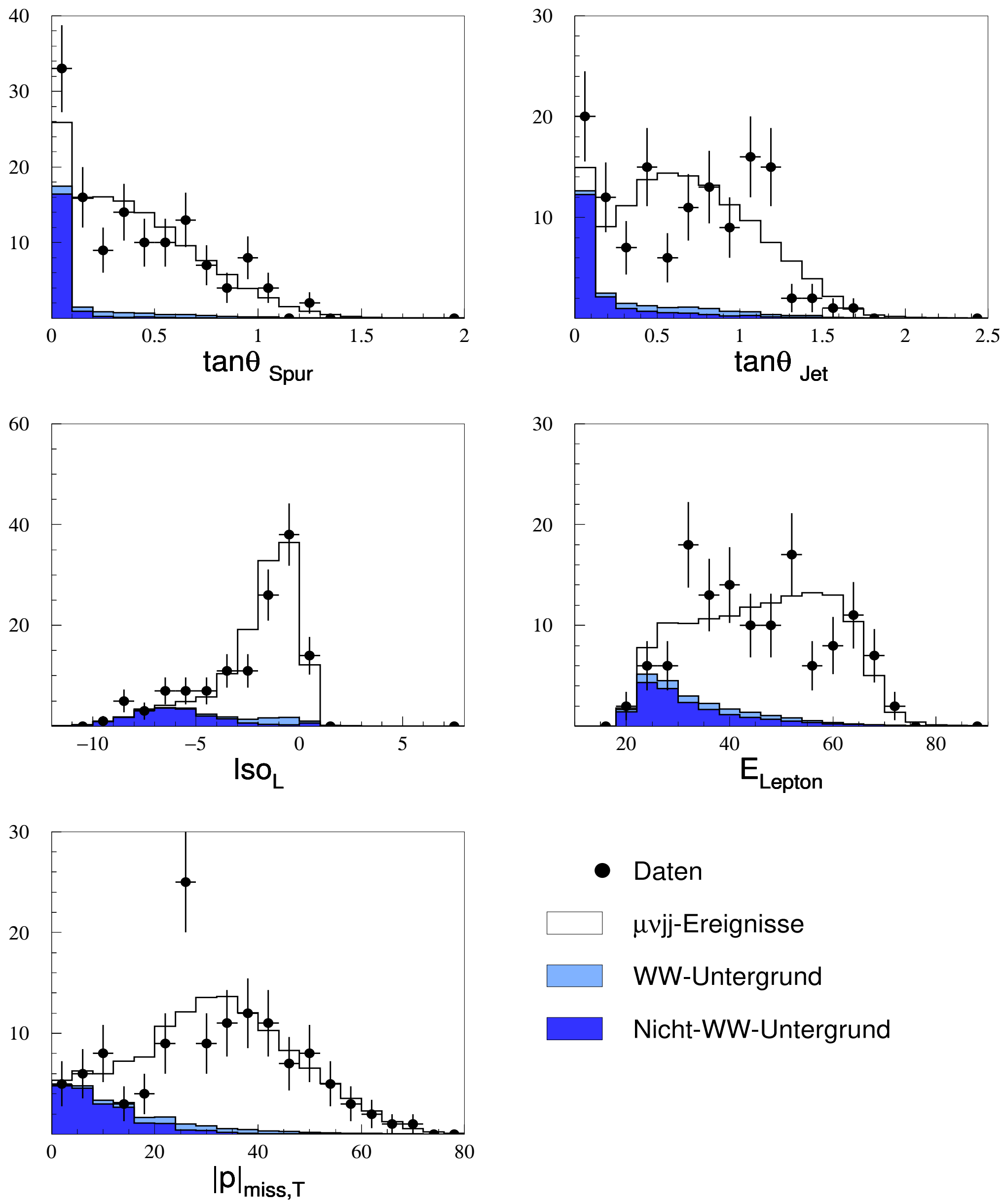


Abbildung 4.6: *Darstellung der Eingangsvariablen für den zur Selektion verwendeten dreidimensionalen Diskriminator. Es sind nur Ereignisse gezeigt, die als Myonen identifiziert worden sind.*

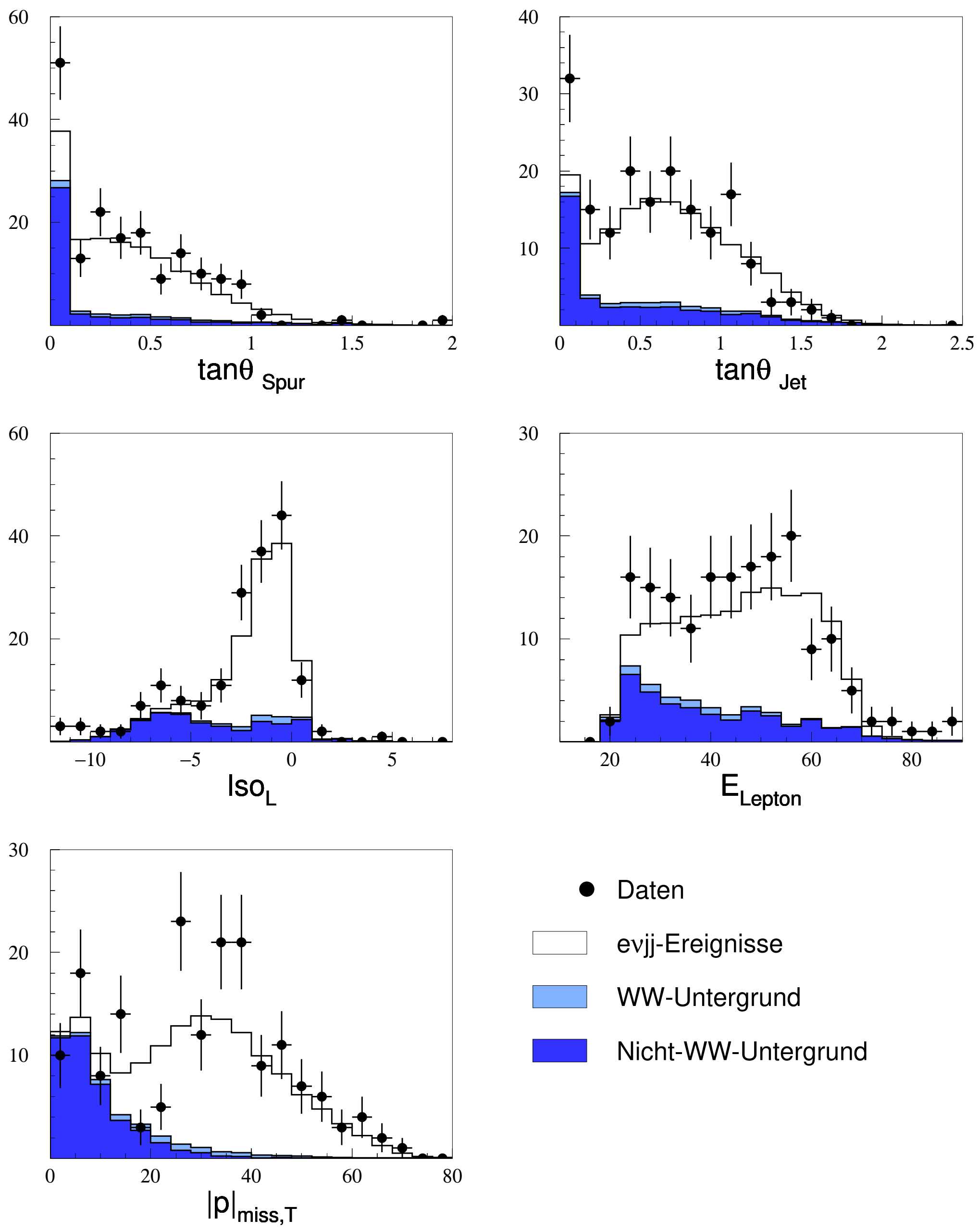


Abbildung 4.7: *Darstellung der Eingangsvariablen für den zur Selektion verwendeten dreidimensionalen Diskriminator. Es sind nur Ereignisse gezeigt, die als Elektronen identifiziert worden sind.*

Kapitel 5

Konzept zur kinematischen Anpassung

Nach der in Kapitel 4 beschriebenen Selektion von hadronischen und semileptonischen Ereignissen wird in diesem Kapitel die Anpassung von kinematischen Variablen der Ereignisse an Zwangsbedingungen, wie zum Beispiel Energie- und Impulserhaltung, ausführlich diskutiert. Diese sogenannten *Constraint Fits* (*nC-Fit*'s) bieten nicht nur die Möglichkeit, Akzeptanzverluste des Detektors (teilweise) zu korrigieren, sondern liefern auch, auf der Grundlage von einzelnen Ereignissen, Aussagen über die Qualität der rekonstruierten Größen.
In den folgenden Abschnitten wird sowohl die theoretische Grundlage von *nC-Fit*'s, basierend auf der Methode von Lagrangeschen Multiplikatoren, als auch ihre Anwendung auf semileptonische und hadronische Ereignisse dargestellt.

5.1 Theorie der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate geht auf die bekannten Mathematiker Legendre, Gauß und Laplace zurück und stellt eine mathematische Grundlage zur Anpassung von Meßwerten an Modelle dar. In [**?**] ist eine ausführliche Darstellung dieser Methode zu finden.

Eine Anpassung von Meßwerten y_i mit einem Fehler σ_i an eine Theorie verlangt im Allgemeinen eine funktionelle Beziehung der, den Meßwerten zugrundeliegenden, *wahren Werte* $\hat{y}_i$. Diese Beziehung wird *Modell* genannt und kann zusätzlich noch von *Parametern* $\hat{a}_k$ abhängen, die keiner direkten Messung zugänglich sind. Im allgemeinsten Fall kann das Modell wie folgt formuliert werden:

$$\begin{aligned}
&f_1(\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_p, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n) = 0 \\
&f_2(\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_p, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n) = 0 \\
&\vdots \\
&f_m(\hat{a}_1, \hat{a}_2, ..., \hat{a}_p, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n) = 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate können mit diesen Bedingungsgleichungen Korrekturen Δy (Differenzen zwischen Daten und Modell) bestimmt werden, so daß die Werte $y_i + \Delta y_i$ das Gleichungssystem in 5.1 exakt erfüllen. In Matrixform läßt sich die Bedingung wie folgt schreiben:

$$S = \vec{\Delta y}^T \mathcal{V}^{-1} \vec{\Delta y} = minimal \quad , \tag{5.2}$$

wobei $\vec{\Delta y}$ ein n-komponentiger Vektor und $\mathcal{V}$ die Kovarianzmatrix der Meßgrößen y_i darstellt. Für $S = minimal$ liegen, aufgrund der zusätzlichen Informationen des Modells, die Werte $y_i + \Delta y_i$ im Allgemeinen näher an den wahren Werten $\hat{y}_i$ als die Meßwerte y_i. Da $S = S(a_1, a_2....a_p)$ eine Funktion der Parameter $\vec{a}$ ist, können auch sie bestimmt werden.

5.1.1 Lineares Modell

In Falle eines linearen Modells kann die Bedingungsgleichung 5.1 in die folgende Form gebracht werden:

$$\begin{array}{l} \hat{y}_1(x_1) = \hat{a}_1 f_1(x_1) + \hat{a}_2 f_2(x_1), ..., \hat{a}_p f_p(x_1) \\ \hat{y}_2(x_2) = \hat{a}_1 f_1(x_2) + \hat{a}_2 f_2(x_2), ..., \hat{a}_p f_p(x_2) \\ \vdots \\ \hat{y}_n(x_n) = \hat{a}_1 f_1(x_n) + \hat{a}_2 f_2(x_n), ..., \hat{a}_p f_p(x_n) \end{array} \tag{5.3}$$

Die einzelnen Messungen $\vec{y}$ werden somit von einer linearen Funktion $f(\vec{x}, \vec{a})$ vorausgesagt, die nur von den Ortsvariablen x_i und den Parametern a_i abhängt. Nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate muß S bezüglich der Parameter a_i minimiert werden. Die Bedingung dafür ist, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \vec{S}}{\partial \vec{a}}$ verschwinden. Somit gilt:

$$\begin{array}{rll} & \frac{\vec{\partial}}{\partial \vec{a}} \big((\vec{y} - \mathcal{A}\vec{a})^T \mathcal{V}^{-1} (\vec{y} - \mathcal{A}\vec{a}) \big) & = \vec{0} \\ \Rightarrow & \frac{\vec{\partial}}{\partial \vec{a}} \big(\vec{y}^T \mathcal{V}^{-1} \vec{y} - 2\vec{a}^T \mathcal{A}^T \mathcal{V}^{-1} \vec{y} + \vec{a}^T \mathcal{A}^T \mathcal{V}^{-1} \mathcal{A} \vec{a} \big) & = \vec{0} \\ \Rightarrow & \mathcal{A}^T \mathcal{V}^{-1} \vec{y} & = \mathcal{A}^T \mathcal{V}^{-1} \mathcal{A} \vec{\hat{a}} \end{array} \quad . \tag{5.4}$$

Dabei sind in der $n \times p$ Matrix $\mathcal{A}$ die Werte für die Funktion $f_i(x_j)$ vereint. Der p-komponentige Vektor $\vec{a}$ enthält im Minimum von S die Schätzwerte $\hat{a}_i$ der Parameter, welche mit den wahren Werten in Gleichung 5.3 identifiziert werden können. Das lineare Modell ergibt sich in dieser Schreibweise damit gerade zu:

$$\vec{\hat{y}} = \mathcal{A} \vec{\hat{a}} \quad . \tag{5.5}$$

Die Werte der Parameter lassen sich direkt aus Gleichung 5.4 ablesen:

$$\begin{array}{rl} \vec{\hat{a}} = & \underbrace{(\mathcal{A}^T \mathcal{V}^{-1} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \mathcal{V}^{-1}}_{\mathcal{B}} \; \vec{y} \\ = & \mathcal{B} \; \vec{y} \end{array} \quad . \tag{5.6}$$

Somit ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen $\vec{\hat{a}}$ und $\vec{y}$. Die Kovarianzmatrix $\mathcal{V}(\vec{\hat{a}})$ der Parameter kann daher direkt aus der von $\mathcal{V}(\vec{y})$ abgeleitet werden. Allgemein gilt für $a = By + k$:

$$\begin{array}{rl} \mathcal{V}(a) = & E\big[(a - E[a])(a - E[a])^T\big] \\ = & E\big[(By + k - BE[y] - k)(By + k - BE[y] - k)^T\big] \\ = & E\big[B(y - E[y])(y - E[y])^T B^T\big] \\ = & BE\big[(y - E[y])(y - E[y])^T\big] B^T \\ = & B\mathcal{V}(y)B^T \end{array} \quad . \tag{5.7}$$

Der konstante Term k hebt sich gerade heraus und für $\mathcal{V}(a)$ ist nur die Überführungsmatrix B und die Kovarianzmatrix $\mathcal{V}(y)$ relevant. Die Kovarianzmatrix $\mathcal{V}(\vec{\hat{a}})$ der Parameter $\vec{\hat{a}}$ von Gleichung 5.6 ist demzufolge gegeben durch:

$$\mathcal{V}(\vec{\hat{a}}) = \mathcal{B}\mathcal{V}(\vec{y})\mathcal{B}^T \quad . \tag{5.8}$$

Aufgrund der Linearität des Modells (siehe Gleichung 5.5) ergibt sich die Kovarianzmatrix der korrigierten Datenpunkte $\vec{y}$ zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\vec{\hat{y}}) &= \mathcal{A}\mathcal{V}(\vec{\hat{a}})\mathcal{A}^T \\ &= \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{V}(\vec{y})\mathcal{B}^T\mathcal{A}^T \end{aligned} \quad . \tag{5.9}$$

Mit den Gleichungen 5.6, 5.8 und 5.9 ist im Rahmen der Methode der kleinsten Quadrate eine vollständige Lösung des Linearen Modells gegeben.

5.1.2 Nichtlineares Modell

Häufig ist es zwar so, daß die Meßwerte y_i von einer Funktion $f(\vec{x}, \vec{\hat{a}})$ vorhergesagt werden, aber im Gegensatz zu Gleichung 5.3 hängt diese nicht linear von den Parametern $\hat{a}_i$ ab. Solche nichtlinearen Probleme lassen sich unter bestimmten Voraussetzungen durch Linearisierung des Modells lösen. Ist die Abweichnug von der Linearität nicht zu groß, so kann auf ein iteratives Verfahren zurückgegriffen werden, indem nach jedem Schritt der Iteration erneut eine Linearisierung durchgeführt wird. Die Iteration wird solange wiederholt bis ein noch zu definierendes Konvergenzkriterium für S erfüllt ist.

Die Linearisierung des Modells wird mit einer Taylor-Reihenentwicklung durchgeführt:

$$f(x_i, \vec{a}) \approx f(x_i, \vec{a}^{\,(0)}) + \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial f}{\partial a_j}\right|_{a_j = a_j^{(0)}} (a_j - a_j^{(0)}) \quad , \tag{5.10}$$

wobei die Entwicklung um die Stellen $a_j^{(0)}$ erfolgt, welche auch gleichzeitig als Startwerte für die Iteration verwendet werden können. Die Meßwerte $\vec{y}$ sind somit in erster Näherung eine Vorhersage der Parameter $\vec{a}^{\,(0)}$. In Matrixschreibweise ergibt sich S zu:

$$S = \left(\vec{y} - \vec{f} - \mathcal{A}(\vec{a} - \vec{a}^{\,(0)})\right)^T \mathcal{V}^{-1} \left(\vec{y} - \vec{f} - \mathcal{A}(\vec{a} - \vec{a}^{\,(0)})\right) \quad , \tag{5.11}$$

wobei $\mathcal{A}$ die partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ nach den Parametern a_i enthält:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_1} & \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f(x_1)}{\partial a_p} \\ \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f(x_2)}{\partial a_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial f(x_n)}{\partial a_1} & \frac{\partial f(x_n)}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial f(x_n)}{\partial a_p} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.12}$$

Wird $\vec{a} - \vec{a}^{\,(0)}$ mit $\vec{a}'$ und $\vec{y} - \vec{f}$ mit $\vec{y}'$ substituiert, ergeben sich entsprechend Gleichung 5.6 für $S = minimal$, die Parameter a_i' zu:

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= (\mathcal{A}^T\mathcal{V}^{-1}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^T\mathcal{V}^{-1}\vec{y}' \\ \Rightarrow \quad \vec{a} &= \vec{a}^{\,(0)} + (\mathcal{A}^T\mathcal{V}^{-1}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^T\mathcal{V}^{-1}(\vec{y} - \vec{f}) \end{aligned} \quad . \tag{5.13}$$

Die so erhaltenen Werte a_i sind aufgrund der Linearisierung des Modells nicht identisch mit den wahren Werten $\hat{a}_i$. Eine bessere Näherung kann durch iteratives Einsetzen erreicht werden:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{\,(1)} = & \ \vec{a}^{\,(0)} + (\mathcal{A}^T_{a^{(0)}}\mathcal{V}^{-1}\mathcal{A}_{a^{(0)}})^{-1}\mathcal{A}^T_{a^{(0)}}\mathcal{V}^{-1}(\vec{y} - \vec{f}^{\,(0)}) \\ \vec{a}^{\,(2)} = & \ \vec{a}^{\,(1)} + (\mathcal{A}^T_{a^{(1)}}\mathcal{V}^{-1}\mathcal{A}_{a^{(1)}})^{-1}\mathcal{A}^T_{a^{(1)}}\mathcal{V}^{-1}(\vec{y} - \vec{f}^{\,(1)}) \\ \vdots \ & \ \vdots \\ \vec{a}^{\,(l)} = & \ \vec{a}^{\,(l-1)} + (\mathcal{A}^T_{a^{(l-1)}}\mathcal{V}^{-1}\mathcal{A}_{a^{(l-1)}})^{-1}\mathcal{A}^T_{a^{(l-1)}}\mathcal{V}^{-1}(\vec{y} - \vec{f}^{\,(l-1)}) \end{aligned} \quad , \tag{5.14}$$

wobei die Ableitungen $\mathcal{A}_{a^{(i)}}$ immer an den Stellen $a^{(i)}$ durchgeführt werden. Die Iteration wird solange wiederholt, bis ein bestimmtes Konvergenzkriterium erfüllt ist. Ein Beispiel für solch ein Kriterium ist:

$$S(\vec{a}^{\,(l-1)}) - S(\vec{a}^{\,(l)}) < 1/n \tag{5.15}$$

Für $n = 1$ ist eine Genauigkeit von einer Standardabweichung erreicht und die Iteration kann beendet werden, wenn ΔS klein im Vergleich zu den Fehlern der Parameter ist. Diese Fehler sind durch die Kovarianzmatrix $\mathcal{V}(a^{(l)})$ bestimmt und lassen sich unter Verwendung von Gleichung 5.8 mit

$$\mathcal{B} = (\mathcal{A}^T_{a^{\,(l)}}\mathcal{V}^{-1}\mathcal{A}_{a^{\,(l)}})^{-1}\mathcal{A}^T_{a^{\,(l)}}\mathcal{V}^{-1} \quad ,$$

berechnen.

5.1.3 Modell mit Nebenbedingungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden nur Modelle betrachtet, bei denen die einzelnen Meßwerte y_i von Funktionen vorausgesagt werden, die von Parametern a_i und einer Ortsvariablen x_i abhängen:

$$\hat{y}_i = f(x_i, \vec{\hat{a}}) \quad .$$

Entsprechend Gleichung 5.1 können die m Bedingungsgleichungen aber auch direkt von den Parametern und Meßwerten abhängig sein:

$$f_k(\vec{\hat{y}}, \vec{\hat{a}}) = 0 \quad \text{mit} \quad k = 1, 2...m \quad . \tag{5.16}$$

Die m Gleichungen werden Nebenbedingungen oder auch Zwangsbedingungen genannt. Im Allgemeinen werden die gemessenen Werte y_i die Bedingungen nicht exakt erfüllen. Mit der Methode der kleinsten Quadrate können aber korrigierte Werte $E[\vec{y}] = \vec{\hat{y}}$ und $E[\vec{a}] = \vec{\hat{a}}$ gefunden werden, die Gleichung 5.16 genügen.

Im Falle nichtlinearer Nebenbedingungen kann die Minimierung von $S = S(\vec{y})$ mit der bekannten Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren durchgeführt werden. Entsprechend [**?**] ist S mit der in Gleichung 5.16 gegebenen Form der Nebenbedingungen *minimal*, wenn folgende Funktion ein Extremum besitzt:

$$L(\vec{y}, \vec{a}, \vec{\lambda}) = S(\vec{y}) + 2\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(\vec{y}, \vec{a}) \quad , \tag{5.17}$$

wobei $\vec{\lambda}$ die sogenannten Lagrangeschen Multiplikatoren sind.

Für nichtlineare Nebenbedingungen kann auf das im vorangegangenen Abschnitt entwickelte Iterationsverfahren und die damit verbundene Linearisierung zurückgegriffen werden. Analog zu Gleichung 5.10 können die Nebenbedingungen in einer Taylor-Reihe entwickelt werden:

$$f_k(\vec{y},\vec{a}) \approx f_k(\vec{y}^{\,(0)},\vec{a}^{\,(0)}) + \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial f_k}{\partial a_j}\right|_{a_j=a_j^{(0)}} (a_j - a_j^{(0)}) + \sum_{i=1,n}^{n} \left.\frac{\partial f_k}{\partial y_i}\right|_{y_i=y_i^{(0)}} (y_i - y_i^{(0)}) \approx 0 \quad , \tag{5.18}$$

wobei die Ableitungen an den Stellen $a_j^{(0)}$ und $y_i^{(0)}$ durchgeführt werden. Werden diese partiellen Ableitungen nach a_i in der Matrix $\mathcal{A}$ (siehe Gleichung 5.12) und die nach y_i in der Matrix:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

vereint, so kann Gleichung 5.18 in Matrixschreibweise ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{rll} & \vec{f}^{\,(0)} + \mathcal{A}(\vec{a} - \vec{a}^{\,(0)}) & +\mathcal{B}(\vec{y} - \vec{y}^{\,(0)}) \approx 0 \\ \Rightarrow & \underbrace{\vec{f}^{\,(0)} - \mathcal{A}\vec{a}^{\,(0)} - \mathcal{B}\vec{y}^{\,(0)}} & +\mathcal{A}\vec{a} + \mathcal{B}\vec{y} \approx 0 \\ \Rightarrow & -\vec{c}^{\,(0)} & +\mathcal{A}\vec{a} + \mathcal{B}\vec{y} \approx 0 \end{array} \tag{5.20}$$

Gleichung 5.17 wird in Matrixschreibweise somit zu:

$$L(\vec{y},\vec{a},\vec{\lambda}) = (\vec{y} - \vec{y}_0)^T \mathcal{V}^{-1} (\vec{y} - \vec{y}_0) + 2\vec{\lambda}^T (\mathcal{A}\vec{a} + \mathcal{B}\vec{y} - \vec{c}^{\,(0)}) \quad , \tag{5.21}$$

wobei die Meßwerte $\vec{y}_0$ für den ersten Iterationsschritt mit den Entwicklungspunkten $\vec{y}^{\,(0)}$ identifiziert werden können. Die Kovarianzmatrix der Meßwerte ist wie immer durch $\mathcal{V}(\vec{y}_0) = \mathcal{V}$ gegeben. Die Bedingung für ein Extremum von $L(\vec{y},\vec{a},\vec{\lambda})$ ergibt sich damit zu:

$$\begin{array}{lrl} \frac{\partial L}{\partial y} = & 2\mathcal{V}^{-1}\vec{y} - 2\mathcal{V}^{-1}\vec{y}_0 + 2\vec{\lambda}^T\mathcal{B} & = 0 \\ & \Rightarrow \quad \mathcal{V}^{-1}(\vec{y} - \vec{y}_0) + \mathcal{B}^T\vec{\lambda} & = 0 \\ & & \\ \frac{\partial L}{\partial a} = & 2\vec{\lambda}^T\mathcal{A} & = 0 \\ & \Rightarrow \quad \mathcal{A}^T\vec{\lambda} & = 0 \\ & & \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = & 2(\mathcal{A}\vec{a} + \mathcal{B}\vec{y} - \vec{c}^{\,(0)}) & = 0 \\ & \Rightarrow \quad \mathcal{A}\vec{a} + \mathcal{B}\vec{y} - \vec{c}^{\,(0)} & = 0 \end{array} \quad . \tag{5.22}$$

Ein einfaches Lösungsverfahren für dieses Gleichungssystem ist die sogenannte Inversion durch Partitionierung. Hierbei wird zuerst eine Gleichung mit partitionierten Matrizen aufgestellt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & \mathcal{B}^T \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{a} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{V}^{-1}\vec{y}_0 \\ 0 \\ \vec{c}^{\,(0)} \end{pmatrix}}_{=\vec{k}} \tag{5.23}$$

Durch einfaches Ausmultiplizieren dieser Gleichung läßt sich zeigen, daß sie äquivalent zu dem Gleichungssystem in 5.22 ist. Der folgende Ansatz erlaubt eine einfache Invertierung der partitionierten Matrix $\mathcal{C}^{-1}$:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{21}^T & \mathcal{C}_{31}^T \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{32}^T \\ \mathcal{C}_{31} & \mathcal{C}_{32} & \mathcal{C}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & \mathcal{B}^T \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \tag{5.24}$$

Die Lösung von Gleichung 5.23 ist demzufolge durch:

$$\vec{x} = \mathcal{C}\vec{k} \quad ,$$

gegeben, was auch direkt in den korrigierten Werten y_i und a_j sowie den Lagrangeschen Multiplikatoren λ_k ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \vec{y} =& \ \mathcal{C}_{11}\mathcal{V}^{-1}\vec{y}_0 + \mathcal{C}_{31}^T\vec{c}^{\,(0)} \\ \vec{a} =& \ \mathcal{C}_{21}\mathcal{V}^{-1}\vec{y}_0 + \mathcal{C}_{32}^T\vec{c}^{\,(0)} \\ \vec{\lambda} =& \ \mathcal{C}_{31}\mathcal{V}^{-1}\vec{y}_0 + \mathcal{C}_{33}\vec{c}^{\,(0)} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Für die Berechnung der Kovarianzmatrizen $\mathcal{V}(\vec{y})$ und $\mathcal{V}(\vec{a})$ der korrigierten Meßwerte $\vec{y}$ und der korrigierten Parameter $\vec{a}$ ist es allerdings sinnvoll das Gleichungsystem 5.23 umzuformen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & \mathcal{B}^T \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{y} - \vec{y}_0 \\ \vec{a} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix}}_{\vec{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{c}^{\,(0)} - \mathcal{B}\vec{y}_0 \end{pmatrix}}_{=\vec{k}'} \tag{5.26}$$

Somit sind die korrigierten Größen $\vec{x}'$ durch eine einfache partitionierte Vektorgleichung gegeben:

$$\begin{pmatrix} \vec{y} - \vec{y}_0 \\ \vec{a} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} = (\vec{c}^{\,(0)} - \mathcal{B}\vec{y}_0) \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{31}^T \\ \mathcal{C}_{32}^T \\ \mathcal{C}_{33} \end{pmatrix} \quad . \tag{5.27}$$

Die vollständige Lösung reduziert sich daher nur auf die Bestimmung der Matrixelemente $\mathcal{C}_{3i}$. Per Konstruktion gilt:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{21}^T & \mathcal{C}_{31}^T \\ \mathcal{C}_{21} & \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{32}^T \\ \mathcal{C}_{31} & \mathcal{C}_{32} & \mathcal{C}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}^{-1} & 0 & \mathcal{B}^T \\ 0 & 0 & \mathcal{A}^T \\ \mathcal{B} & \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.28}$$

wobei $\mathcal{I}$ die Einheitsmatrix darstellt. Die Auflösung dieser neun Gleichungen nach den Untermatrizen $\mathcal{C}_{3i}$ ergibt[**?**]:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{31} =& \ \mathcal{V}_\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{V} - \mathcal{C}_{32}\mathcal{A}^T\mathcal{V}_\mathcal{B}\mathcal{B}\mathcal{V} \\ \mathcal{C}_{32} =& \ \mathcal{V}_\mathcal{B}\mathcal{A}(\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1} \\ \mathcal{C}_{33} =& \ \mathcal{C}_{32}\mathcal{A}^T\mathcal{V}_\mathcal{B} - \mathcal{V}_\mathcal{B} \end{aligned} \quad . \tag{5.29}$$

Die Abkürzungen $\mathcal{V}_\mathcal{B} = (\mathcal{B}\mathcal{V}\mathcal{B}^T)^{-1}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{A} = (\mathcal{A}^T\mathcal{V}_\mathcal{B}\mathcal{A})$ wurden hierbei zur Vereinfachung eingeführt.

Analog zu Gleichung 5.7 lassen sich nun die Kovarianzmatrizen $\mathcal{V}(\vec{y})$ und $\mathcal{V}(\vec{a})$ der korrigierten Meßwerte und Parameter berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \vec{y}_0 + \mathcal{C}_{31}^T(\vec{c}^{\,(0)} - \mathcal{B}\vec{y}_0) \\ &= (\mathcal{I} - \mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B})\vec{y}_0 + konst. \\ &\ \text{und} \\ \vec{a} &= \mathcal{C}_{32}^T(\vec{c}^{\,(0)} - \mathcal{B}\vec{y}_0) \\ &= \mathcal{C}_{32}^T\mathcal{B}\vec{y}_0 + konst. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Da die korrigierten Größen linear von den Meßwerten abhängen, ergibt sich ihre Kovarianzmatrix durch einfache Fehlerfortpflanzung der Kovarianzmatrix $\mathcal{V}$ der Meßwerte $\vec{y}_0$ (siehe 5.7):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\vec{y}) &= (\mathcal{I} - \mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B})\mathcal{V}(\mathcal{I} - \mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B})^T \\ &= \mathcal{V} - 2\mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B}\mathcal{V} + \mathcal{C}_{31}^T(\mathcal{B}\mathcal{V}\mathcal{B}^T)\mathcal{C}_{31} \\ &= \mathcal{V} - 2\mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B}\mathcal{V} + \mathcal{C}_{31}^T(\mathcal{V}_\mathcal{B})^{-1}\mathcal{C}_{31} \qquad , \\ &= \mathcal{V} - 2\mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B}\mathcal{V} + \mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B}\mathcal{V} + 0 \\ &= \mathcal{V} - \mathcal{C}_{31}^T\mathcal{B}\mathcal{V} \end{aligned} \tag{5.31}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\vec{a}) &= (\mathcal{C}_{32}^T\mathcal{B})\mathcal{V}(\mathcal{C}_{32}^T\mathcal{B})^T \\ &= \mathcal{C}_{32}^T(\mathcal{B}\mathcal{V}\mathcal{B}^T)\mathcal{C}_{32} \\ &= \mathcal{C}_{32}^T(\mathcal{V}_\mathcal{B})^{-1}\mathcal{C}_{32} \\ &= \Big((\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^T\mathcal{V}_\mathcal{B}\Big)(\mathcal{V}_\mathcal{B})^{-1}\Big(\mathcal{V}_\mathcal{B}\mathcal{A}(\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1}\Big) \qquad . \\ &= (\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1}(\mathcal{A}^T\mathcal{V}_\mathcal{B}\mathcal{A})(\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1} \\ &= (\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1}\mathcal{V}_\mathcal{A}(\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1} \\ &= (\mathcal{V}_\mathcal{A})^{-1} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Mit Gleichung 5.27 und 5.29 sind die korrigierten Meßwerte und Parameter definiert. Ihre Kovarianzmatrizen lassen sich aus der Kovarianzmatrix der Meßwerte $\mathcal{V}$ unter Anwendung von Gleichung 5.31 und 5.32 direkt ableiten. Damit ist prinzipiell eine vollständige Lösung des Modells mit Nebenbedingungen gegeben. Wie aber schon in Abschnitt 5.1.2 angesprochen, kann die Lösung für nichtlineare Nebenbedingungen durch ein Iterationsverfahren entscheidend verbessert werden. Die Iterationsvorschrift ergibt sich unter Verwendung von 5.27 wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \vec{y}^{\,(l)} - \vec{y}_0 \\ \vec{a}^{\,(l)} \\ \vec{\lambda}^{\,(l)} \end{pmatrix} = (\vec{c}^{\,(l-1)} - \mathcal{B}^{(l-1)}\vec{y}_0) \begin{pmatrix} (\mathcal{C}_{31}^T)^{(l-1)} \\ (\mathcal{C}_{32}^T)^{(l-1)} \\ (\mathcal{C}_{33})^{(l-1)} \end{pmatrix} \qquad , \tag{5.33}$$

mit

$$\vec{c}^{\,(l-1)} = \mathcal{B}^{(l-1)}\vec{y}^{\,(l-1)} + \mathcal{A}^{(l-1)}\vec{a}^{\,(l-1)} - \vec{f}^{\,(l-1)} \qquad .$$

Hierbei wird die jeweilige Linearisierung der Nebenbedingungen immer an den Stellen $\vec{y}^{\,(l-1)}$ und $\vec{a}^{\,(l-1)}$ durchgeführt. Die Iteration wird solange wiederholt, bis ein bestimmtes Konvergenzkriterium, wie etwa:

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(\vec{y}^{\,(l)}, \vec{a}^{\,(l)}) < \epsilon \tag{5.34}$$

erfüllt ist. Im Falle von gauß-verteilten Fehlern auf die Meßwerte und wenn die Abweichung von der Linearität nur klein ist, wird die Verteilung von S annähernd einer χ^2-Verteilung entsprechen. Analog zu Gleichung 5.15 kann dann auch die Änderung des χ^2 als Abbruchkriterium dienen:

$$\frac{\chi^2_{(l-1)} - \chi^2_{(l)}}{ndf} < \epsilon \quad , \tag{5.35}$$

wobei die Anzahl der Freiheitsgrade ndf gerade die Differenz zwischen der Anzahl der Nebenbedingungen m und der Anzahl der nicht gemessenen Parameter p ist:

$$ndf = m - p \quad . \tag{5.36}$$

5.2 Anpassung von W^+W^--Ereignissen

In den folgenden Abschnitten wird die Methode der kleinsten Quadrate mit Nebenbedingungen auf semileptonische und hadronische Ereignisse angewendet. Hierfür muß zuerst eine Parametrisierung der Impulse in den anzupassenden Variablen und die daraus resultierende Bestimmung ihrer Kovarianzmatrizen vorgenommen werden. Der nächste Schritt ist die Definition der Zwangsbedingungen (Nebenbedingungen) und die explizite Einbettung in die Theorie der kleinsten Quadrate. Den Abschluß dieses Kapitels bildet die nach hadronisch und semileptonischem Kanal getrennte Darstellung eines kompletten Anpassungskonzepts.

5.2.1 Parametrisierung der Impulse

Nach der Selektion sind, entsprechend der in Abschnitt 4.2.1 bereits besprochenen Rekonstruktionshypothese, die gemessenen Größen durch die Viererimpulse $\vec{P}^{\,m} = (P_x^m, P_y^m, P_z^m, E^m)$ der vier Jets im hadronischen Kanal bzw. die Viererimpulse von zwei Jets und einem Lepton im semileptonischen Kanal gegeben. Damit die Funktion S der kleinsten Quadrate annähernd einer χ^2-Verteilung folgt, muß sicher gestellt werden, daß die Fehler auf die Meßgrößen gaußverteilt sind. Eine Parametrisierung der Impulse in kartesischen Koordinaten gewährleistet dies nicht. Wie in den Abbildungen 5.1 und 5.2 dargestellt, sind die Abweichungen von einer Normalverteilung erheblich. Aufgrund der gauß-verteilten Energieauflösung des Detektors erscheint eine Parametrisierung des Impulses nach Betrag und Richtung sinnvoll. Entsprechend der Symmetrie des Detektors ALEPH, bietet sich hierfür ein sphärisches Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren $(\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\phi)$ an. Der Dreierimpuls für die kinematische Anpassung ist damit:

$$\vec{P}_i^{\,Fit} = exp(a_i)|\vec{P}_i^{\,m}|\hat{u}_{r_i} + b_i\hat{u}_{\theta_i} + c_i\hat{u}_{\phi_i} \quad , \tag{5.37}$$

wobei die Einheitsvektoren sich aus dem, in kartesischen Koordinaten gemessenen, Impuls $\vec{P}_i^{\,m}$ berechnen lassen:

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{P}_i^{\,m}}{|\vec{P}_i^{\,m}|} \quad , \quad \hat{u}_\phi = \frac{\hat{u}_z \times \hat{u}_r}{|\hat{u}_z \times \hat{u}_r|} \quad , \quad \hat{u}_\theta = \frac{\hat{u}_r \times \hat{u}_\phi}{|\hat{u}_r \times \hat{u}_\phi|} \quad . \tag{5.38}$$

Mit Gleichung 5.37 ist somit eine Darstellung des anzupassenden Impulses $\vec{P}_i^{\,Fit}$ als Funktion des gemessenen Impulses und dreier Skalierungsvariablen a_i, b_i, c_i möglich. Für eine ideale, fehlerfreie Messung ergeben sich diese Variablen gerade zu:

$$a_i^{ideal} = 0 \quad , \quad b_i^{ideal} = 0 \quad , \quad c_i^{ideal} = 0 \quad . \tag{5.39}$$

Aufgrund endlicher Detektorauflösung, falscher Zuordnung von Teilchen zu den Jets und vielen anderen experimentellen Schwierigkeiten, ist natürlich jede Messung fehlerbehaftet. Mit den Skalierungsfaktoren können diese Unzulänglichkeiten der Messung im Mittel korrigiert werden. Somit stellen sie effektiv Korrekturfaktoren dar, mit denen der gemessene Impuls, mit der Methode der kleinsten Quadrate, in einen korrigierten Impuls überführt werden kann. Dieser wird im Allgemeinen dem zugrundeliegenden wahren Fermionenimpuls näher kommen. Aus diesen Gründen lassen sich die Skalierungsfaktoren a_i, b_i, c_i mit den anzupassenden Größen $\vec{y}$ in Gleichung 5.21 identifizieren:

$$\vec{y} = (a_1, b_1, c_1, ..., a_n, b_n, c_n) \quad , \tag{5.40}$$

wobei n der Anzahl der gemessenen Objekte in der Rekonstruktionshypothese entspricht. Die angepaßte Energie der Objekte kann aus der gemessenen Energie durch Reskalierung berechnet werden:

$$E_i^{Fit} = E_i^m \frac{|\vec{P}_i^{\,Fit}|}{|\vec{P}_i^{\,m}|} \tag{5.41}$$

Diese Gleichung ist nur richtig für masselose Kinematik. Alternativ kann auch ein vierter Anpassungsparameter d_i eingeführt werden:

$$E_i^{Fit} = f\left(\left| \vec{P}_i^{\,Fit} \right|, d_i \right) \quad . \tag{5.42}$$

Damit ist die Energie in der Anpassung frei und die d_i's müssen als zusätzliche Variablen in Gleichung 5.40 hinzugefügt werden. In den folgenden Abschnitten wird allerdings die Energie immer unter Verwendung von Gleichung 5.41 berechnet.

5.2.2 Kovarianzmatrix der Meßwerte

Die rekonstruierten Objekte (Jets und Leptonen) setzen sich aus mehreren gemessenen Spuren und Energieclustern im Detektor zusammen[1]. Prinzipiell kann durch Fehlerfortpflanzung die Kovarianzmatrix der kombinierten Objekte ermittelt werden. Da aber vertrauenswürdige Fehler nur für geladene Spuren und nicht für neutrale Kalorimeterobjekte zur Verfügung stehen, scheidet diese Vorgehensweise zur Bestimmung der Kovarianzmatrix aus.
Basierend auf der Information von vollständig simulierten Monte Carlo Ereignissen kann eine alternative Ermittlung der Matrix durchgeführt werden. Dabei wird mit einem Vergleich der rekonstruierten Objekte mit den generierten vier Fermionen, die erwartete Auflösung der Impulse bestimmt. Zu diesem Zweck werden die rekonstruierten Objekte mit den primären Fermionen assoziiert. Diese Zuordung erfolgt durch Minimierung der Winkelsumme:

$$\mu_\theta = \sum_{Objekt_i, Fermion_j} \theta_{i,j}^2 \quad ,$$

über alle möglichen Kombinationen.

Entsprechend Gleichung 5.40 können aus den generierten Vier-Fermionen Impulsen und den ihnen zugeordneten gemessenen Impulsen Erwartungswerte $\vec{y}_0 = (a_0^1, b_0^1, c_0^1, ..., a_0^n, b_0^n, c_0^n)$ für

[1] Dies gilt auch für die Leptonen. Entsprechend der Rekonstruktionshypothese werden z.B. zu der gemessenen Spur des Leptons noch Bremsstrahlungsphotonen addiert. Somit setzen sich insbesondere die Viererimpulse der Elektronen aus mehreren Meßgrößen zusammen.

die Meßwerte ermittelt werden. Die Breite der Verteilungen läßt sich als erwartete Schwankungsbreite $\vec{\sigma}_{y_0}$ der Meßwerte interpretieren. In den Abbildungen 5.1 und 5.2 sind, getrennt nach Jets und Leptonen, exemplarische Verteilungen für die $\vec{y}_0$'s gezeigt. Im Falle der Leptonen ist die Verbesserung gegenüber der Parametrisierung in kartesischen Koordinaten erheblich und die Verteilungen sind annähernd gaußisch. Aufgrund fehlerhafter Zuordnungen der Teilchen zu den Jets, ist die Verbesserung für die Jets wesentlich kleiner. Inwieweit diese Abweichungen von einer Normalverteilung einen Einfluß auf die erhoffte χ^2-Verteilung von S hat, wird in Abschnitt 5.2.7 noch diskutiert.

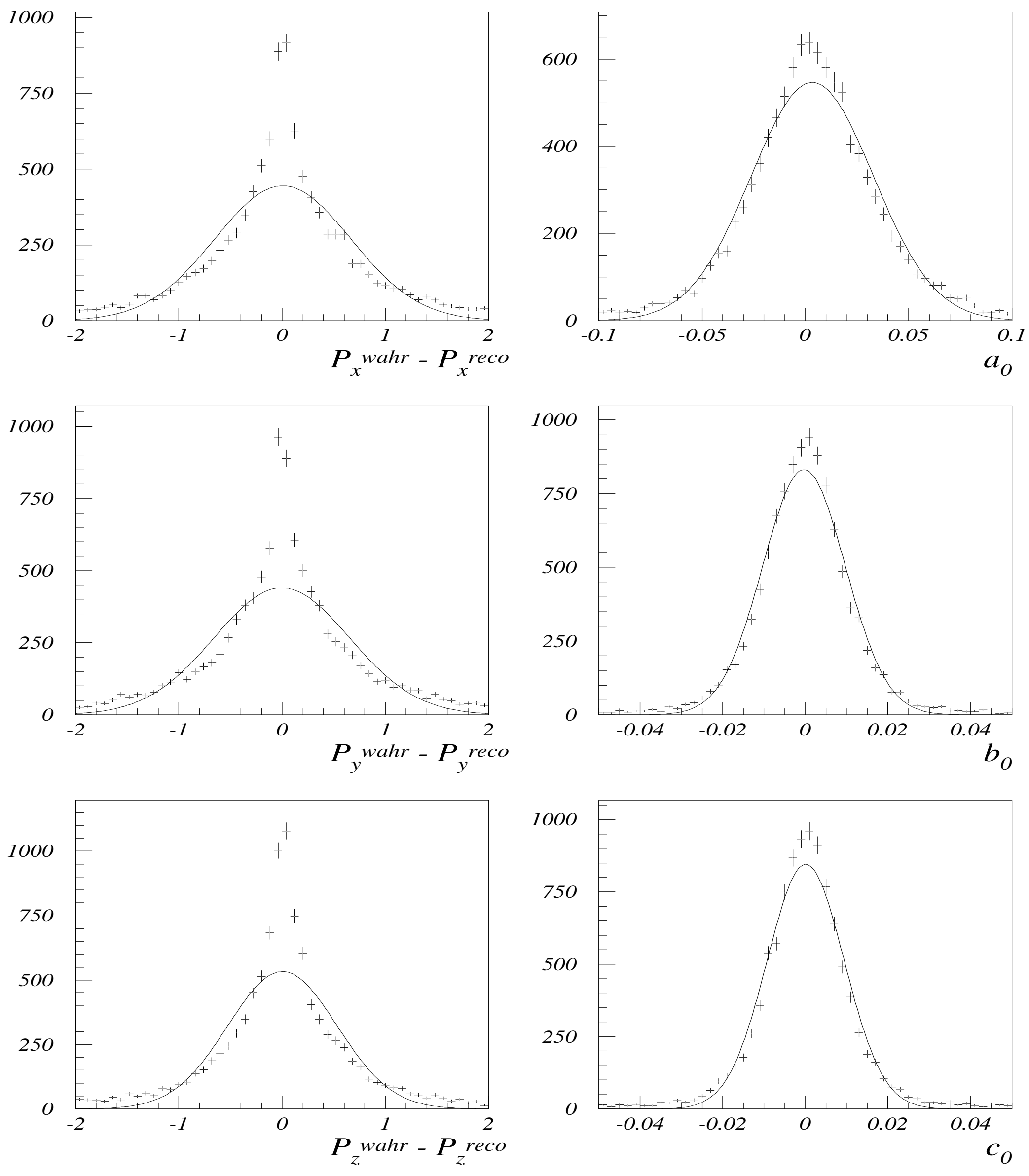


Abbildung 5.1: *Vergleich der Auflösungsverteilungen des Dreierimpulses in kartesischer (rechts) und sphärischer (links) Parametrisierung. Bei der angepaßten Kurve handelt es sich um eine Gauß-Verteilung. Dargestellt sind nur die Werte für Leptonen.*

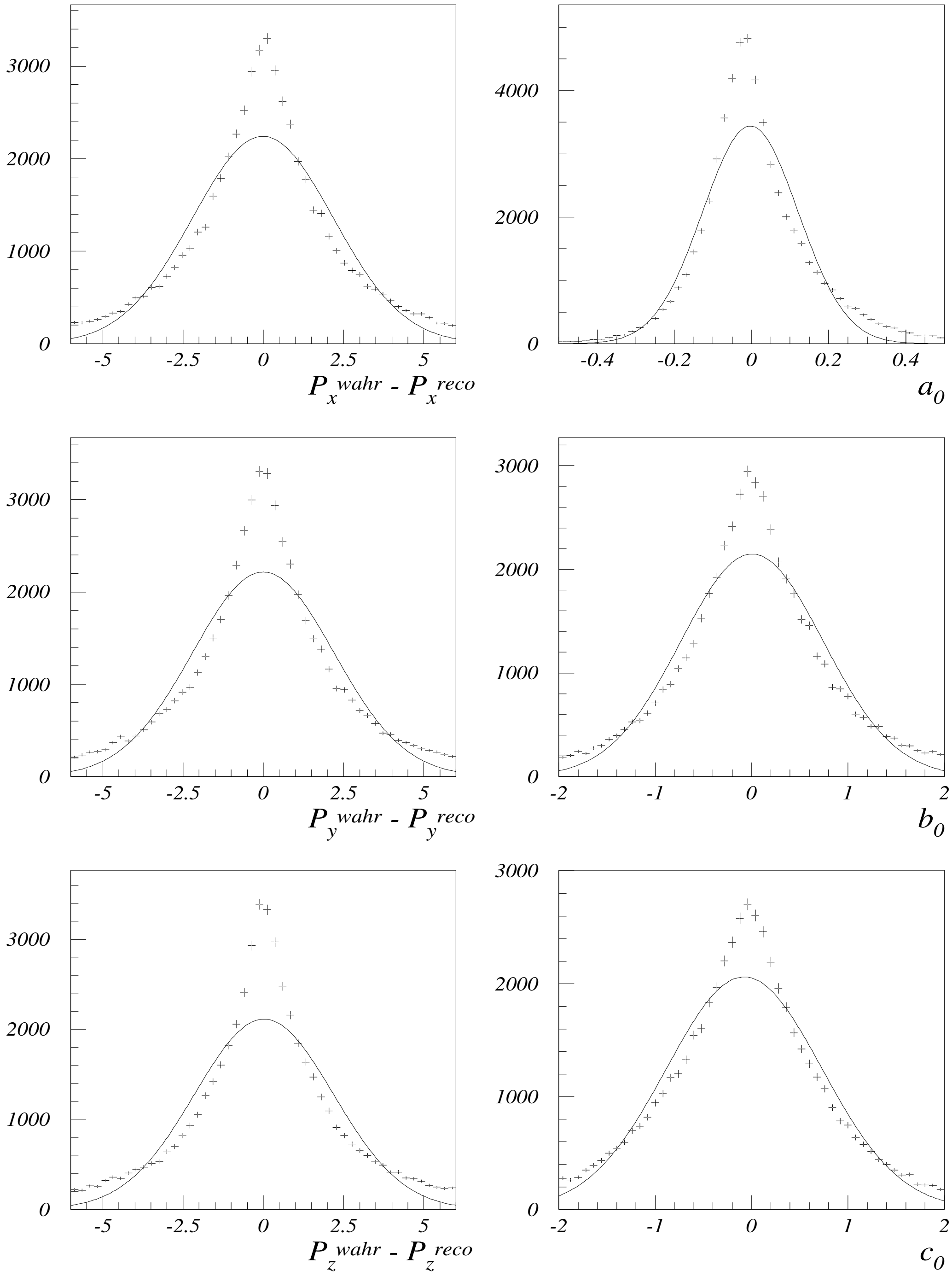


Abbildung 5.2: *Vergleich der Auflösungsverteilungen des Dreierimpulses in kartesischer (rechts) und sphärischer (links) Parametrisierung. Bei der angepaßten Kurve handelt es sich um eine Gauß-Verteilung. Dargestellt sind nur die Werte für Jets.*

Die energie- und richtungsabhängige Auflösung des Detektors macht es notwendig, die $\vec{y}_0$'s wie auch die $\vec{\sigma}_{y_0}$'s als Funktion dieser beiden Größen zu behandeln:

$$\vec{y}_0 = \vec{y}_0(E, \cos\theta) \quad , \quad \vec{\sigma}_{y_0} = \vec{\sigma}_{y_0}(E, \cos\theta) \quad , \tag{5.43}$$

wobei θ der Winkel des Objekts zur Strahlachse und E dessen Energie ist. Um diese Abhängigkeit von Energie und Winkel zu quantifizieren, werden die Erwartungswerte aus dem Monte Carlo getrennt in einzelnen Energie- und Winkelintervallen bestimmt. Die zur Verfügung stehende Anzahl von Monte Carlo Ereignissen[2] für diese Bestimmung beträgt $200 \cdot 10^3$ voll simulierter WW-Ereignisse und legt folgende Unterteilung in den gemessenen Größen nahe:

Leptonen

Variable	N	MIN	MAX
E	8	20 GeV	75 GeV
$\cos\theta$	8	-1	1

Jets

Variable	N	MIN	MAX
E	8	15 GeV	80 GeV
$\cos\theta$	8	-1	1

, (5.44)

wobei N die Anzahl der äquidistanten Intervalle ist. Die Länge des Intervalls ist somit durch $\Delta = (MAX - MIN)/N$ gegeben. In den Abbildungen 5.4 und 5.5 sind für Jets und Leptonen die zweidimensionalen Verteilungen der $\vec{y}_0$'s und $\vec{\sigma}_{y_0}$'s dargestellt. Die Energie- und Winkelabhängigkeit der Erwartungswerte a_0 ist besonders ausgeprägt. Eindeutig ist eine Zunahme des Korrekturwertes $exp(a_0)$ mit fallender Jet- bzw. Leptonenergie zu beobachten. Dies deutet darauf hin, daß die rekonstruierten Objekte bei kleinen Energien meist unterschätzte und bei großen Energien meist überschätzte Energiewerte besitzen. Aufgrund der symmetrischen Akzeptanz des Detektors in $\hat{u}_r$-Richtung ist die Winkelabhängigkeit der a_0's symmetrisch. Die gleiche Argumentation greift auch für die Korrekturwerte c_0 in $\hat{u}_\phi$-Richtung. Für Korrekturen in $\hat{u}_\theta$-Richtung ist die Winkelabhängigkeit allerdings asymmetrisch. Dieses Verhalten wird verständlich, wenn in Betracht gezogen wird, daß $cos\theta$ eine asymmetrische Funktion ist und somit die Korrekturen b_0 gerade beim Übergang von einer Detektorhemisphäre in die andere ihr Vorzeichen wechseln. Schematisch ist dieses Verhalten in Abbildung 5.3 dargestellt:

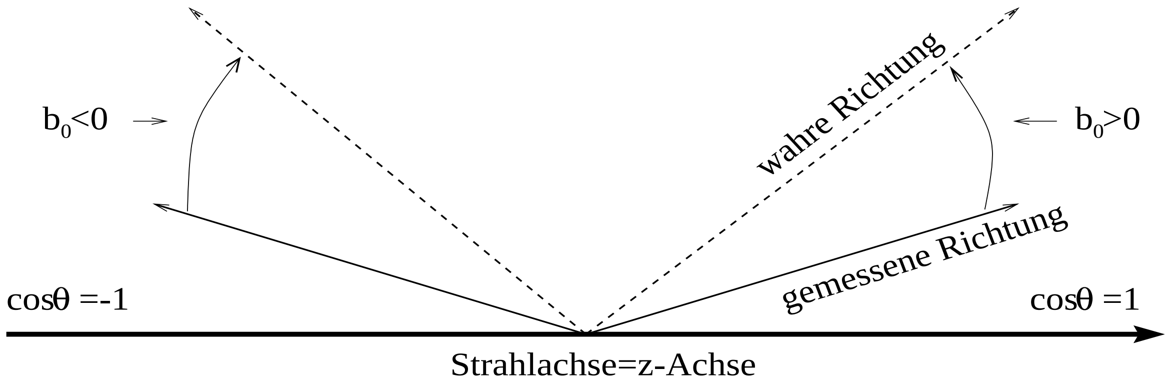


Abbildung 5.3: *Schematische Darstellung des Verhaltens der Korrekturwerte b_0 in $\hat{u}_\theta$-Richtung.*

[2]Bei der Bestimmung der $\vec{y}_0$'s und $\vec{\sigma}_{y_0}$'s muß darauf geachtet werden, daß der verwendete Monte Carlo Ereignissatz nicht auch zur Optimierung von anderen Teilen der Analyse bzw. Berechnung von Effizienzen und Reinheit verwendet wird.

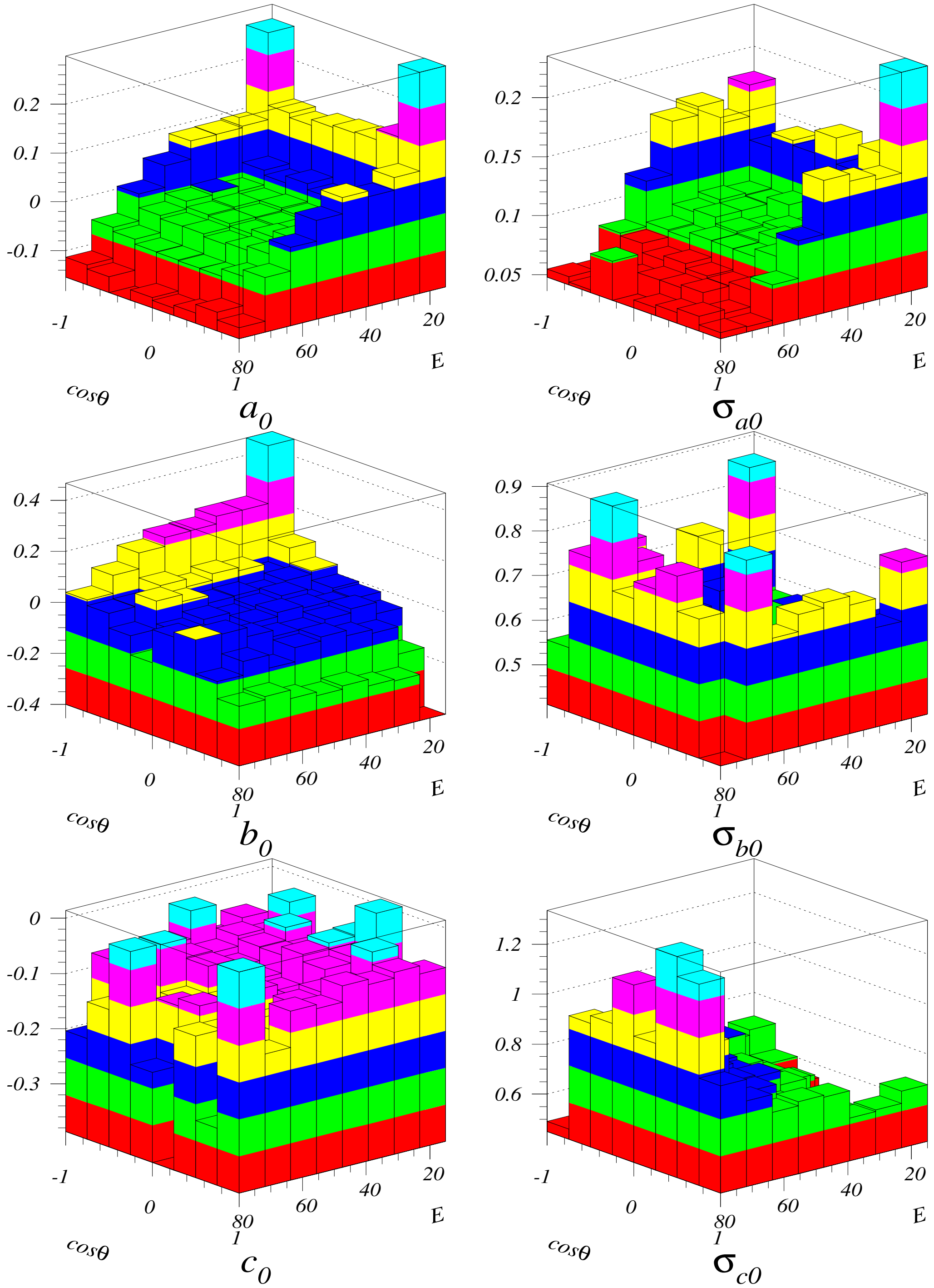


Abbildung 5.4: *Darstellung der in Energie- und Winkelintervall berechneten Erwartungswerte $\vec{y}_0$ (links) und deren Breite $\sigma_{\vec{y}_0}$ (rechts). Dargestellt sind nur die Werte für Jets.*

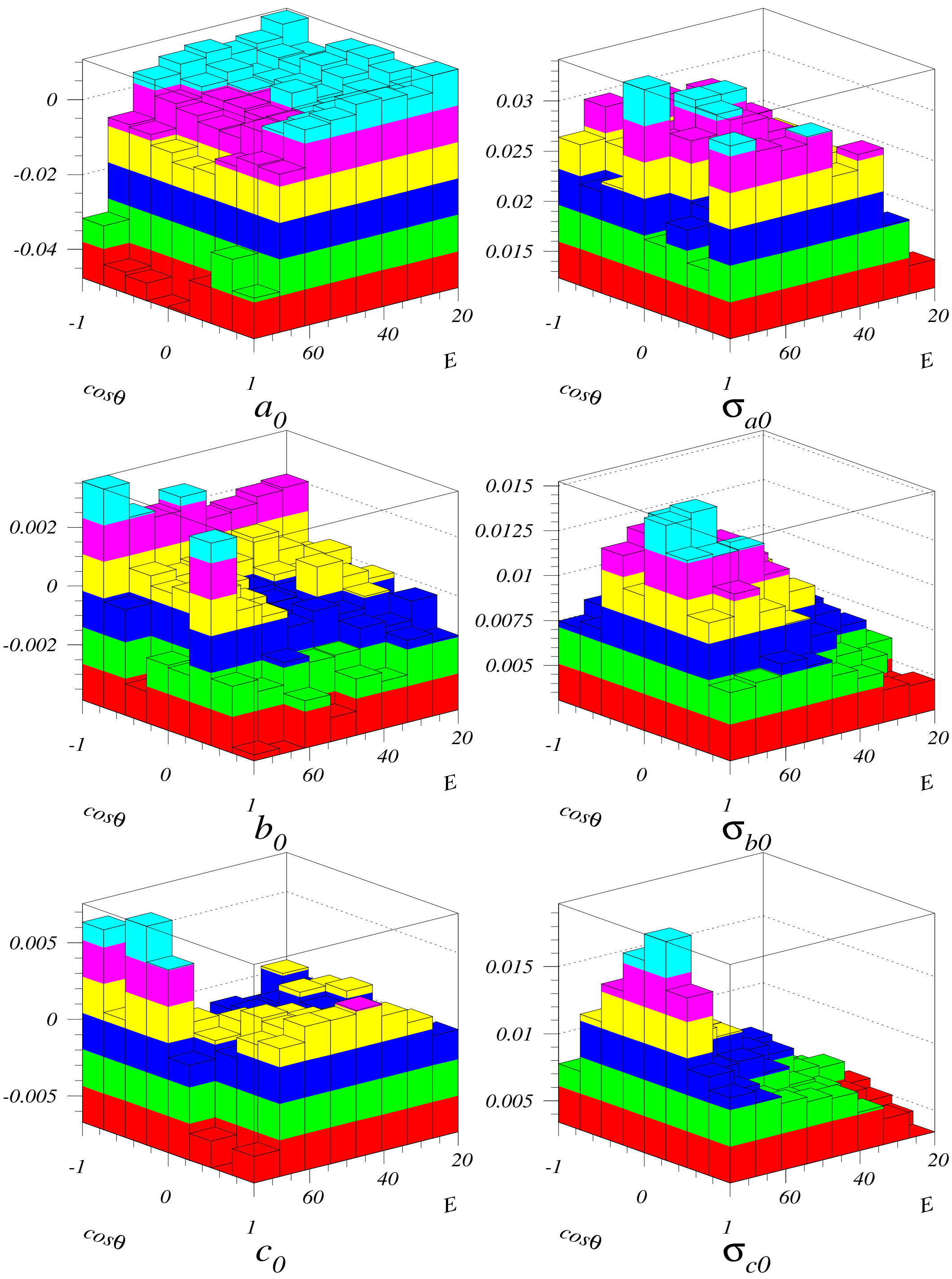


Abbildung 5.5: *Darstellung der in Energie- und Winkelintervall berechneten Erwartungswerte* $\vec{y}_0$ *(links) und den deren Breite* $\sigma_{\vec{y}_0}$ *(rechts). Dargestellt sind nur die Werte für Leptonen.*

Um die statistischen Fluktuationen in den einzelnen Intervallen zu minimieren, wird eine Glättung der zweidimensionalen Verteilungen vorgenommen. Entsprechend dem angesprochenen Symmetrieverhalten der einzelnen $\vec{y}_0$'s wurden folgende Glättungsfunktionen gewählt:

- Energieabhängigkeit:

$$k_0 + k_1 * E + k_2 * E^2 + k_3 * E^3 + k_4 * E^4 + k_5 * E^5$$

- Winkelabhängigkeit

  – Symmetrisch[3] für a_0, b_0, σ_{a_0}, σ_{b_0} und σ_{c_0}:

$$l_0 + l_1 * cos\theta^6 + l_2 * cos\theta^8$$

  – Asymmetrisch für b_0:

$$d_0 + d_1 * cos\theta^3 + d_2 * cos\theta^5$$

Mit einer χ^2-Anpassung an die zweidimensionalen, in Intervallen bestimmten Verteilungen können die Parameter der Polynome k_i, l_i und d_i ermittelt werden. In den Abbildungen 5.6-5.9 sind die geglätteten Verteilungen gezeigt. Somit ist eine konsistente Beschreibung der $\vec{y}_0$'s und $\vec{\sigma}_{y_0}$'s als Funktion der gemessenen Energie E und dem gemessenen Winkel θ gegeben. Entsprechend dem Modell der kleinsten Quadrate, können nun diese Korrekturwerte mit den in Gleichung 5.21 definierten Meßwerten identifiziert werden. Auf den ersten Blick mag diese Assoziation von Erwartungswerten aus dem Monte Carlo mit Meßwerten etwas erstaunlich erscheinen. Unter Berücksichtigung von Gleichung 5.37 wird aber deutlich, daß die $\vec{y}_0$'s nichts anderes als Korrekturfaktoren sind, die den fehlerhaft gemessenen Impuls in einen korrigierten Impuls überführen. Da aber diese Korrekturen ebenfalls fehlerbehaftet sind, können mit der Methode der kleinsten Quadrate Korrekturen $\vec{\Delta y}$ auf die $\vec{y}_0$'s bestimmt werden, so daß die Werte $\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{\Delta y}$ im Allgemeinen näher an den zugrundeliegenden wahren Werten sind. Die $\vec{y}$'s wurden bereits in Gleichung 5.40 mit den Anpassungsvariablen identifiziert.

Aufgrund der gewählten Parametrisierung des Dreierimpulses (siehe Gleichung 5.37) sind die Korrelationen zwischen den einzelnen Meßwerten, also den $\vec{y}_0$'s, klein und es hat sich gezeigt, daß die Kovarianzmatrix $\mathcal{V}$, ohne weitere sichtbare Auswirkungen auf die Anpassungsergebnisse, diagonal angesetzt werden kann:

$$\mathcal{V} = \mathcal{I}\vec{\sigma}_{y_0} \quad , \tag{5.45}$$

wobei $\mathcal{I}$ gerade eine $n \times n$-Einheitsmatrix darstellt.

[3]Es hat sich herausgestellt, daß mit dieser symmetrischen Funktion die beste Anpassung möglich ist. Die symmetrischen Polynome niedrigerer Ordung gaben keine befriedigende Beschreibung.

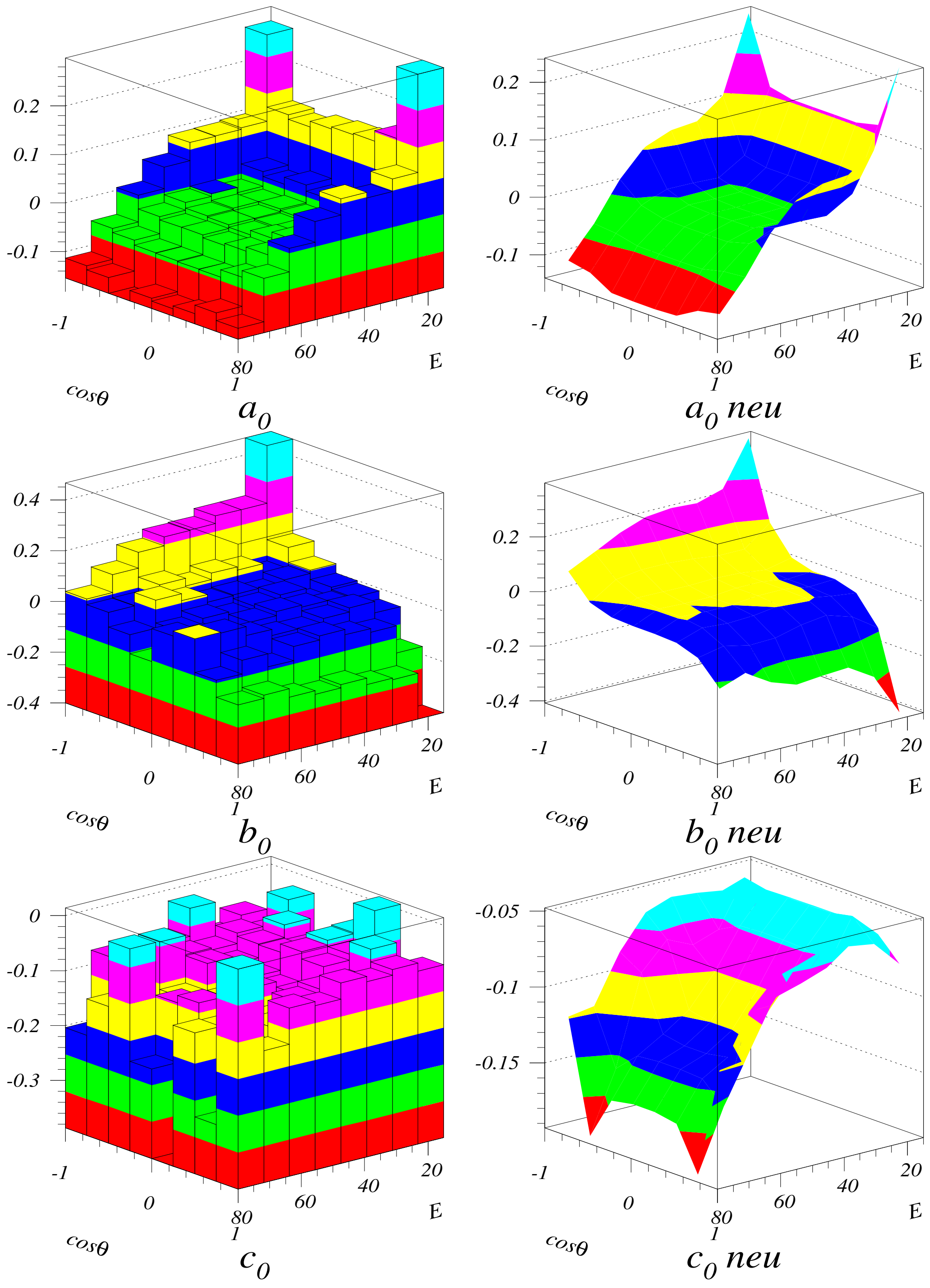


Abbildung 5.6: *Vergleich der in Energie- und Winkelintervallen bestimmten Erwartungswerte $\vec{y}_0$ (rechts) und den geglätteten Verteilungen (links). Dargestellt sind nur die Werte für Jets.*

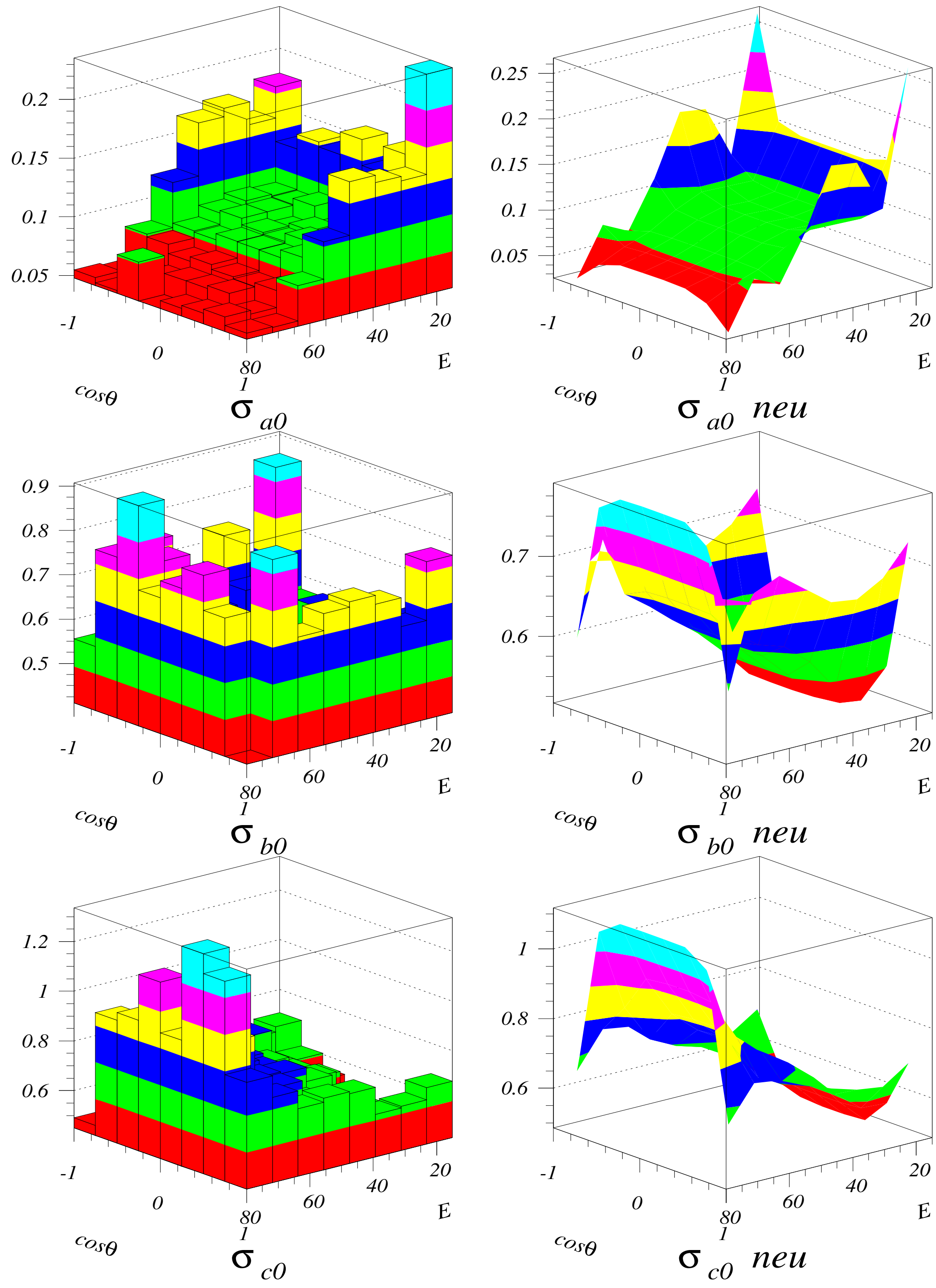


Abbildung 5.7: *Vergleich der in Energie- und Winkelintervallen bestimmten Fehler auf die Erwartungswerte* $\sigma_{\vec{y}_0}$ *(rechts) und den geglätteten Verteilungen (links). Dargestellt sind nur die Werte für Jets.*

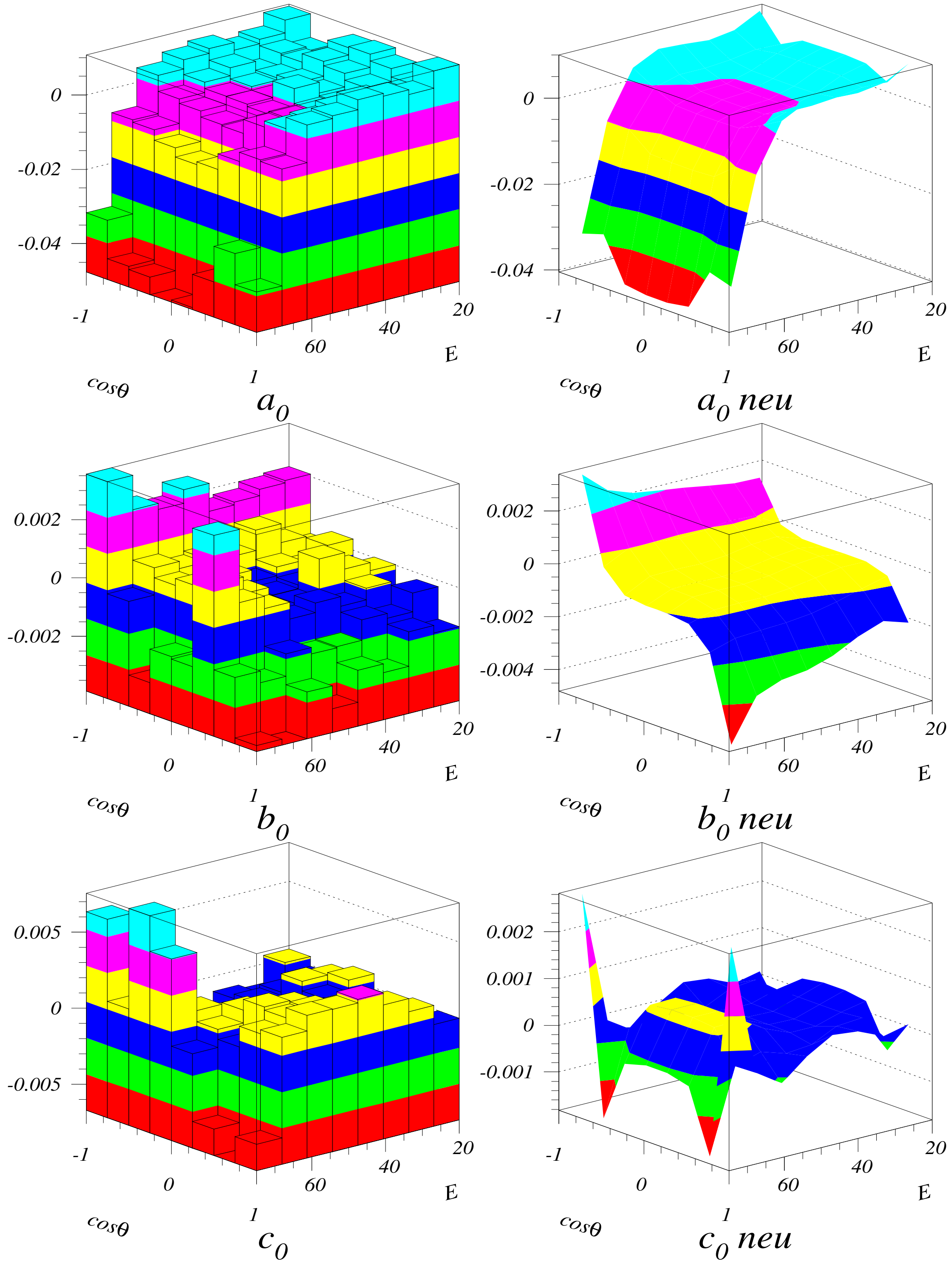


Abbildung 5.8: *Vergleich der in Energie- und Winkelintervallen bestimmten Erwartungswerte $\vec{y}_0$ (rechts) und den geglätteten Verteilungen (links). Dargestellt sind nur die Werte für Leptonen.*

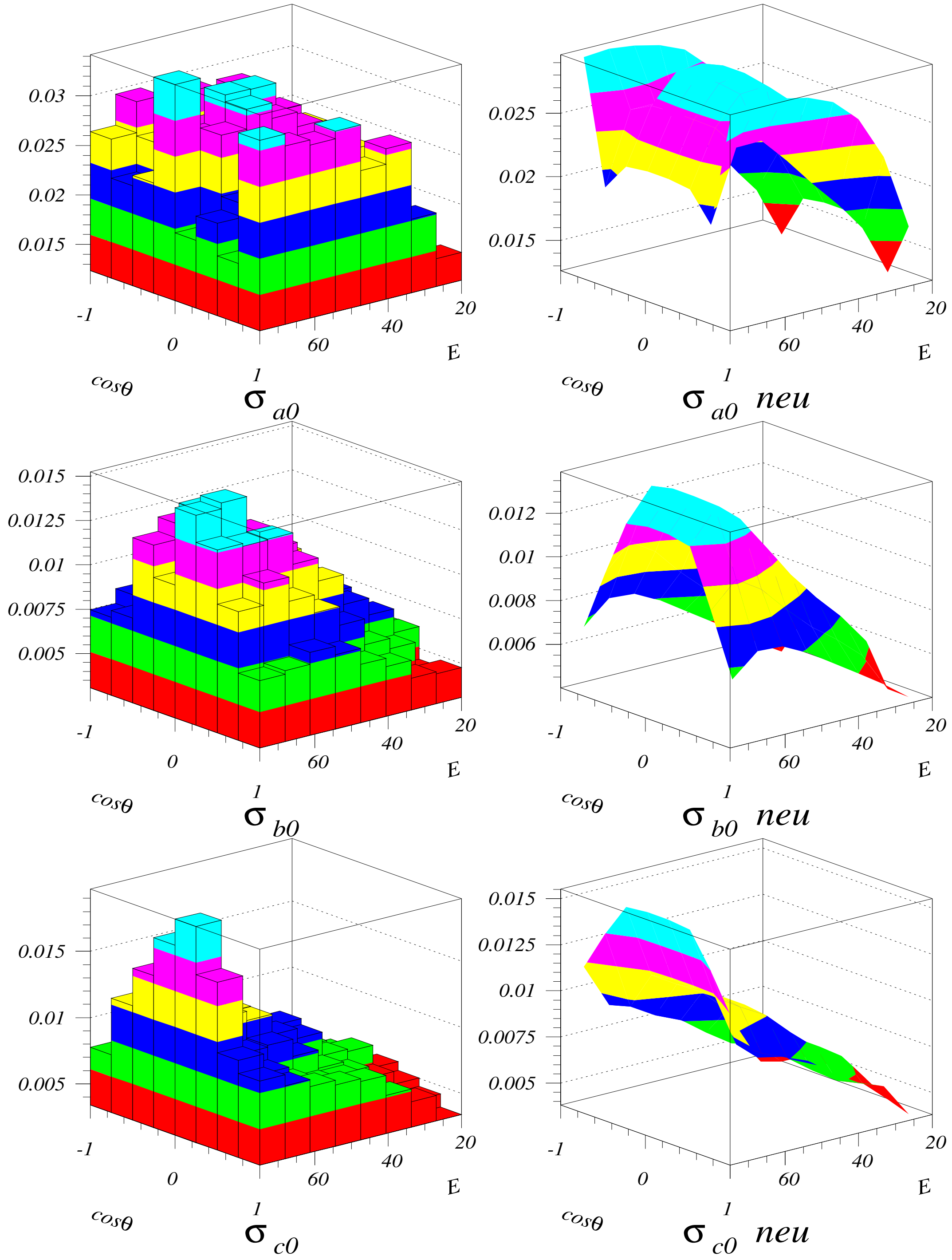


Abbildung 5.9: *Vergleich der in Energie- und Winkelintervallen bestimmten Fehler auf die Erwartungswerte* $\sigma_{\vec{y}_0}$ *(rechts) und den geglätteten Verteilungen (links). Dargestellt sind nur die Werte für Leptonen.*

5.2.3 Zwangsbedingungen

Nachdem nun die $\vec{y}_0$'s mit den Meßwerten und die $\vec{y}$'s mit den zugehörigen Anpassungswerten assoziiert wurden, fehlt für das vollständige Anpassungskonzept nur noch die Definition der Zwangsbedingungen.
Falls die Zwangsbedingungen $\vec{f}(\vec{y})$ nicht linear in den Anpassungswerten sind, muß entsprechend Gleichung 5.18 eine Linearisierung vorgenommen werden. Dazu müssen die Ableitungen $\partial\vec{f}/\partial\vec{y}$ berechnet werden. Normalerweise hängen diese Bedingungen aber von den physikalischen Größen Impuls und Energie ab, so daß es sinnvoll erscheint, die Ableitungen wie folgt zu berechnen:

$$\frac{\partial\vec{f}(\vec{y})}{\partial\vec{y}} = \frac{\partial\vec{f}(\mathbf{P})}{\partial\mathbf{P}}\frac{\partial\mathbf{P}(\vec{y})}{\partial\vec{y}} \quad , \tag{5.46}$$

wobei $\mathbf{P} = (\vec{P}, E)$ den Vierervektor darstellt. Die Ableitungen $\frac{\partial\vec{P}(\vec{y})}{\partial\vec{y}}$ sind entsprechend Gleichung 5.37 gerade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vec{P}(\vec{y})}{\partial a} &= exp(a)|\vec{P}^m|\hat{u}_r \\ \frac{\partial\vec{P}(\vec{y})}{\partial b} &= \hat{u}_\theta \\ \frac{\partial\vec{P}(\vec{y})}{\partial c} &= \hat{u}_\phi \end{aligned} \quad . \tag{5.47}$$

Die Abhängigkeit der Energie von den Anpassungsvariablen hängt, wie bereits besprochen, von ihrer Festlegung in der Anpassung ab. Für Definition 5.41 ergeben sich die Ableitungen zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\vec{y})}{\partial a} &= exp(2a)E^m\frac{|\vec{P}^m|}{|\vec{P}^{Fit}|} \\ \frac{\partial E(\vec{y})}{\partial b} &= b\frac{E^m}{|\vec{P}^m||\vec{P}^{Fit}|} \\ \frac{\partial E(\vec{y})}{\partial c} &= c\frac{E^m}{|\vec{P}^m||\vec{P}^{Fit}|} \end{aligned} \quad . \tag{5.48}$$

Die Problematik reduziert sich somit auf die Berechnung der Ableitungen der Zwangsbedingungen nach den Viererimpulsen.

Nach der Selektion erfüllen die Ereignisse im Allgemeinen nicht den Impuls- und Energieerhaltungssatz. Daher wird für die angepaßten Größen gefordert:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^N \vec{P}_i^{Fit} &= 0 \\ \textstyle\sum_{i=1}^N E_i - \sqrt{s} &= 0 \end{aligned} \quad , \tag{5.49}$$

wobei N gerade die Anzahl der beteiligten Objekte ist. Desweiteren sind auch Anforderungen an die invariante Masse von mehreren Objekten denkbar. Insbesondere kann dies von Interesse sein, wenn mehrere Objekte zu einem oder mehreren Zweikörperzerfällen, wie etwa $W^+W^- \rightarrow ffff$, zusammengefaßt werden sollen. Eine weitere sinnvolle Zwangsbedingung hierfür ist:

$$M(1,2,..k) = M(k+1,k+2,..N) \quad .$$

Im Falle eines Zweikörperzerfalls ist diese Bedingung äquivalent zu:

$$\sum_{i=1}^{k} E_i^{Fit} = \sum_{j=k+1}^{N} E_j^{Fit} = \sqrt{s}/2 \quad , \tag{5.50}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt nur wenn auch die Zwangsbedingungen 5.49 erfüllt sind.

Die Ableitungen der Zwangsbedingungen 5.49 und 5.50 nach dem Viererimpuls **P** sind trivial und mit den Gleichungen 5.47 und 5.48 ist die Linearisierung der Zwangsbedingungen in den Anpassungsvariablen $\vec{y}$ vollständig bestimmt.

5.2.4 Allgemeines Anpassungskonzept

Nachdem nun alle notwendigen Größen definiert sind, wird an dieser Stelle nochmal das allgemeine Konzept zur kinematischen Anpassung von WW-Ereignissen zusammengefaßt. Bis zu diesem Punkt wurden noch keine expliziten Annahmen über das Aussehen der Ereignisse gemacht. Somit ist das Konzept nicht nur für WW-Ereignisse gültig, sondern kann für alle Untersuchungen, bei denen rekonstruierte Objekte Zwangsbedingungen erfüllen müssen, angewendet werden.

Um zu gewährleisten, daß S annähernd einer χ^2-Verteilung folgt, muß der in kartesischen Koordinaten definierte Dreierimpuls entsprechend Gleichung 5.37 in ein sphärisches System überführt werden. Die hierfür notwendigen Korrekturfaktoren $\vec{y}$ geben an, inwieweit der gemessene Impuls sich von dem wahren Impuls unterscheidet. Durch einen Vergleich von voll detektorsimulierten Ereignissen mit den zugrundeliegenden Fermionen, können Erwartungswerte $\vec{y}_0$ für diese Korrekturen aus dem Monte Carlo entnommen werden. Die Breite dieser Verteilungen $\vec{\sigma}_{y_0}$ wird als Fehler auf die $\vec{y}_0$'s verwendet. Aufgrund der energie- und winkelabhängigen Akzeptanz des Detektors, werden diese Erwartungswerte in Intervallen von Energie und Winkel der rekonstruierten Objekte berechnet. Anschließend wird mit Glättungsfunktionen eine kontinuierliche Abhängigkeit der $\vec{y}_0$'s und $\vec{\sigma}_{y_0}$'s von Energie und Winkel erzwungen. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, können Korrekturen $\vec{\Delta y}$ auf diese Erwartungswerte bestimmt werden, so daß die Werte $\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{\Delta y}$ näher als die $\vec{y}_0$'s an den wahren Werten sind. Die aus dem gemessenen Dreierimpuls berechneten Einheitsvektoren $\hat{u}_r$, $\hat{u}_\theta$, und $\hat{u}_\phi$ sowie die Anpassungswerte $\vec{y}$ werden zur Konstruktion eines korrigierten Dreierimpulses $\vec{P}^{Fit}$ verwendet. In Abbildung 5.10 ist dieses Anpassungsverfahren schematisch dargestellt.

Durch Fehlerfortpflanzung können aus der Kovarianzmatrix der Anpassungsvariablen $\mathcal{V}(\vec{y})$ die Fehler auf die korrigierten physikalischen Werte wie Energie, Impuls und invariante Masse ermittelt werden:

$$\mathcal{V}(\vec{x}) \approx \mathcal{J}\mathcal{V}(\vec{y})\mathcal{J}^T \quad , \tag{5.51}$$

mit

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial x_m}{\partial y_1} & \frac{\partial x_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad ,$$

wobei $\vec{x}$ die physikalisch relevanten Größen repräsentiert. Wie bereits in Abschnitt 5.1.1 diskutiert, ist Gleichung 5.51 nur dann exakt erfüllt, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ besteht. Im Falle nichtlinearer Transformationen ist nur eine Näherungsrechnung für

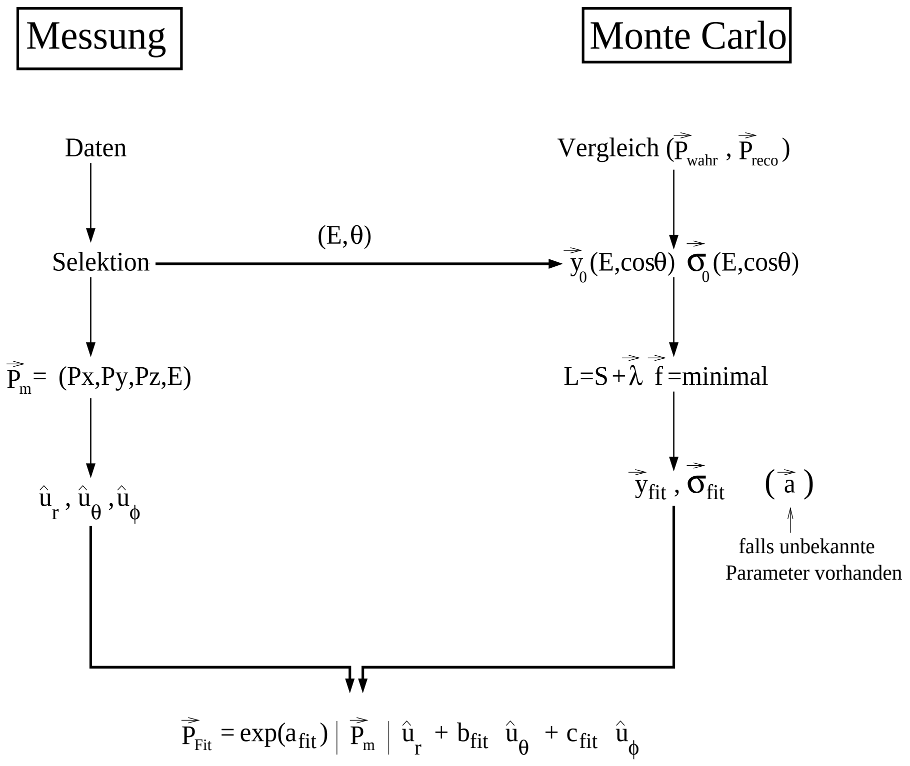


Abbildung 5.10: *Schematische Darstellung des allgemeinen Anpassungsverfahrens.*

die Kovarianzmatrix $\mathcal{V}(\vec{x})$ möglich. Das Standardverfahren verwendet die dargestellte Ableitungsmatrix $\mathcal{J}$, welche auch häufig als Jacobi-Matrix bezeichnet wird. Die Ableitungen der Energie und des Dreierimpulses nach den $\vec{y}$'s wurden bereits für die Linearisierung der Zwangsbedingungen benötigt und sind in den Gleichungen 5.47 und 5.48 angegeben. Für die invariante Masse reduziert sich das Problem daher auf die Berechnung der Ableitung der Masse nach den Impulsen und der Energie. Mit $M = \sqrt{E^2 - P^2}$ ergeben sich die Ableitungen zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial P_i} &= \frac{-P_i}{M} \\ \frac{\partial M}{\partial E} &= \frac{E}{M} \end{aligned} \quad . \tag{5.52}$$

Damit ist das allgemeine Anpassungskonzept für rekonstruierte Objekte mit physikalischen Zwangsbedingungen vollständig.

5.2.5 Der Fall $W^+W^- \to q\bar{q}Q\bar{Q}$

Wie schon in Abschnitt 4.2.1 besprochen, ist aufgrund der zugrundeliegenden Vier-Quark-Struktur die Rekonstruktionshypothese des hadronischen Kanals durch vier Jets im Endzustand gegeben. Es wird daher angenommen, daß, abgesehen von Akzeptanzverlusten im Detektor, solche Ereignisse vollständig vermessen sind. Somit reduziert sich das Modell der kleinsten Quadrate mit Nebenbedingungen in Abschnitt 5.1.3 auf die Lösung des Gleichungssytems 5.23, wobei die unbekannten Parameter $\vec{a}$ und ihre assoziierten Ableitungen $\mathcal{A}$ nun gerade verschwinden. Wie sich aus Gleichung 5.27 bzw. 5.33 ablesen läßt, besteht in diesem

Modell kein prinzipieller Unterschied zwischen gemessenen Größen $\vec{y}_0$ und unbekannten Parametern $\vec{a}$. Die Lösung ergibt sich somit durch Streichung aller Terme, die $\mathcal{A}$ oder $\vec{a}$ enthalten. Gleichung 5.33 wird damit zu:

$$\begin{pmatrix} \vec{y}^{\,(l)} - \vec{y}_0 \\ \vec{\lambda}^{\,(l)} \end{pmatrix} = (\vec{c}^{\,(l-1)} - \mathcal{B}^{(l-1)}\vec{y}_0) \begin{pmatrix} (\mathcal{C}_{21}^T)^{(l-1)} \\ (\mathcal{C}_{22})^{(l-1)} \end{pmatrix} \quad , \tag{5.53}$$

mit

$$\vec{c}^{\,(l-1)} = \mathcal{B}^{(l-1)}\vec{y}^{\,(l-1)} - \vec{f}^{\,(l-1)} \quad ,$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{21} &= \mathcal{V}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}\mathcal{V} \\ \mathcal{C}_{22} &= -\mathcal{V}_{\mathcal{B}} \end{aligned} \quad .$$

Wie bereits dargelegt sind die $\vec{y}_0$'s, die energie- und richtungsabhängigen Erwartungswerte aus dem Monte Carlo, wobei die zugehörige Kovarianzmatrix $\mathcal{V}$ durch Gleichung 5.45 gegeben ist. Nach der erfolgreichen Konvergenz des Iterationsverfahrens werden die Anpassungswerte $\vec{y}$ zur Berechnung von korrigierten Impulsen der vier Jets verwendet, welche nun die auferlegten Zwangsbedingungen erfüllen. Falls nur die Anforderung von Energie- und Impulserhaltung an die hadronischen Ereignisse gestellt wird, ergibt sich der Freiheitsgrad der Anpassung entsprechend Gleichung 5.36 zu:

$$ndf = m - p = 4 - 0 \quad .$$

Gewöhnlich wird solch eine Anpassung als ein sogenannter *4C-Fit* bezeichnet. Wird zusätzlich die Forderung von zwei gleichen invarianten Massen pro Ereignis gestellt, so erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade um eins und die Bezeichnung hierfür ist *5C-Fit*.

5.2.6 Der Fall $W^+W^- \to q\bar{q}l\nu$

In Gegensatz zum hadronischen Kanal, wo alle relevanten Größen für die Anpassung gemessen werden können, ist der semileptonische Kanal ein nur unvollständig gemessenes System. Aufgrund des nicht detektierbaren Neutrinos gibt es drei Größen, die einer Messung nicht zugänglich sind. Diese Größen können mit den unbekannten Parametern $\vec{a}$ im Modell der kleinsten Quadrate in Verbindung gebracht werden. Im Falle des semileptonischen Kanals muß somit auf die vollständige Anwendung der in Abschnitt 5.1.3 entwickelten Anpassungsmethode zurückgegriffen werden. Die Lösung für den hadronischen Kanal (siehe Gleichung 5.53) würde zwangsläufig zu falschen Ergebnissen führen. Die einzelnen Größen für die Anpassung von semileptonischen Ereignissen sind:

$$\begin{aligned} \vec{y}^T &= \big((a,b,c)_{Jet1}, \quad (a,b,c)_{Jet2}, \quad (a,b,c)_{Lepton}\big) \\ \vec{a}^T &= (a,b,c)_{Neutrino} \end{aligned} \quad , \tag{5.54}$$

und

$$\vec{y}_0^T = \big((a_0,b_0,c_0)_{Jet1}, \quad (a_0,b_0,c_0)_{Jet2}, \quad (a_0,b_0,c_0)_{Lepton}\big) \quad , \tag{5.55}$$

wobei keine Erwartungswerte $\vec{a}_0$ für die Anpassung notwendig sind. Für Energie- und Impulserhaltung ergibt sich daher ein sogenannter *1C-Fit* und für eine zusätzliche Massenbedingung ein *2C-Fit*.

5.2.7 Test des Anpassungsverfahrens

Nachdem die vollständigen Konzepte zur Anpassung von semileptonischen und hadronischen Ereignissen aufgestellt sind, muß nun ihre Güte und Verläßlichkeit geprüft werden. Wie bereits besprochen, stellt das Anpassungsverfahren für den hadronischen Kanal nur einen Spezialfall der Methode der kleinsten Quadrate mit Nebenbedingungen dar. Um die komplette Methode zu testen, muß daher auf semileptonische Ereignisse zurückgegriffen werden.

Bei voll detektorsimulierten Ereignissen ist auch die Abstrahlung von Photonen im Anfangszustand (ISR) vorgesehen. Dies führt zu einer effektiven Reduzierung der Schwerpunktenergie und die Zwangsbedingungen von Energie- und Impulserhaltung in Gleichung 5.49 sind nicht länger exakt gültig. Für den prinzipiellen Test des Anpassungskonzeptes, ohne Verfälschung durch den Einfluß von ISR, werden die Zwangsbedingungen wie folgt modifiziert:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{N}(\vec{P}_i^{\,Fit} + \vec{P}_\gamma) & = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} E_i - \sqrt{s} - |\vec{P}_\gamma| & = 0 \end{array} \quad , \tag{5.56}$$

wobei $\vec{P}_\gamma$ der, im Monte Carlo bekannte, Impuls des ISR-Photons ist.

Im folgenden werden zwei fundamentale Tests des Anpassungsverfahren vorgenommen, die Güte und Verläßlichkeit prüfen sollen.

Konvergenz und Erfüllung der Nebenbedingungen

Wie in Abschnitt 5.1.3 gezeigt, muß für das iterative Verfahren ein geeignetes Abbruchkriterium definiert werden. Entsprechend Gleichung 5.15 ist es sinnvoll, die Änderung von S pro Iterationsschritt zu betrachten:

$$S(\vec{y}^{\,(l-1)}, \vec{a}^{\,(l-1)}) - S(\vec{y}^{\,(l)}, \vec{a}^{\,(l)}) < \epsilon \quad . \tag{5.57}$$

In dieses Kriterium geht die Erfüllung der Zwangsbedingungen nicht ein. Die Bestimmung des Wertes ϵ kann somit durch Optimierung der Konvergenzwahrscheinlichkeit und der gleichzeitigen Erfüllung der Zwangsbedingungen durchgeführt werden. Es hat sich herausgestellt, daß für $\epsilon = 10^{-8}$ die besten Ergebnisse erzielt werden. Bereits nach etwa 10 Iterationsschritten sind für 50% aller Ereignisse sowohl die Zwangsbedingungen mit einer Genauigkeit von $\mathcal{O}(10^{-10})$ als auch das Abbruchkriterium erfüllt. Die schnelle Konvergenz des Iterationsverfahrens läßt darauf schließen, daß die Abweichungen der Zwangsbedingungen von der Linearität klein sind. Für den *1C-Fit* ergibt sich eine Konvergenzwahrscheinlichkeit von mehr als 99% und für den *2C-Fit* von mehr als 96%.

Vergleich von S mit einer χ^2-Verteilung

Im Falle von Zwangsbedingungen, die linear in den gauß-verteilten Anpassungsvariablen sind, folgt S einer χ^2-Verteilung. Allerdings sind für WW-Ereignisse die Zwangsbedingung nicht linear und auch die Anpassungsgrößen sind nur annähernd normalverteilt. Aus diesem Grund wird S nicht exakt einer χ^2-Verteilung entsprechen. Allgemein kann die Gültigkeit einer χ^2-Hypothese durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung überprüft werden:

$$P(S, ndf) = \int_S^\infty \left(2^{\frac{ndf}{2}}\Gamma(ndf/2)\right)^{-1} S^{\frac{ndf}{2}-1} exp(-ndf/2) dS \quad , \tag{5.58}$$

wobei Γ die Gammafunktion darstellt. Falls S einer χ^2-Verteilung entspricht, sollte $P(S, ndf)$ zwischen 0 und 1 gleichverteilt sein. Eine Überhöhung nahe bei 1 deutet auf eine generelle Überschätzung, eine nahe bei 0 auf eine generelle Unterschätzung der Eingangsfehler hin. Wahrscheinlichkeiten nahe bei 0 können aber auch durch Ereignisse hervorgerufen werden, die generell der zugrundeliegenden Anpassungshypothese nicht genügen. In Abbildung 5.11 sind die Verteilungen von $P(S, ndf)$ für den *1C-Fit* und *2C-Fit* dargestellt. Ab

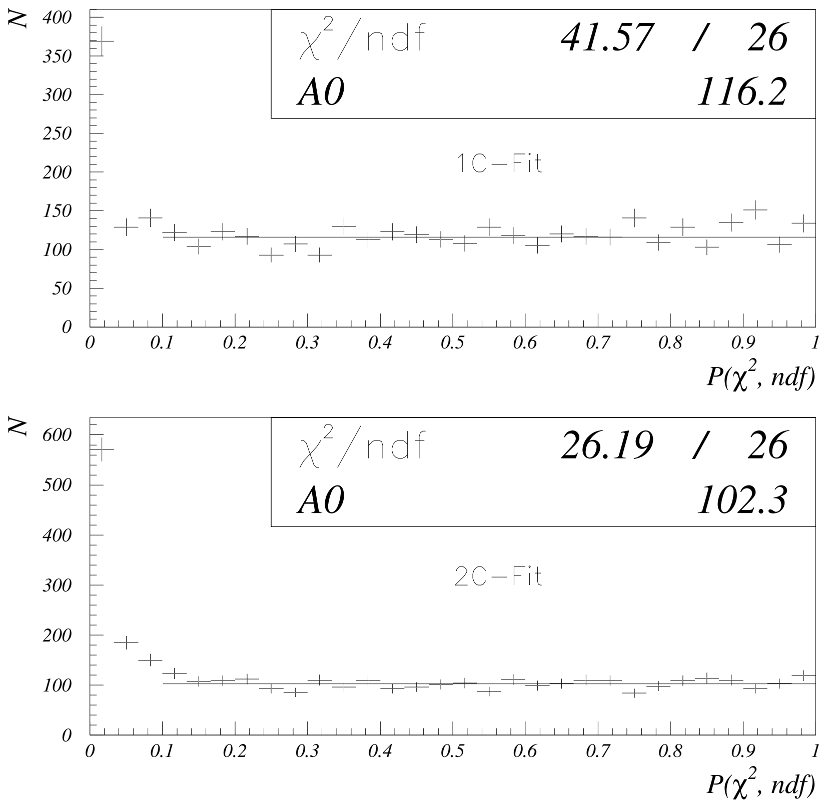


Abbildung 5.11: *Verteilung der χ^2-Wahrscheinlichkeit für den 1C-Fit und 2C-Fit. Die Anpassung einer konstanten Funktion zeigt, daß die Verteilungen ab etwa $P(S, ndf) > 0.1$ gleichverteilt sind.*

etwa $P(S, ndf) = 0.1$ ist für beide Anpassungen die Verteilung der χ^2-Wahrscheinlichkeit flach und somit ist in diesem Bereich S mit einer χ^2-Verteilung verträglich. Für Ereignisse mit $P(S, ndf) < 0.1$ kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß entweder die Fehler unterschätzt werden oder die zugrundeliegende Annahme für die Anpassung nicht zutrifft. Da es sich hier nur um semileptonische Ereignisse mit bekannter ISR-Abstrahlung handelt, ist die erste Erklärung zu favorisieren. Wie in Abbildung 5.2 zu sehen ist, weichen insbesondere für die Jets die Verteilungen der $\vec{y}_0$'s signifikant von einer Gauß-Verteilung ab. Prinzipiell können die Jets in zwei Klassen unterteilt werden, wobei die erste Klasse nur Ereignisse mit geringem Anteil an falsch zugeordneten Teilchen zu den Jets und die zweite Klasse Ereignisse mit einem hohen Anteil an Falschzuordungen enthält. Diese Unterteilung legt es nahe, anstelle von nur einer, zwei Gauß-Funktionen an die Verteilung der $\vec{y}_0$'s anzupassen. In Abbildung 5.12 ist ein

Vergleich dieser beiden Anpassungen zu sehen. Deutlich ist die Verbesserung für die Anpassung von zwei Gauß-Funktionen zu erkennen, was für die Hypothese der Unterteilung in zwei Klassen spricht. Die Breite der Verteilung für die Anpassung von nur einer Gauß-Funktion liegt zwischen den beiden Breiten aus der Anpassung von zwei Funktionen. Für die Jets sind die Fehler somit nur eine Mittelung der Fehler von zwei unterschiedlichen Klassen. Um die Anhäufung von Ereignissen bei sehr kleinen χ^2-Wahrscheinlichkeiten zu verringern, müßten die Datenereignisse in die zwei Klassen unterteilt werden. Auf einer Basis von Einzelereignissen ist diese Klassifikation allerdings nicht möglich, da a priori nicht bekannt ist wieviele Teilchen falsch zu den Jets zugeordnet worden sind.

Ein weiterer Test des Anpassungsverfahrens ist die Untersuchung der Pullverteilungen der angepaßten Variablen, wobei mit Pull folgende Größe bezeichnet wird:

$$Pull(x) = \frac{x_{wahr} - x_{Fit}}{\sigma_{x_{Fit}}} \quad .$$

In den Abbildungen 5.13 - 5.16 sind die Pullverteilungen für die Anpassungsgrößen $\vec{y}$, nach *1C-Fit* und *2C-Fit* getrennt, dargestellt. Weil nur ein Freiheitsgrad für die Anpassung zur Verfügung steht, ergibt sich für den *1C-Fit* auch nur eine unabhängige Pullverteilung für die einzelnen Anpassungsvariablen. Im Falle von zwei Freiheitsgraden folgen die Anpassungsgrößen bestimmten Relationen untereinander. Diese können allerdings aufgrund der zusätzlichen Freiheit nicht ohne weiteres den statistischen Verteilungen angesehen werden. Wie auch schon die unterschiedlichen Verteilungen der χ^2-Wahrscheinlichkeiten für *1C-Fit*'s und *2C-Fit*'s vermuten lassen, sind die Pullverteilungen einer Anpassung, die nur Energie- und Impulserhaltung fordert, näher an der χ^2-Hypothese als dies für den *2C-Fit*, mit zusätzlicher Massenbedingung der Fall ist.

Mit Gleichung 5.51 kann die Kovarianzmatrix der Anpassungsgrößen in die Kovarianzmatrix von physikalisch relevanten Variablen überführt werden. In Abbildung 5.17 sind die Pullverteilungen der angepaßten Massen des W-Bosons dargestellt. Für die Forderung von Energie- und Impulserhaltung an die Ereignisse, lassen sich sowohl dem hadronischen Zerfall des einen W's als auch dem leptonischen Zerfall des anderen W's jeweils eine Masse (M_H bzw. M_L) zuordnen. Aufgrund der zusätzlichen Massenbedingung des *2C-Fit*'s werden die Massen M_H und M_L auf gleiche Werte gezwungen und somit ist nur eine Masse M_{2C} pro Ereignis vorhanden. Wie zu erwarten, pflanzen sich die Eigenschaften der Anpassungsvariablen auf die physikalischen Größen fort und insbesondere die Pullverteilungen der Massen des *1C-Fit*'s zeigen, daß die Fehler auf M_H bzw. M_L annähernd gaußisch sind.

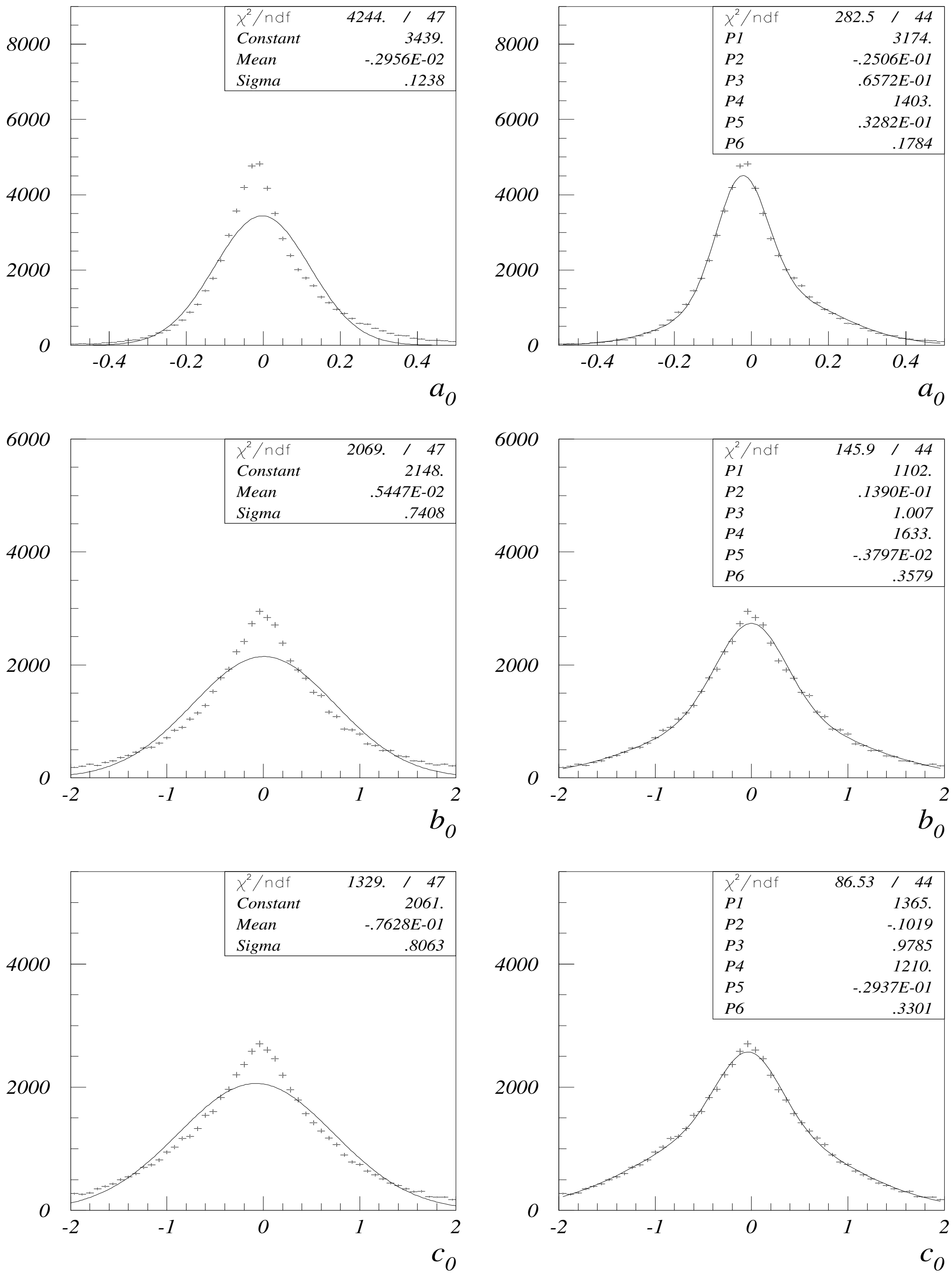


Abbildung 5.12: *Vergleich der Anpassung von einer (rechts) mit der Anpassung von zwei Gauß-Funktionen (links) an die Verteilung der $\vec{y}_0$'s für Jets. Die Parameter der Anpassung bezeichnen Höhe, Mittelwert und Breite der ersten (P1,P2,P3) bzw. der zweiten (P4,P5,P6) Gauß-Funktion.*

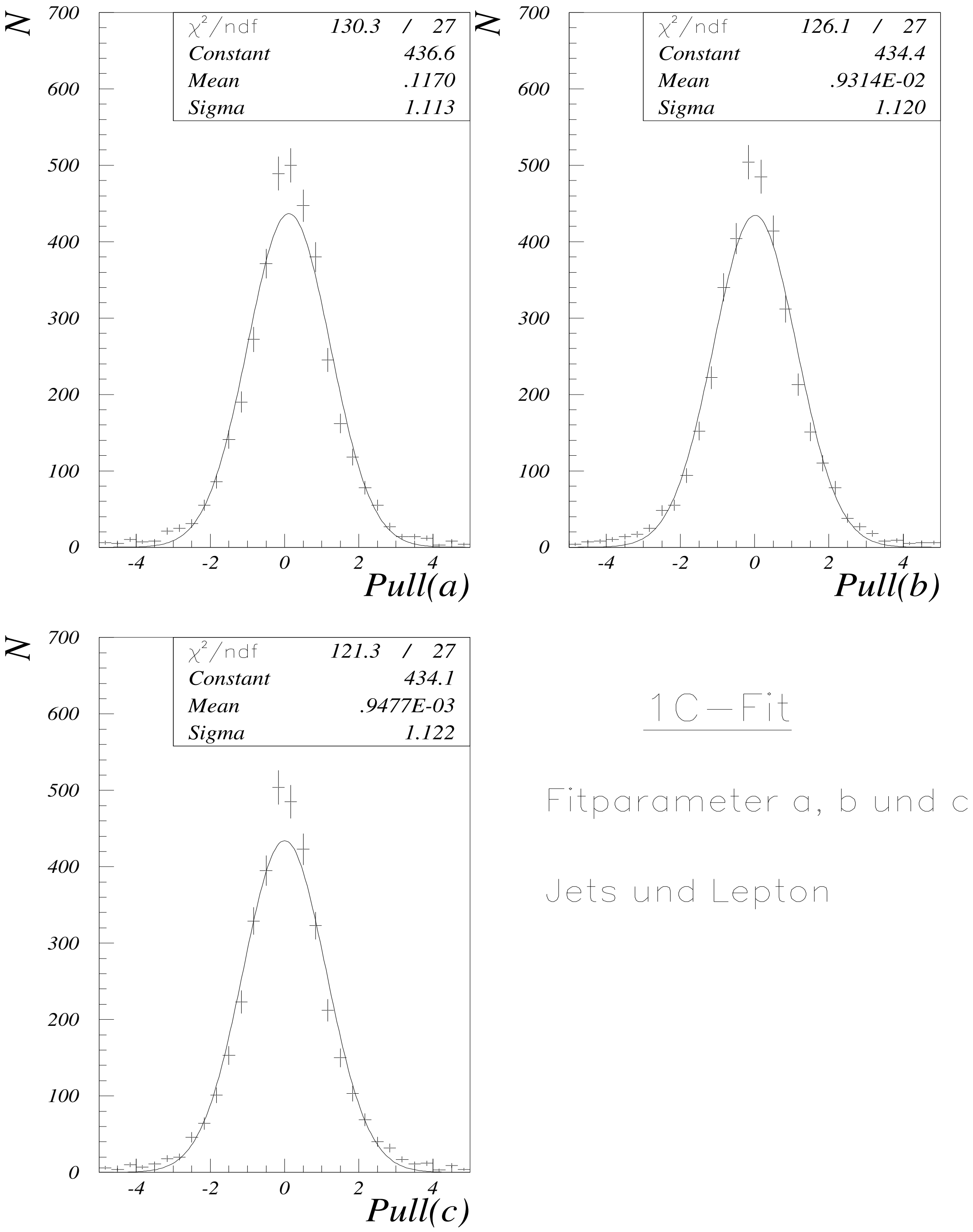


Abbildung 5.13: *Pullverteilungen der Anpassungsgrößen $\vec{y}$ für einen 1C-Fit.*

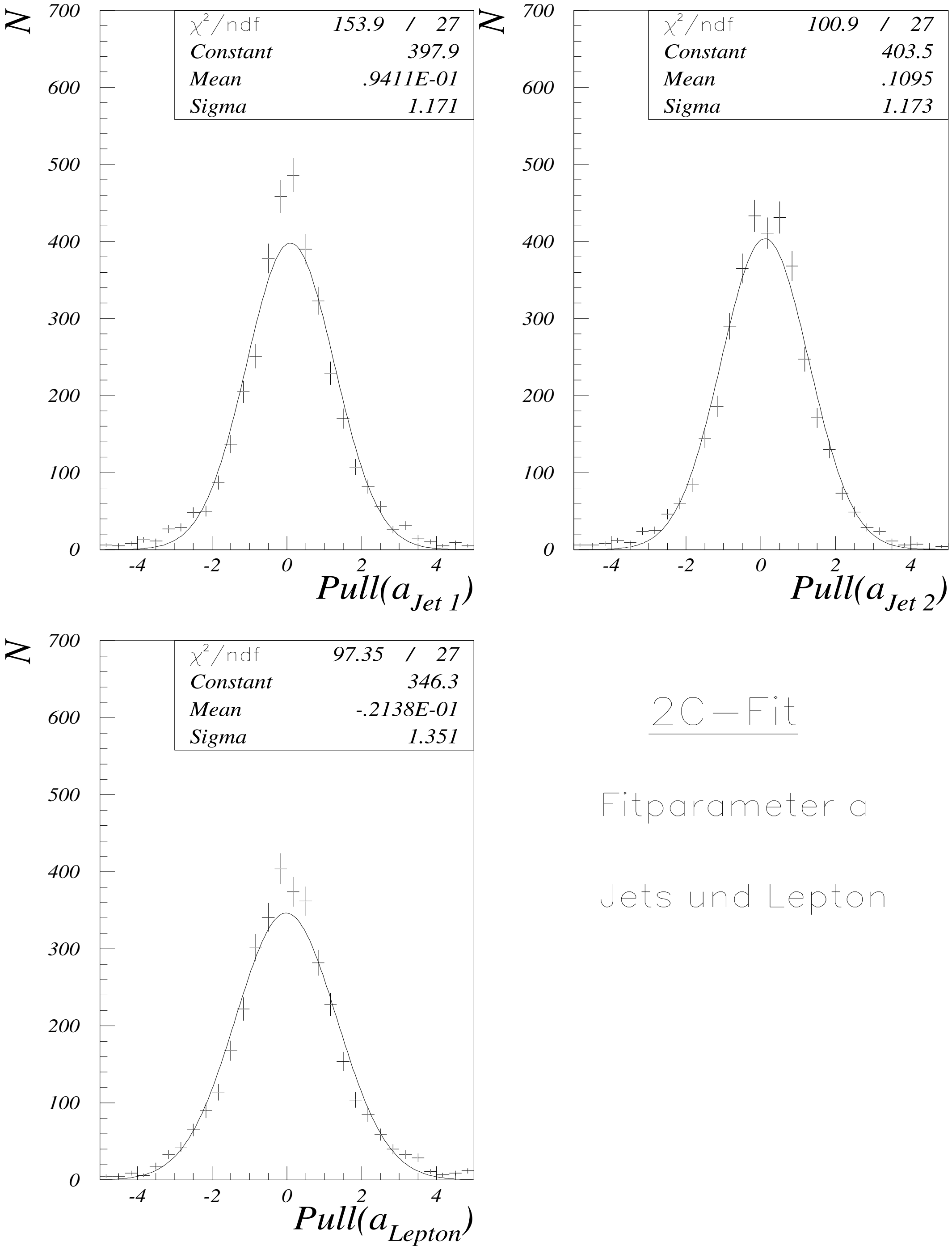


Abbildung 5.14: *Pullverteilungen der Anpassungsgröße a eines 2C-Fit's. Getrennt nach Jets und Leptonen dargestellt.*

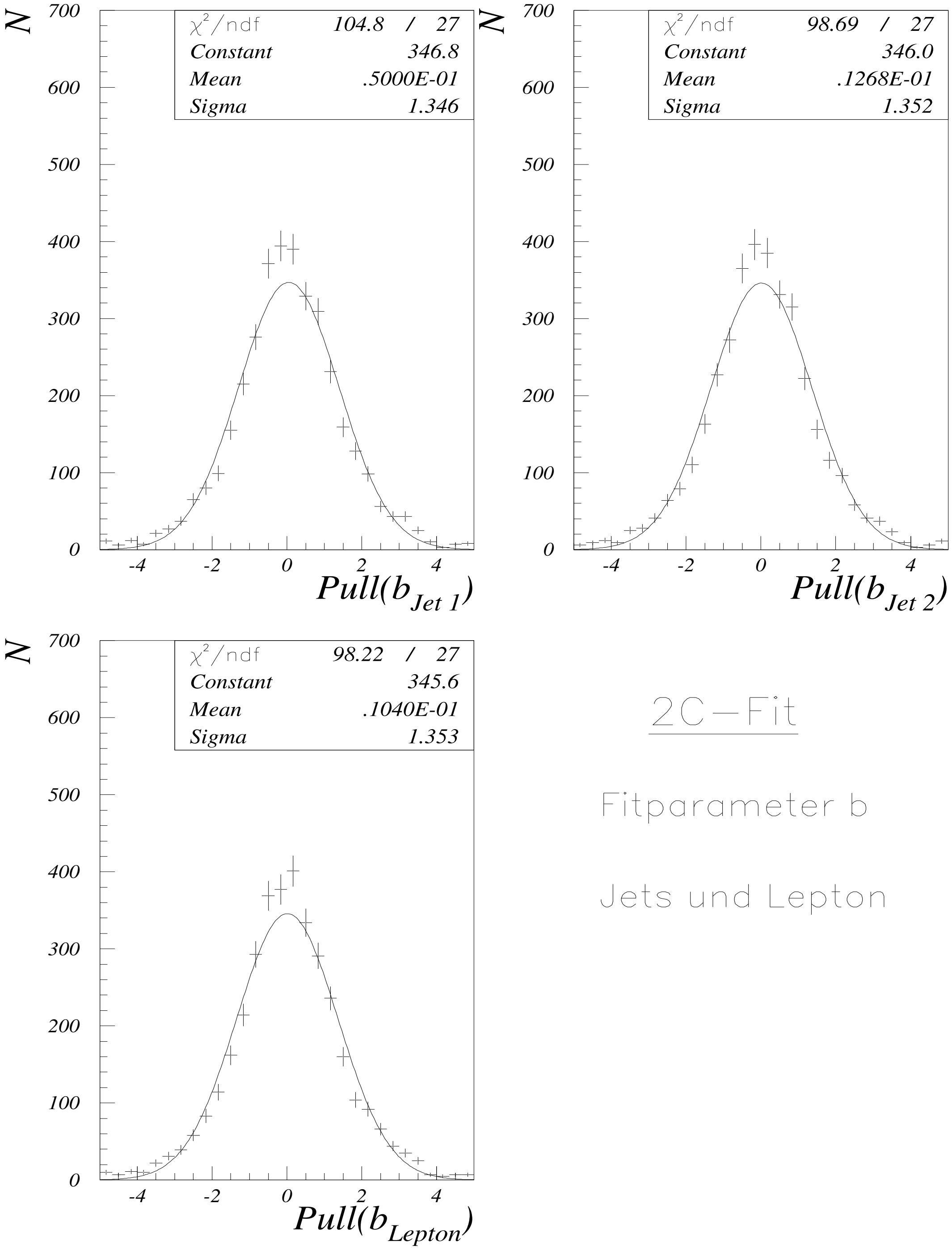


Abbildung 5.15: *Pullverteilungen der Anpassungsgröße b eines 2C-Fit's. Getrennt nach Jets und Leptonen dargestellt.*

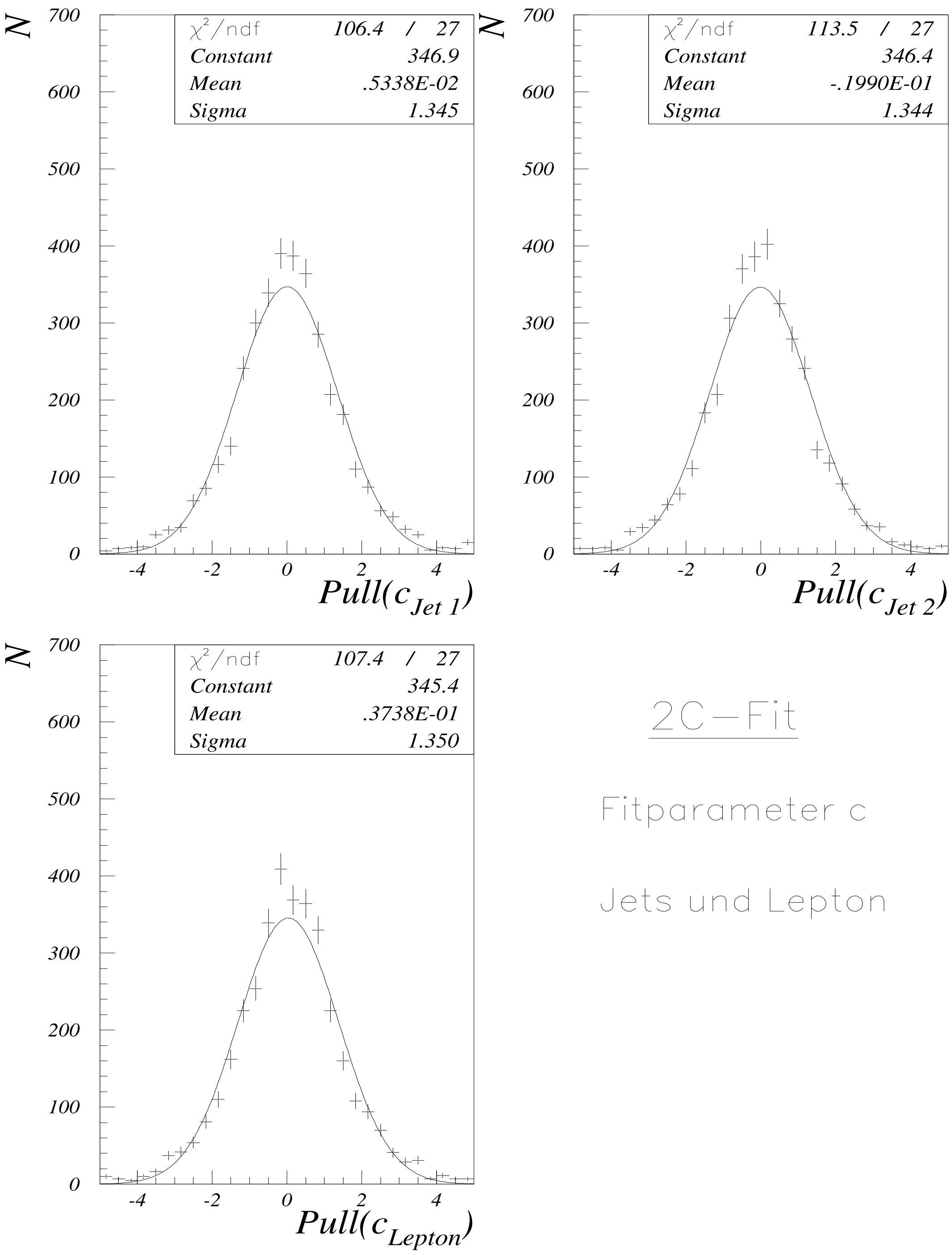


Abbildung 5.16: *Pullverteilungen der Anpassungsgröße c eines 2C-Fit's. Getrennt nach Jets und Leptonen dargestellt.*

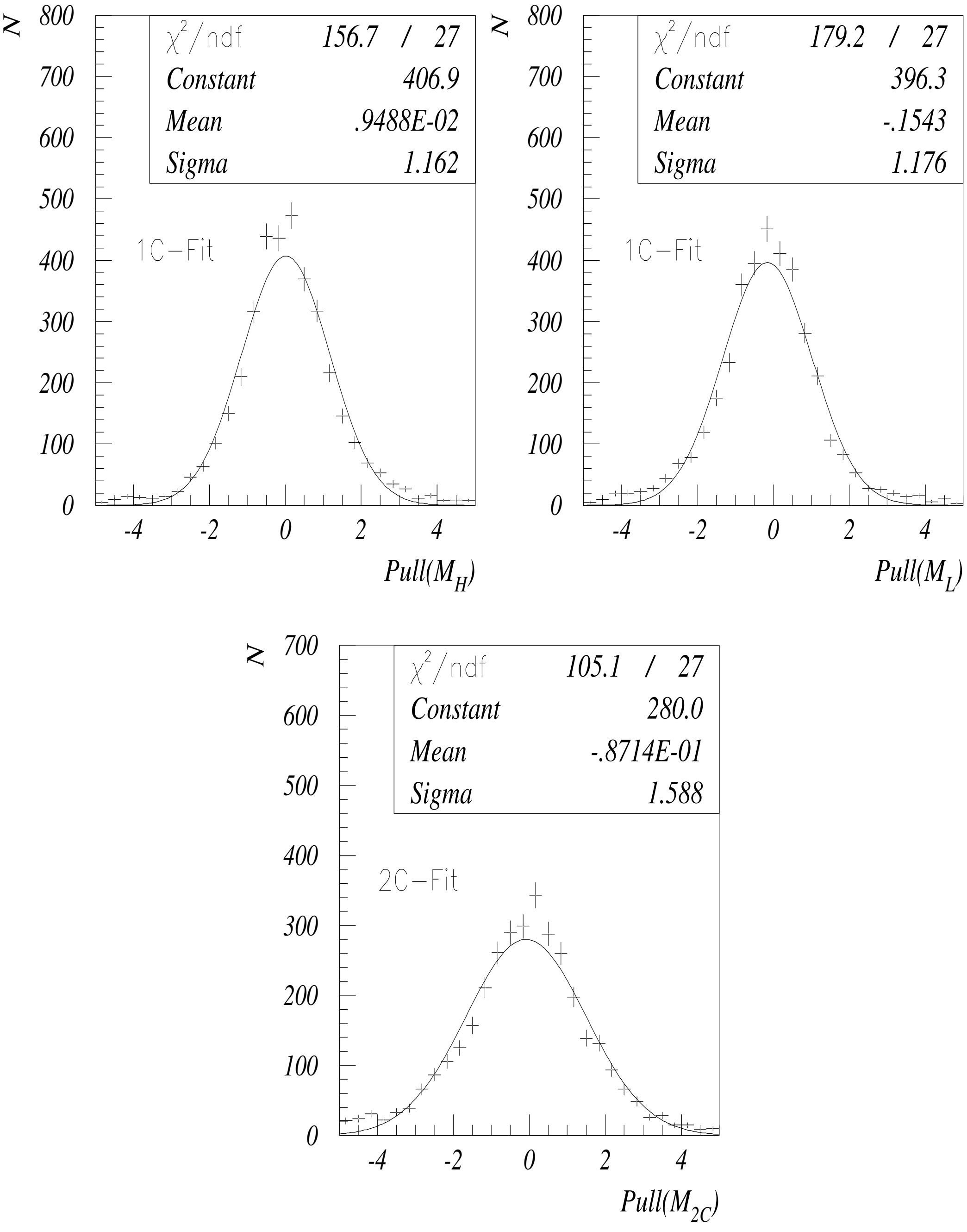


Abbildung 5.17: *Pullverteilungen der Massen von M_H und M_L eines 1C-Fit's sowie der eines 2C-Fit's.*

5.2.8 Einfluß von ISR auf das Anpassungskonzept

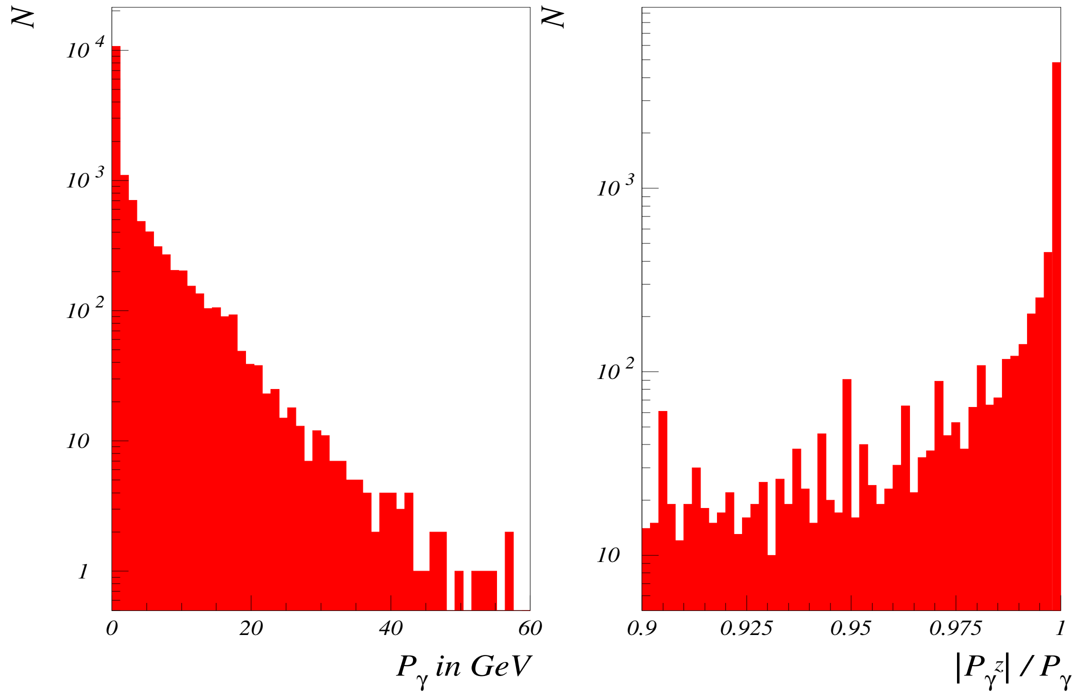


Abbildung 5.18: *Darstellung der Energieverteilung von ISR-Photonen (links) und der Verteilung des Impulsbruchteils der auf die z-Komponente des Photonimpulses entfällt.*

In den vorangegangenen Tests mit voll detektorsimulierten Ereignissen wurde in den Zwangsbedingungen der Einfluß des ISR-Photons berücksichtigt (siehe Gleichung 5.56). Wie in Abbildung 5.18 dargestellt, wird der bei weitem größte Impulsbruchteil dieser Photonen von der z-Komponente des Impulses getragen. Die meisten ISR-Photonen werden somit entlang der $|z|$-Richtung emittiert und können daher nicht im Detektor nachgewiesen werden. Aus diesem Grund ist für die einzelnen Ereignisse die Schwerpunktenergie des Prozesses nicht genau bekannt. Aus Abbildung 5.18 ist ebenfalls abzulesen, daß bei den meisten Ereignissen die Reduktion der effektiven Schwerpunktenergie kleiner als 1 GeV ist, was ungefähr der Energieauflösung der gemessenen Leptonen entspricht. Da die Leptonen die am genauesten bekannte Eingangsgröße für die Anpassung darstellen, wird nicht erwartet, daß der Einfluß von ISR-Photonen mit Energien kleiner als 1 GeV einen sichtbaren Einfluß auf die Ergebnisse haben wird. Für größere Energien hingegen stimmen die Annahmen für die Zwangsbedingungen in Gleichung 5.49 nicht mehr und die Anpassung solcher Ereignisse sollte bei kleinen χ^2-Wahrscheinlichkeiten eine stärkere Anhäufung haben als Ereignisse mit $P_\gamma < 1$ GeV. In Abbildung 5.19 ist ein Vergleich der χ^2-Wahrscheinlichkeiten für $P_\gamma < 1$ GeV und $P_\gamma > 1$ GeV dargestellt. Wird das Verhältnis der beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen gebildet, so ist deutlich zu erkennen, daß Ereignisse mit $P_\gamma > 1$ GeV eindeutig zu kleineren χ^2-Wahrscheinlichkeiten neigen.

Diese systematische Überschätzung der Schwerpunktenergie in der Anpassung pflanzt sich auf die physikalischen Größen, wie etwa die Massen der W-Bosonen fort. In Abbildung 5.20 sind die Pullverteilungen der Massen M_H und M_L aus dem *1C-Fit* mit und ohne Schnitt in der Energie des ISR-Photons dargestellt. Deutlich ist sowohl die systematische Verschiebung der Verteilung als auch die Verschlechterung der Gauß-Anpassung aufgrund des Einflusses von ISR zu erkennen. Die systematischen Auswirkungen auf die rekonstruierten Massen der W-Bosonen wird im nächsten Kapitel noch näher behandelt werden.

Abschließend bleibt festzuhalten, daß im Falle eines *1C-Fit*'s S, aufgrund der unzureichenden Beschreibung der Kovarianzmatrix der Jets sowie des Einflusses von ISR, nur annähernd einer χ^2-Verteilung folgt. Für den *2C-Fit* kommt noch die zusätzliche Massenbedingung, in der M_H und M_L zu gleichen Werten pro Ereignis gezwungen werden, als limitierender Faktor für die Anpassung hinzu. Aufgrund der endlichen Breite der W-Bosonen ist die Bedingung nur näherungsweise gültig und die Wahrscheinlichkeit, daß Ereignisse die zugrundeliegende Anpassungshypothese nicht erfüllen, wächst somit. Diese erklärt die, im Vergleich zum *1C-Fit*, stärkere Anhäufung von Ereignissen bei sehr kleinen Werten der χ^2-Wahrscheinlichkeit.

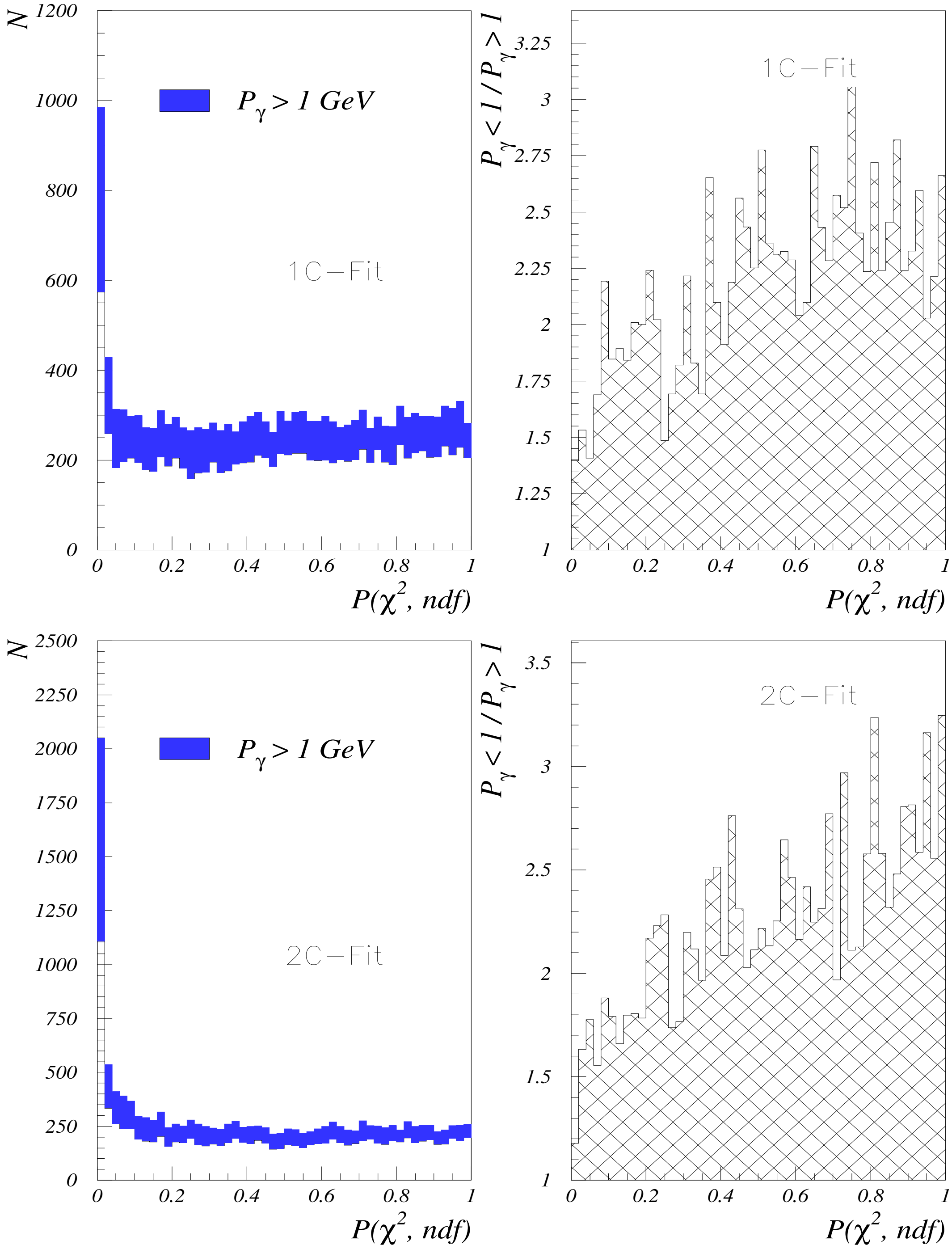


Abbildung 5.19: *Darstellung der Verteilung der χ^2-Wahrscheinlichkeiten für den 1C-Fit und 2C-Fit (links). Das Verhältnis der Anzahl von Ereignissen mit $P_\gamma < 1$ GeV und $P_\gamma > 1$ GeV als Funktion von $P(\chi^2, ndf)$ ist auf der rechten Seite dargestellt.*

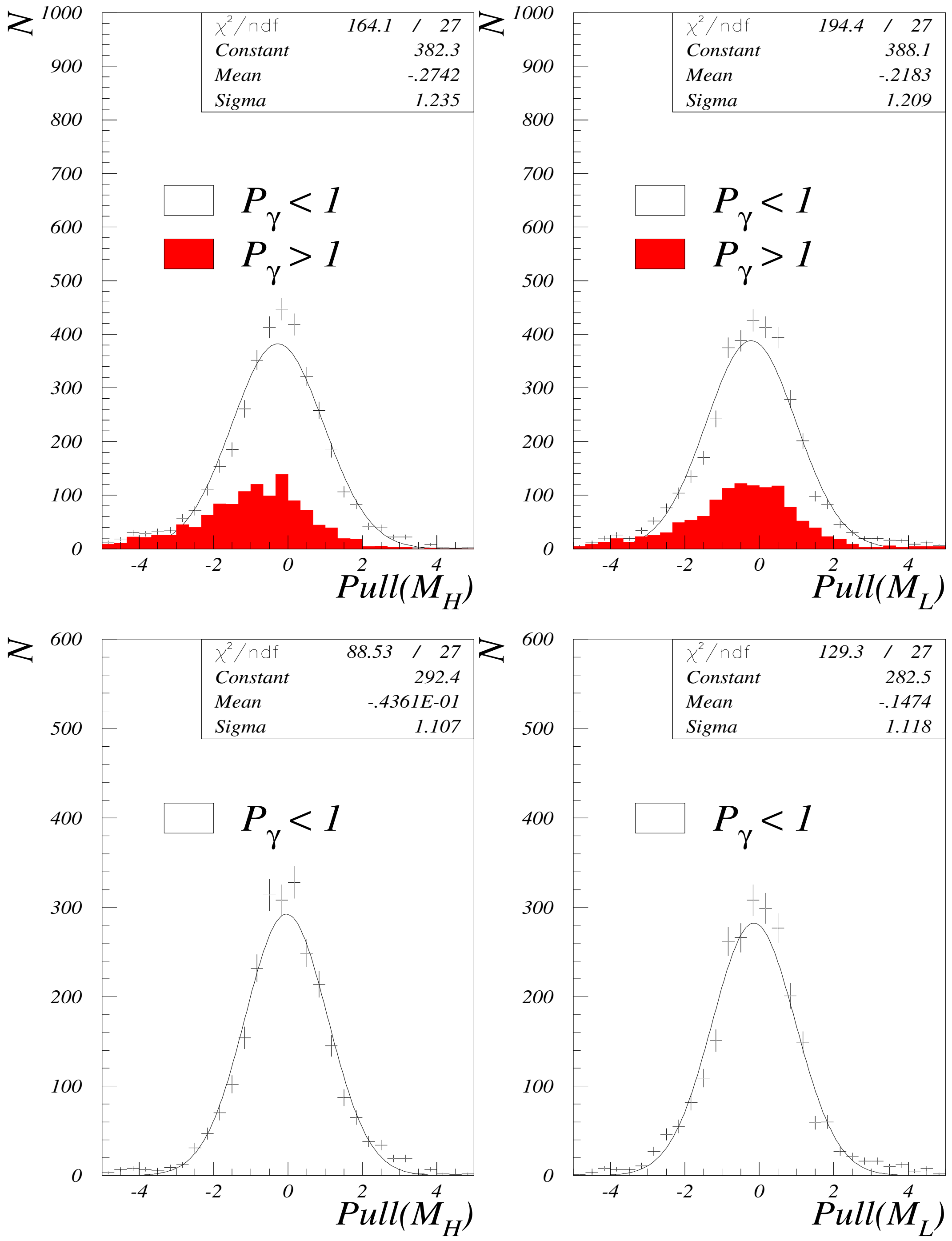


Abbildung 5.20: *Darstellung der Pullverteilung der Massen aus dem 1C-Fit mit (unten) und ohne Schnitt (oben) in der Energie P_γ des ISR-Photons.*

Kapitel 6

Bestimmung der semileptonischen W-Masse

Dieses Kapitel beschreibt die Bestimmung der Masse des W-Bosons aus seiner invarianten Massenverteilung. Hierbei werden nur semileptonische Ereignisse verwendet, die von der in Kapitel 4 beschriebenen Selektion akzeptiert wurden. Aufgrund der unterschiedlichen Behandlung von $e\nu jj$- und $\mu\nu jj$-Ereignissen in der Selektion, wird im folgenden zwischen diesen beiden Zerfallskanälen unterschieden.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die, zur Erzeugung einer Massenverteilung notwendige, Definition von sogenannten Massenestimatoren vorgenommen. Der zweite Teil ist der Extraktion der Masse aus diesen Verteilungen gewidmet, wobei hierfür zwei verschiedene Methoden vorgestellt werden.

6.1 Massenestimatoren pro Ereignis

Bei Schwerpunktenergien oberhalb der Schwelle zur W-Paar-Produktion kann die genaueste Bestimmung von M_W mit der Methode der direkten Rekonstruktion durchgeführt werden. Hierbei werden die rekonstruierten Massen pro Ereignis zu einer Massenverteilung zusammengefaßt, aus der M_W bestimmt werden kann. Zu diesem Zweck muß für jedes Ereignis ein Schätzwert für die Masse des W-Bosons aus den rekonstruierten Objekten ermittelt werden. Der einfachste Estimator ist der Mittelwert der beiden Massen pro Ereignis, wobei eine Masse aus dem 2-Jetsystem und die andere aus dem gemessenen Lepton sowie dem fehlenden Impuls berechnet werden kann:

$$M_R = \big(M_H(\mathbf{P_{Jet1}}, \mathbf{P_{Jet2}}) + M_L(\mathbf{P_{Lepton}}, \mathbf{P_{miss}})\big)/2 \quad . \tag{6.1}$$

Weitere Massenestimatoren können nach der kinematischen Anpassung definiert werden. Zum einen erfüllen die Ereignisse dann Energie- und Impulserhaltung, zum anderen ermöglicht die Kovarianzmatrix der Anpassung, Qualitätskriterien in Form von Fehlern auf die einzelnen invarianten Massen anzugeben. Allerdings sind, wie bereits im vorangegangenen Kapitel besprochen, diese Fehler nur für einen *1C-Fit* annähernd mit gauß-verteilten Fehlern verträglich. Für den *2C-Fit* hingegen, kann die Kovarianzmatrix nur eingeschränkt als Qualitätskriterium der angepaßten Masse (M_{2C}) verwendet werden. In Abbildung 6.1 ist die Verteilung der beiden Massen M_H und M_L des *1C-Fit*'s sowie deren Korrelation dargestellt. Es zeigt sich, daß die beiden Massen stark antikorreliert sind. Dieses Ergebnis mag im Widerspruch zu der Korrelation der zugrundeliegenden wahren Massen stehen, die bei Schwerpunktenergien oberhalb der W-Paar-Produkionsschwelle bei etwa 0% liegt.

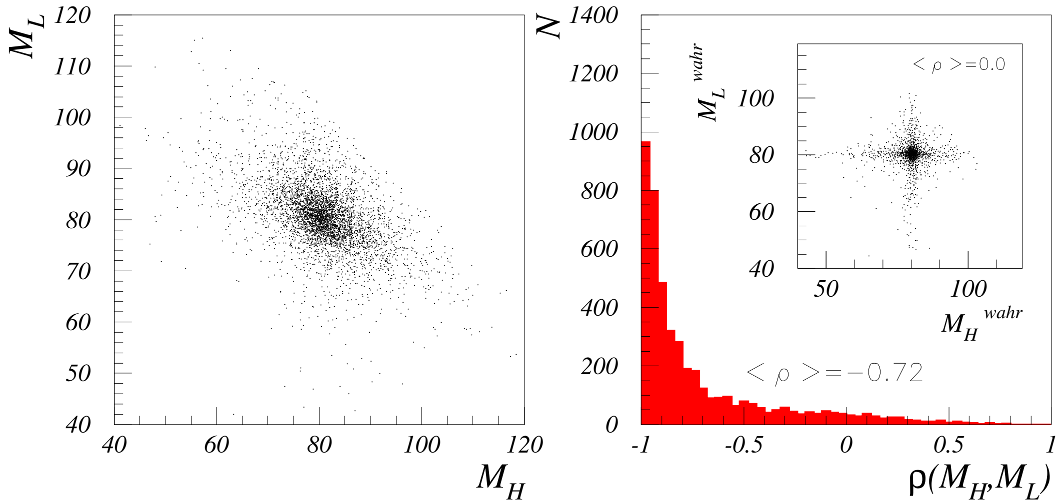


Abbildung 6.1: *Auf der linken Seite ist die zweidimensionale Dichteverteilung von M_L gegen M_H aufgetragen. Die Verteilung der Korrelation zwischen den beiden Massenestimatoren des 1C-Fit's findet sich rechts. Zum Vergleich findet sich rechts oben die zweidimensionale Dichteverteilung der zugrundeliegenden Massen. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

Wird allerdings berücksichtigt, daß mit der Anpassung die Ereignisse auf die erwartete Schwerpunktenergie gezwungen werden, so führt z.B. jede falsche Zuordnung von Teilchen zu den Jets zwangsläufig zu einer Antikorrelation. Durch die zusätzliche Massenbedingung des *2C-Fit*'s wird diese Antikorrelation der Massen in eine vollständige Korrelation umgewandelt. Anschaulich bildet somit der *2C-Fit* gerade ein gewichtetes Mittel zwischen M_H und M_L, wobei die Fehler der einzelnen Massen als Gewichte dienen. Die so gebildete Masse des *2C-Fit*'s (M_{2C}) besitzt, aufgrund der starken Antikorrelation zwischen den Massen M_H und M_L, eine bessere Auflösung als die Einzelmassen. Anstelle dieser impliziten Mittelung der hadronischen und leptonischen Masse durch den *2C-Fit*, kann auch eine direkte Kombination der beiden Massen des *1C-Fit*'s, unter Berücksichtigung ihrer 2×2-Kovarianzmatrix, durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} M_{1C} &= \frac{\left(M_H(\Delta M_L^2 - \mathcal{V}_{21}) + M_L(\Delta M_H^2 - \mathcal{V}_{21})\right)}{\Delta M_H^2 + \Delta M_L^2 - 2\mathcal{V}_{21}} \\ \Delta M_{1C} &= \sqrt{\frac{\Delta M_H^2 \Delta M_L^2 - \mathcal{V}_{21}^2}{\Delta M_H^2 + \Delta M_L^2 - 2\mathcal{V}_{21}}} \\ & \text{mit} \\ \mathcal{V}_{21} &= \Delta M_H \Delta M_L \rho \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei ρ die Korrelation zwischen M_H und M_L darstellt. Die Fehler auf die Einzelmassen sind durch ΔM_H bzw. ΔM_L gegeben.

In Abbildung 6.2 ist die Auflösung der Massenestimatoren M_R, M_{2C} und M_{1C} bezüglich der zugrundeliegenden wahren Masse ($M^{wahr} = (M_H^{wahr} + M_L^{wahr})/2$) illustriert. Wie zu erwarten, ergeben die Estimatoren nach der kinematischen Anpassung eine deutlich bessere Auflösung als dies für M_R der Fall ist. Aus diesem Grund werden im folgenden nur noch die Schätzer M_{1C} und M_{2C} betrachtet.

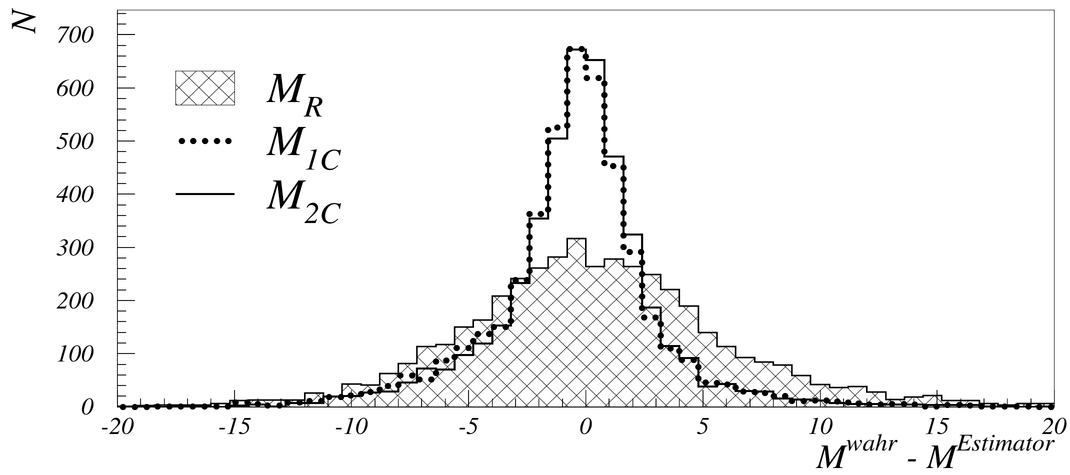


Abbildung 6.2: *Darstellung der Auflösungsverteilung der verschiedenen Estimatoren. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

6.2 Methoden zur Bestimmung von M_W

In diesem Abschnitt werden zwei Methoden beschrieben, mit denen die Masse des W-Bosons aus der eindimensionalen Verteilung der Massenestimatoren extrahiert werden kann. Es wird dabei besonders darauf geachtet, daß systematische Effekte, wie etwa ISR, Akzeptanz- oder Auflösungsverluste, vollständig berücksichtigt werden und somit der systematische Fehler auf M_W möglichst klein gehalten wird.

6.2.1 Breit-Wigner Methode

Wie in Gleichung 2.15 angegeben, sind die wahren Massen M entsprechend einer Breit-Wigner Funktion um den Mittelwert M_W verteilt. Inspiriert durch diese theoretische Beschreibung, wird bei der Breit-Wigner Methode versucht, die gemessenen invarianten Massenverteilungen mit einer analytischen Breit-Wigner Funktion (BW) anzupassen. Aufgrund von Akzeptanz-, Auflösungsverlusten, ISR und Effekten der Fragmentation ist nicht sichergestellt, daß der Mittelwert der angepaßten Verteilung und der zugrundeliegende wahre Wert identisch sind.

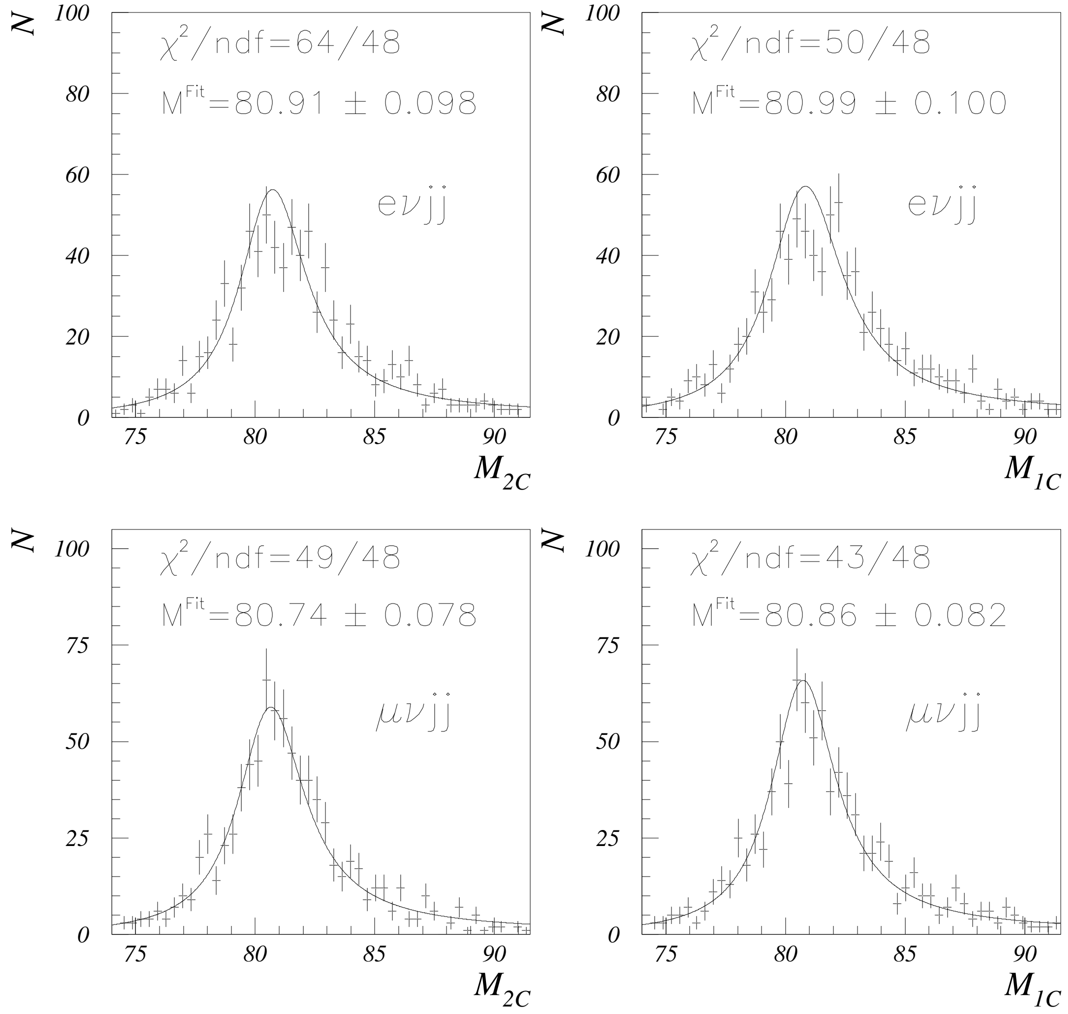


Abbildung 6.3: *Darstellung von BW-Anpassungen an die Massenverteilung der Estimatoren* M_{1C} *und* M_{2C}*. Die Anzahl der simulierten* $e\nu jj$*- und* $\mu\nu jj$*-Ereignisse entspricht einer integrierten Luminosität von 500* pb^{-1}*. Die zugrundeliegende Masse des W-Bosons im Monte Carlo ist* $M_W = 80.35$ *GeV/*c^2*. Alle dargestellten Anpassungswerte sind in GeV/*c^2 *angegeben.*

Damit die Methode überhaupt angewendet werden kann, muß zuerst gezeigt werden, daß die gemessenen Massenverteilungen auch wirklich mit einer einfachen BW-Funktion beschrieben werden können. Zu diesem Zweck wird mit einer χ^2-Anpassung die Funktion:

$$BW(M,\Gamma) = N\frac{\Gamma(M)^2 M^2}{\left((M^2 - M_W^2)^2 + M^2\Gamma(M)^2\right)} \quad , \tag{6.3}$$

mit

$$\Gamma(M) = \Gamma_W \frac{M^2}{M_W^2} \quad ,$$

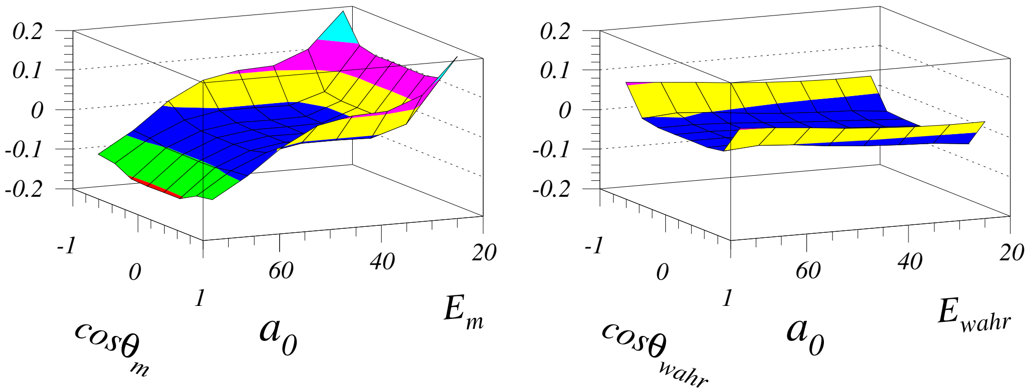


Abbildung 6.4: *Vergleich der in gemessenen (rechts) und wahren Größen (links) unterteilten Korrekturfaktoren a_0. Es ist die bereits geglättete Version dargestellt. Alle Energiewerte sind in GeV gegeben.*

an Massenverteilungen, die mit voll detektorsimulierten Ereignissen erstellt wurden, angepaßt. Es hat sich gezeigt, daß die besten Anpassungen in einem Massenfenster von $[74, \sqrt{s}/2]$ GeV/c^2 erreicht werden. Die systematische Abhängigkeit der Massenbestimmung von diesem Massenfenster wird in Kapitel 7 noch untersucht. In Abbildung 6.3 sind exemplarische Darstellungen dieser BW-Anpassung für die unterschiedlichen Massenestimatoren und Kanäle zu finden. Die verwendete Anzahl von Simulationsereignissen entspricht einer integrierten Luminosität von 500 pb^{-1}, was etwa die gesamte erwartete Datenmenge eines LEP2-Experiments ist. Es zeigt sich, daß innerhalb des Massenfensters eine zufriedenstellende Beschreibung der Massenverteilungen mit der BW-Funktion möglich ist. Allerdings befinden sich die angepaßten Massen weit oberhalb der, den Simulationsereignissen zugrundeliegenden, Masse von $M_W = 80.35$ GeV/c^2. Ein Teil dieser Überschätzung kann mit dem Einfluß von ISR auf die kinematische Anpassung erklärt werden. Allerdings stellte sich bei genauerer Untersuchung heraus, daß ein weiterer essentieller Anteil an dieser Überschätzung direkt auf die technische Anwendung der kinematischen Anpassung zurückzuführen ist. Im folgenden Abschnitt wird dieser Sachverhalt genauer erläutert.

6.2.2 Erwartungswert $\vec{y}_0$ als Funktion von wahren Größen

In Abschnitt 5.2.2 wurde bereits gezeigt, daß die $\vec{y}_0$'s als Funktion der gemessenen Energie und des gemessenen Winkels parametrisiert werden können. Diese Korrekturen überführen somit den gemessen Impuls in einen korrigierten Impuls, der näher an dem zugrundeliegenden wahren Impuls liegt. Wie in Abbildung 6.4 dargestellt, besitzen die Korrekturfaktoren, insbesondere a_0, eine starke Abhängigkeit von den gemessenen Größen E_m und $\cos\theta_m$. Dies hat zur Folge, daß gemessene Objekte mit sehr kleiner Energie systematisch zu größeren Werten, und Objekte mit sehr hoher Energie systematisch zu kleineren Energien korrigiert werden. Aufgrund von Akzeptanzverlusten ist der Energieverlust von rekonstruierten Objekte wahrscheinlicher als der Energiegewinn und somit kommt es zu generellen Überschätzung der Energien der korrigierten Objekte. Dies wiederum manifestiert sich zwangsläufig in einer

Überschätzung der Masse. Allgemein hat diese Art der Korrektur die Tendenz, die Korrekturen in Richtung der Eigenschaften von durchschnittlichen WW-Ereignissen durchzuführen, was zu einer Verzerrung der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung führt.
Wird hingegen die Berechnung der Korrekturfaktoren in Intervallen $[E_{wahr}, \cos\theta_{wahr}]$ der wahren Größen durchgeführt, so ist die Energieabhängigkeit der $\vec{y}_0$'s deutlich geringer (siehe Abbildung 6.4). Das unterschiedliche Verhalten der in gemessenen bzw. wahren Größen unterteilten Korrekturen läßt sich einfach erklären. Für ein in wahren Größen festgelegtes Intervall $[E_{wahr} + \Delta E, \cos\theta_{wahr} + \Delta cos\theta]_i$ tragen entsprechend der Akzeptanz des Detektors unterschiedlich gut gemessene Größen bei. Wie in Abbildung 6.5 schematisch dargestellt, kommt es zu Wanderungen von verschiedenen, in gemessenen Größen definierten, Intervallen zu einem, in wahren Größen definierten, Intervall. Wird zusätzlich davon ausgegangen, daß es keine Vorzugsrichtung der wahren Größen im Detektor gibt,[1] so sollten die Korrekturen als Funktion der wahren Größen in erster Näherung immer um ihren Idealwert ($\vec{y}_0 = 0$) gauß-verteilt sein. Die Breite der Verteilung gibt an, wie gut ein Objekt mit fester wahrer Energie und wahrem Winkel im Detektor gemessen werden kann. Prinzipiell wäre somit die Anwendung von Korrekturfaktoren, definiert in wahren Größen $\vec{y}_0^{\,wahr}$, für die kinematische Anpassung sinnvoll.

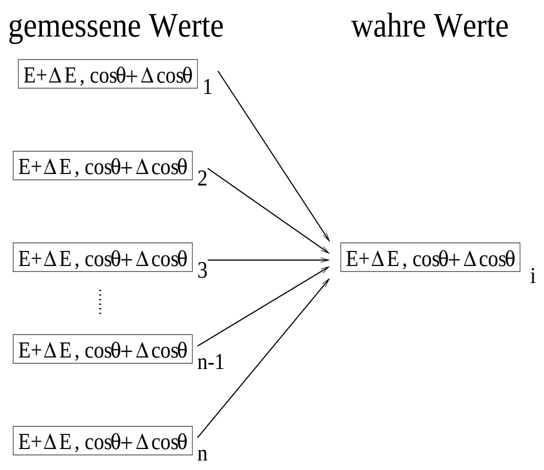


Abbildung 6.5: *Schematische Darstellung des Wanderungsverhaltens zwischen den mit gemessenen bzw. wahren Größen definierten Intervallen.*

A priori stehen aber nach der Selektion nur Informationen über gemessene Größen zur Verfügung, so daß das in Abschnitt 5.2.4 dargestellte Anpassungskonzept nicht mit den $\vec{y}_0^{\,wahr}$'s durchgeführt werden kann. Allerdings besteht die Möglichkeit, diese Korrekturen in einem iterativen Verfahren anzuwenden, wobei der erste Schritt der Iteration gerade den schon bekannten Anpassungsalgorithmus darstellt. Unter Anwendung der in gemessenen Größen unterteilten Korrekturfaktoren $\vec{y}_0$ werden die rekonstruierten Impulse in, den wahren Impulsen näherliegende, angepaßte Impulse überführt. Im zweiten Schritt werden die angepaßten Größen den wahren Größen gleichgesetzt und somit Korrekturfaktoren $\vec{y}_0^{\,wahr}$ bestimmt. Diese werden dann für die zweite Anpassung der *gemessenen* Größen verwendet. Die daraus resultierenden neu angepaßten Größen dienen als Startwerte für den nächsten Schritt, wobei wiederum die gemessenen Größen, allerdings nun mit neuen Erwartungswerten $\vec{y}_0^{\,wahr}$, angepaßt werden. Das Iterationsverfahren wird solange wiederholt, bis die Änderung des χ^2 von einem zum nächsten Schritt kleiner als 10^{-5} ist. Eine schematische Darstellung dieser Iteration ist in Abbildung 6.6 zu finden. Aufgrund der zusätzlichen Iteration besitzt das neue Anpassungsverfahren mit 96% für den *1C-Fit* und 94% für den 2C-Fit etwas geringere Konvergenzwahrscheinlichkeiten als das nur auf den $\vec{y}_0$'s beruhende alte Konzept. Allerdings zeigt

[1] Diese Annahme ist eigentlich nur für die wahre Energie gültig. Im Falle von $cos\theta_{wahr}$ gibt es aufgrund der t-Kanalerzeugung der WW-Paare eine Bevorzugung von kleinen Winkeln.

sich, daß mit der neuen Anpassung die Überschätzung der Masse kleiner wird.

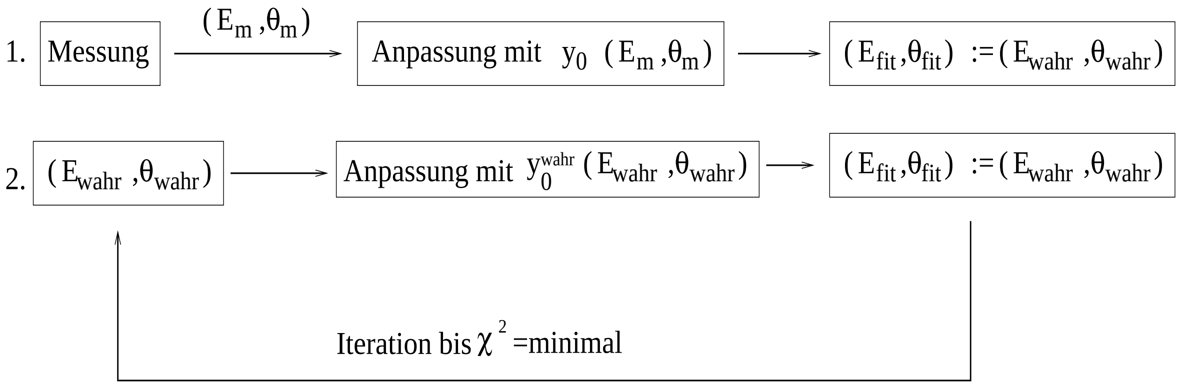


Abbildung 6.6: *Schematische Darstellung des Iterationsverfahrens. Der erste Schritt entspricht gerade dem in Abschnitt 5.2.4 beschriebenen Anpassungsverfahren. Bei den nächsten Schritten werden die in gemessenen Variablen unterteilten $\vec{y}_0$'s durch die in wahren Größen unterteilten $\vec{y}_0^{\,wahr}$'s ersetzt.*

In Tabelle 6.1 ist ein Vergleich des alten und neuen Anpassungskonzepts illustriert, wobei die Massenwerte mit der BW-Methode bestimmt wurden. Aufgrund des besseren Massenschätzers der neuen Anpassung werden im folgenden nur Resultate dieser Anpassung präsentiert.

Anpassung	*Kanal*	M_{1C}	M_{2C}
alt	$\mu\nu jj$	80.86 ± 0.082	80.74 ± 0.078
neu	$\mu\nu jj$	80.52 ± 0.090	80.39 ± 0.080
alt	$e\nu jj$	80.99 ± 0.100	80.91 ± 0.098
neu	$e\nu jj$	80.68 ± 0.100	80.61 ± 0.100

Tabelle 6.1: *Vergleich von altem und neuem Anpassungskonzept. Dargestellt sind die Resultate der BW-Methode, wobei die Anzahl der Ereignisse einer totalen integrierten Luminosität von 500pb^{-1} entspricht. Die zugrundeliegende Masse des W-Bosons im Monte Carlo ist M_W=80.35 GeV/c^2. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

An dieser Stelle sei angemerkt, daß sich der Unterschied zwischen der alten und neuen kinematischen Anpassung nur auf die unterschiedliche Bestimmung der Korrekturfaktoren beschränkt. Das im Kapitel 5 vorgestellte allgemeine Anpassungskonzept hat weiterhin uneingeschränkte Gültigkeit.

Trotz der Annäherung der Anpassungswerte an die zugrundeliegende Masse von M_W=80.35 GeV/c^2 ist die Abweichung immer noch signifikant, was auf eine unzureichende Berücksichtigung von ISR, Akzeptanz- und Fragmentationseffekten zurückzuführen ist. Aus diesem Grund muß eine sogenannte Kalibration der BW-Anpassungsergebnisse mit voll detektorsimulierten Ereignissen durchgeführt werden. Die Idee hierbei ist, daß zuerst mehrere Sätze dieser Ereignisse jeweils bei unterschiedlichen Massen des W-Bosons generiert werden. Die BW-Methode wird dann auf die einzelnen Ereignissätze angewendet und die so extrahierten Massen werden als Funktion der generierten Massen aufgetragen. Dabei ergibt sich in dem relevanten Massenbereich eine Gerade, die mit folgender Funktion beschrieben werden kann:

$$M_{Fit} = m(M_{wahr} - 80.35) + b \quad GeV/c^2 \quad , \tag{6.4}$$

wobei die Parameter m und b die Gerade eindeutig festlegen. Mit dieser Kalibrationskurve kann die mit der BW-Methode bestimmte Masse und ihr assoziierter Fehler in eine korrigierte Masse M_{Kor} mit ebenfalls korrigiertem Fehler überführt werden. Exemplarisch ist die Prozedur am Beispiel des Massenestimators M_{2C} für $\mu\nu jj$-Ereignisse in Abbildung 6.7 illustriert. Die Steigung der Kalibrationskurve ist mit eins verträglich. Allerdings ist eine deutliche Überschätzung der Massen zu erkennen. Die Kalibrationskurve korrigiert somit auf alle Effekte, die zu dieser Verzerrung der Messung mit der BW-Methode führen. Die so korrigierte Masse M_{Korr} stimmt nun innerhalb ihrer Fehler mit der wahren Masse überein.

Prinzipiell ist damit die BW-Methode vollständig beschrieben. Es hat sich aber aus technischen Gründen als sinnvoller erwiesen die χ^2-Anpassung der BW-Funktion an die invariante Massenverteilung durch eine Maximum-Likelihood-Anpassung zu ersetzen. Sie hat den entscheidenen Vorteil, daß die Annahme einer Gauß-Verteilung pro anzupassendes Massenintervall i durch eine Poissonverteilung substituiert werden kann. Dies ist insbesondere für Massenintervalle mit wenigen Einträgen wichtig, da dort die Annahme von gauß-verteilten Fehlern nicht mehr adäquat ist. Die Likelihood $\mathcal{L}$ kann wie folgt definiert werden:

$$-2log\mathcal{L} = -2\sum_{i=1}^{N_{bins}} logP_i \quad , \tag{6.5}$$

mit

$$P_i = \frac{1}{N_i!} e^{-\mu_i} \mu_i^{N_i} \quad , \tag{6.6}$$

wobei μ_i der erwartete Wert der BW-Funktion und N_i die gesehene Anzahl von Einträgen im Intervall i sind. Der konstante Faktor $\frac{1}{N_i!}$ ist für das Extremum von $\mathcal{L}$ irrelevant und kann somit vernachläßigt werden. Die Anzahl der Intervalle ist durch N_{bins} gegeben.

Im folgenden werden noch einmal die wichtigsten Aspekte der BW-Methode aufgelistet:

1. Wahl des Zerfallskanals sowie des Massenestimators (M_{1C} oder M_{2C}).

2. Aufnahme der invarianten Massenverteilung in dem Massenbereich von $[74, 91.5]$ GeV/c^2. Die Anzahl der Unterteilungen N_{bins} für dieses Massenintervall wurde so gewählt, daß bei Variation von N_{bins} in den Bereichen von $\pm 10\%$ die angepaßte Masse M_{Fit} der BW-Funktion konstant bleibt. Dies ist hier für $N_{bins} = 1000$ der Fall.

3. Maximum-Likelihood-Anpassung der in Gleichung 6.3 definierten BW-Funktion.

4. Korrektur der angepaßten Masse M_{Fit} und ihres assoziierten Fehlers ΔM_{Fit} entsprechend der, mit voll detektorsimulierten Ereignissen, erstellten Kalibrationskurve.

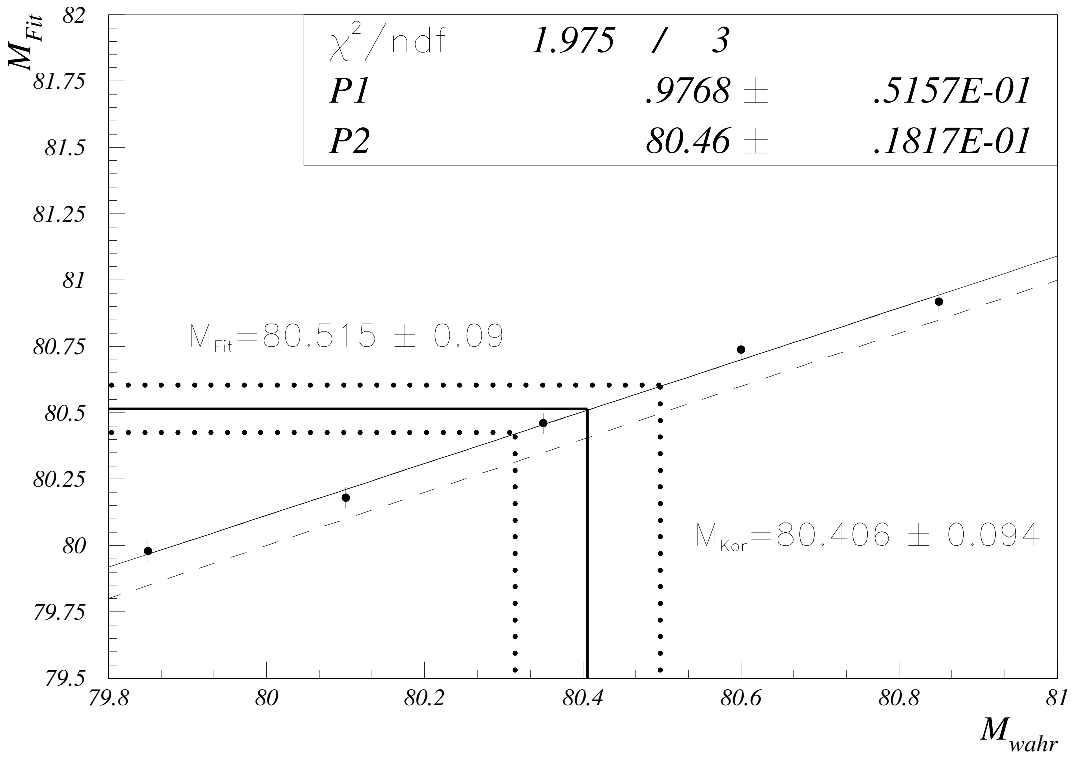


Abbildung 6.7: *Exemplarische Darstellung einer Kalibrationskurve für den Massenestimator M_{1C} und $\mu\nu jj$-Ereignisse. Die gemäß der Kalibrationskurve durchgeführte Projektion der gemessenen Masse M_{Fit} ergibt den korrigierten Wert M_{Kor}. Dieser Wert ist nun mit dem wahren Wert von M_W=80.35 GeV/c^2 innerhalb seiner Fehler verträglich. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

6.3 Umgewichtungs-Methode

Im Gegensatz zur BW-Methode ist die Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion zur Beschreibung der invarianten Massenverteilung bei der Umgewichtungs-Methode keine analytische Funktion. Vielmehr werden bei dieser Methode simulierte Massenspektren, die mit Monte Carlo Ereignissen erstellt werden, an die gemessenen Massenverteilungen angepaßt und so die Masse des W-Bosons M_W extrahiert. Konzeptionell würde dies aber bedeuten, daß für jedes mögliche M_W eine große Anzahl von simulierten Ereignissen generiert werden müßte. Dies ist aufgrund der dafür benötigten Rechenzeit für alle praktischen Belange unmöglich. Um dennoch auf diese Methode zurückgreifen zu können, wird ein sogenanntes Umgewichtungs-Verfahren angewendet, bei dem an nur einer Referenzmasse M_{Ref} eine große Anzahl von voll simulierten Ereignissen erzeugt wird. Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 besprochen, ist der CC03-Wirkungsquerschnitt zur W-Paarerzeugung durch die Variablen s_1,s_2,Γ_W und M_W vollständig definiert. Für den Übergang $W^+W^- \to f_1, f_2, f_3, f_4$ erweitert sich dieser Variablensatz auf $\mathbf{P}_{f_1}$, $\mathbf{P}_{f_2}$, $\mathbf{P}_{f_3}$, $\mathbf{P}_{f_4}$, Γ_W und M_W.

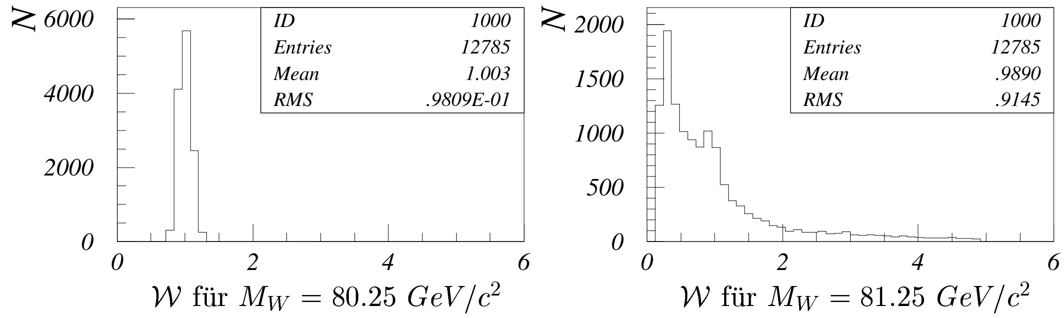


Abbildung 6.8: *Darstellung von Verteilungen der Ereignisgewichte $\mathcal{W}$ für $M_W = 80.25$ und $M_W = 81.25\ GeV/c^2$. Die Referenzmenge ist bei $M_{Ref} = 80.35\ GeV/c^2$ generiert worden.*

Das Matrixelement im Standardmodell für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow W^+W^- \rightarrow f_1f_2f_3f_4$ ist somit durch

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{P}_{f_1}, \mathbf{P}_{f_2}, \mathbf{P}_{f_3}, \mathbf{P}_{f_4}, M_W, \Gamma_W) \quad ,$$

gegeben. Das Verhältnis

$$\mathcal{W}(M_W, \Gamma_W) = \frac{|\mathcal{M}(\mathbf{P}_{f_1}, \mathbf{P}_{f_2}, \mathbf{P}_{f_3}, \mathbf{P}_{f_4}, M_W, \Gamma_W)|^2}{|\mathcal{M}(\mathbf{P}_{f_1}, \mathbf{P}_{f_2}, \mathbf{P}_{f_3}, \mathbf{P}_{f_4}, M_{Ref}, \Gamma_{Ref})|^2} \quad , \tag{6.7}$$

gibt daher gerade das Gewicht an, daß ein Ereignis mit den wahren Vierervektoren $\mathbf{P}_{f_i}$ bei einer Masse M_W und einer Breite Γ_W relativ zur Referenz (M_{Ref}, Γ_{Ref}) besitzt. Mit diesem Ereignisgewicht $\mathcal{W}(M_W, \Gamma_W)$ kann prinzipiell jede beliebige Verteilung zu einem anderen M_W bzw. Γ_W gewichtet werden. Insbesondere gilt dies für die mit vollständig simulierten WW-Ereignissen erzeugte Massenverteilung. Da das Ziel dieser Analyse die Bestimmung der Masse des W-Bosons ist, kann die Breite des W's, entsprechend dem Vorschlag in [**?**], durch die Standardmodellrelation

$$\Gamma_W = \frac{3G_F M_W^3}{\sqrt{8}\pi}(1 + \frac{2\alpha_s}{3\pi}) \tag{6.8}$$

mit M_W verknüpft werden. Dabei stellt G_F die Fermikonstante und α_s die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung dar. In Abbildung 6.8 sind die Verteilungen der Ereignisgewichte für die Massen $M_W = 80.25$ und $M_W = 81.25\ GeV/c^2$ dargestellt, wobei die Simulationsereignisse bei $M_{Ref} = 80.35\ GeV/c^2$ generiert worden sind. Es zeigt sich, daß die Gewichte um so stärker von eins abweichen, je weiter M_W von M_{Ref} entfernt ist. Qualitativ ausgedrückt, verringert sich die effektive statistische Information der umgewichteten Spektren entsprechend dem Faktor:

$$\frac{1}{N}\frac{(\int \mathcal{W} d\Omega)^2}{\int \mathcal{W}^2 d\Omega} \quad , \tag{6.9}$$

wobei N die Anzahl der bei der Referenzmasse generierten Ereignisse darstellt. Die Integration wird über den durch die Vierervektoren $\mathbf{P}_{f_i}$ aufgespannten Phasenraum Ω durchgeführt.

Für $M_W = 81.25$ GeV/c^2 beträgt dieser Faktor etwa 0.42. Der Umgewichtungs-Methode stehen $400 \cdot 10^3$ Simulationsereignisse zur Verfügung (siehe Tabelle 4.1), und die effektive statistische Information eines zu $M_W = 81.25$ GeV/c^2 umgewichteten Spektrums entspricht demzufolge etwa $170 \cdot 10^3$ Ereignissen. Um die statistischen Unsicherheiten der umgewichteten Massenspektren möglichst klein zu halten, werden Massenbereiche mit geringer Population von der Analyse ausgeschlossen. Analog zur BW-Methode werden daher nur Ereignisse in einem Massenfenster von $[74, 91.5]$ GeV/c^2 betrachtet.

Für die vollständige Emulation der simulierten Spektren muß Untergrund aus Nicht-WW-Prozessen den Massenverteilungen beigemischt werden. Aufgrund der Massenunabhängigkeit dieser Prozesse muß das Untergrundspektrum nicht umgewichtet, sondern nur zu der umgewichteten Signalverteilung addiert werden. Anschließend wird durch den Vergleich von umgewichteter und gemessener Massenverteilung die Masse des W-Bosons bestimmt. Hierfür wird eine Maximum-Likelihood-Anpassung der in Massenintervallen $\Delta m_i = m_i \leq m < m_{i+1}$ unterteilten Spektren angewendet:

$$-2log\mathcal{L} = -2 \sum_{i=1}^{N_{ND}} log\mathcal{P}(\Delta m_i | M_W) \quad . \tag{6.10}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\mathcal{P}$ hängt von der umgewichteten Masse M_W sowie dem betrachteten Intervall Δm_i des Massenspektrums ab. Die Summe in Gleichung 6.10 wird über alle in den Daten beobachteten Ereignisse im Massenfenster N_{ND} gebildet. Unter Berücksichtigung des massenunabhängigen Untergrunds sowie des umgewichteten Signals ergibt sich $\mathcal{P}$ zu [**?**]:

$$\mathcal{P}(\Delta m_i | M_W) = \frac{\rho_S(M_W) N_S^i(M_W) + (1 - \rho_S(M_W)) N_U^i}{\Delta m_i N_{TOT}} \quad , \tag{6.11}$$

wobei $N_S^i(M_W)$ die umgewichtete

$$N_S^i(M_W) = \sum_{j=1}^{N_{Ref}^i} \mathcal{W}_j(M_W)$$

und N_{ref}^i die in der Referenzmenge gefundene Anzahl von Signalereignissen im Massenintervall i darstellen. Die Reinheit der verwendeten Selektion ist durch $\rho_S(M_W)$ gegeben. Somit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Untergrundereignisse N_U^i zu $1 - \rho_S(M_W)$. Aufgrund der Massenabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes zur W-Paarproduktion σ_{WW} ist auch $\rho_S(M_W)$ geringfügig M_W-abhängig:

$$\rho_S(M_W) = \frac{\epsilon_S \sigma_{WW}(M_W)}{\epsilon_S \sigma_{WW}(M_W) + \epsilon_U \sigma_U} \quad .$$

Prinzipiell lassen sich die Effizienzen ϵ der Selektion aus Tabelle 4.3 entnehmen. Da nur Ereignisse im Massenfester von $[74, 91.5]$ GeV/c^2 betrachtet werden, reduziert sich die Effizienz für $e\nu jj$-Ereignisse auf $\epsilon_S \approx$66% und die für $\mu\nu jj$-Ereignisse auf $\epsilon_S \approx$ 68%. Die geringfügige Massenabhängigkeit von $\sigma_{WW}(M_W)$ kann nahe bei M_{Ref} durch eine parabolische Funktion approximiert werden:

$$\sigma_{WW}(M_W) = \sigma_{WW}(M_{Ref})\big(1 + a(M_W - M_{Ref}) + b(M_W - M_{Ref})^2\big) \quad ,$$

wobei die Werte $a = -0.007067$ und $b = -0.002503$ aus einer χ^2-Anpassung an Simulationsereignissen, generiert bei verschiedenen M_W's, ermittelt wurden. Damit die in Gleichung 6.11 definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{P}$ auf eins normiert ist, muß N_{TOT} gerade der gewichteten Summe aller verwendeten Simulationsereignisse entsprechen:

$$N_{TOT} = \sum_{i=1}^{N_{Bin}} \rho_S(M_W) N_S^i(M_W) + (1 - \rho_S(M_W)) N_U^i \quad .$$

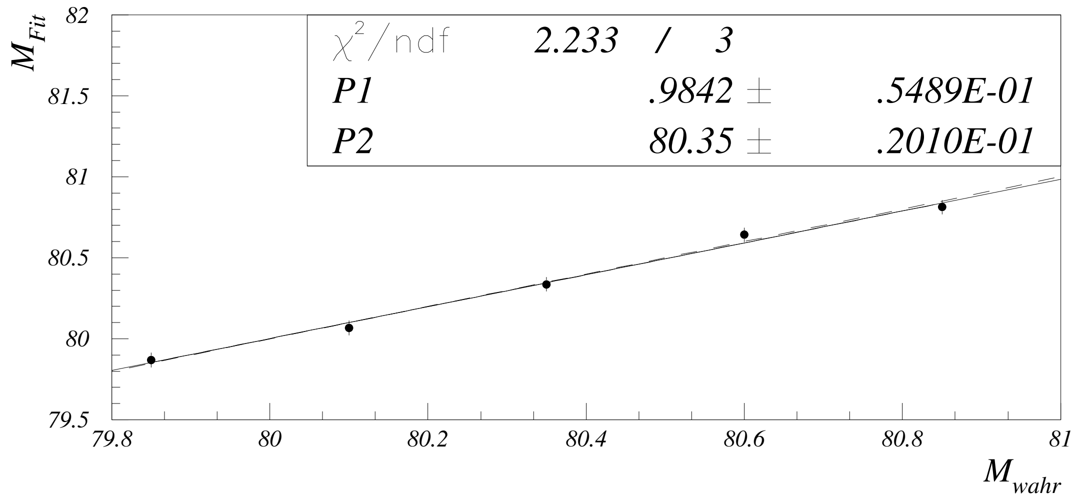


Abbildung 6.9: *Exemplarische Darstellung einer Kalibrationskurve für die Umgewichtungs-Methode. Zur Erzeugung der Kurve wurde der Massenestimator M_{1C} von $\mu\nu jj$-Ereignissen verwendet. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

Hierbei wird über alle Intervalle i der Massenverteilung summiert, wobei $\Delta m_i = 0.5\ GeV/c^2$ für die Analyse gewählt wurde.

Im Gegensatz zur BW-Methode sind bei der Umgewichtungs-Methode alle im Monte Carlo enthaltenen Effekte wie ISR, Akzeptanzverluste und Fragmentation in der anzupassenden Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion enthalten. Die Aufnahme einer Kalibrationskurve für diese Methode hat daher nur die Bedeutung einer Konsistenzüberprüfung, bei der eventuelle Unzulänglichkeiten bei der technischen Umsetzung aufgedeckt werden sollen. In Abbildung 6.9 ist für den Massenestimator M_{1C} von $\mu\nu jj$-Ereignissen eine Kalibrationskurve für die Umgewichtungs-Methode dargestellt. Im Gegensatz zur BW-Methode (siehe Abbildung 6.7) ist keine Korrektur der angepaßten Masse M_{Fit} entsprechend der Kalibrationskurve notwendig.

6.4 Bestimmung von M_W

Der folgende Abschnitt ist der Optimierung sowie der expliziten Bestimmung der Masse des W-Bosons gewidmet. Mit den zwei ausgewählten Massenestimatoren M_{1C} und M_{2C} sowie den beiden Extraktionsmethoden ergeben sich prinzipiell vier mögliche Arten zur Bestimmung von M_W. Allerdings verdoppelt sich aufgrund der Unterteilung des semileptonischen

Kanals in $\mu\nu jj$- und $e\nu jj$-Ereignisse diese Anzahl, und somit werden acht Massenwerte aus den Daten bestimmt. Diese angestrebte Vielfalt der Messungen bietet einerseits die Möglichkeit, die einzelnen Messungen auf Konsistenz zu prüfen, was eventuelle Unzulänglichkeiten der Methoden aufdecken soll. Andererseits macht sie aber eine individuelle Optimierung der Methoden schwierig. Aus diesem Grund wird nicht jede Methode einzeln verbessert, sonder vielmehr eine Optimierung der Methoden an generellen Eingangsgrößen, wie z.B. den Massenestimatoren, vorgenommen.

6.4.1 Optimierung und Test der Methoden

Eine der wichtigsten Eingangsgrößen für die Methoden stellen die Massenestimatoren dar. Wie in Abschnitt 6.1 vorgestellt, werden diese Estimatoren aus kinematisch angepaßten Größen definiert. Aufgrund von ISR-Effekten und der nur annähernd gauß-verteilten Eingangsfehler für die Anpassung (siehe Abschnitt 5.2.7) sind die Resultate der Anpassung und damit die Estimatoren nicht immer wohldefiniert. Solche Ereignisse manifestieren sich bei kleinen χ^2-Wahrscheinlichkeiten $P(\chi^2, ndf)$ und daher stellt $P(\chi^2, ndf)$ eine mögliche Variable zur Optimierung der Estimatoren dar. In Abbildung 6.10 ist ein Vergleich von Datenereignissen mit simulierten Ereignissen für die Verteilung von $P(\chi^2, ndf)$ dargestellt. Deutlich ist sowohl für den *1C-Fit* als auch für den *2C-Fit* die Überhöhung bei kleinen Werten von $P(\chi^2, ndf)$ zu sehen. Teilweise wird diese Anhäufung durch Untergrundereignisse erzeugt, die nicht der zugrundeliegenden Anpassungshypothese genügen. Mit einem Schnitt in der χ^2-Wahrscheinlichkeit bei kleinen Werten könnten daher nicht nur Signalereignisse mit unzureichend definierten Massenestimatoren, sondern auch Untergrundereignisse von der zu analysierenden Ereignismenge abgetrennt werden. Am Beispiel der Breit-Wigner Methode wird nun gezeigt, daß ein Schnitt in der χ^2-Wahrscheinlichkeit den erwarteten Fehler auf M_W verbessert. Dazu werden sogenannte *Pseudoexperimente* aus Simulationsereignissen zusammengestellt, die entsprechend der Effizienz und Reinheit der Selektion Signal- und Untergrundereignisse enthalten. In Abbildung 6.11 ist der erwartete Fehler auf M_W (ΔM_W^E) für eine integrierte Luminosität von 100 pb^{-1} als Funktion des Schnittes in der χ^2-Wahrscheinlichkeit dargestellt. Um die statistischen Unsicherheiten auf den erwarteten Fehler klein zu halten, wurde der Mittelwert der Fehler von 25 Pseudoexperimenten gebildet. Da die verschiedenen ΔM_W^E's miteinander korreliert sind, wird nur der unkorrelierte Anteil des Fehlers von Messung i

$$\Delta(i - i_0) = \sqrt{(\Delta M_W^E)_i^2 - (\Delta M_W^E)_{i_0}^2} \quad ,$$

bezüglich des kleinsten erwarteten Fehlers an der Stelle i_0 als Fehlerbalken aufgetragen. Die begrenzte Anzahl von Simulationsereignissen erlaubt keine eindeutige Festlegung des Wertes von $P(\chi^2, ndf)$ an der ΔM_W^E für die einzelnen Massenestimatoren minimal wird. Allerdings gibt es Evidenz dafür, daß ein Schnitt in der Region $P(\chi^2, ndf) = 0.15 - 0.025$ den erwarteten Fehler minimiert. Aus diesem Grund wird im folgenden immer ein zusätzlicher Schnitt für alle selektierten Ereignisse von $P(\chi^2, ndf) > 0.02$ verlangt.

Die letzten noch ausstehenden Tests der acht Methoden sind die Aufnahme von Kalibrationskurven unter Verwendung der in Tabelle 4.1 angegebenen vollen Statistik von Simulationsereignissen. Damit auch gleichzeitig die erwarteten Fehler für die einzelnen Messungen von M_W berechnet werden können, werden die Signal- und Untergrundereignisse entsprechend der Reinheiten und Effizienzen der Selektion in Pseudoexperimente unterteilt. Die Anzahl der Ereignisse pro Experiment entspricht gerade der in den Daten selektierten Anzahl von 105 $\mu\nu jj$-

und 130 $e\nu jj$-Kandidaten. Die Verläßlichkeit der Fehler aus den Likelihood-Anpassungen kann mit Pullverteilungen der Pseudoexperimente, deren zugrundeliegende Masse bekannt ist, ebenfalls überprüft werden. In den Abbildungen 6.18 bis 6.25 sind Kalibrationskurven, Pull- und Fehlerverteilungen für jede der acht Methoden dargestellt.

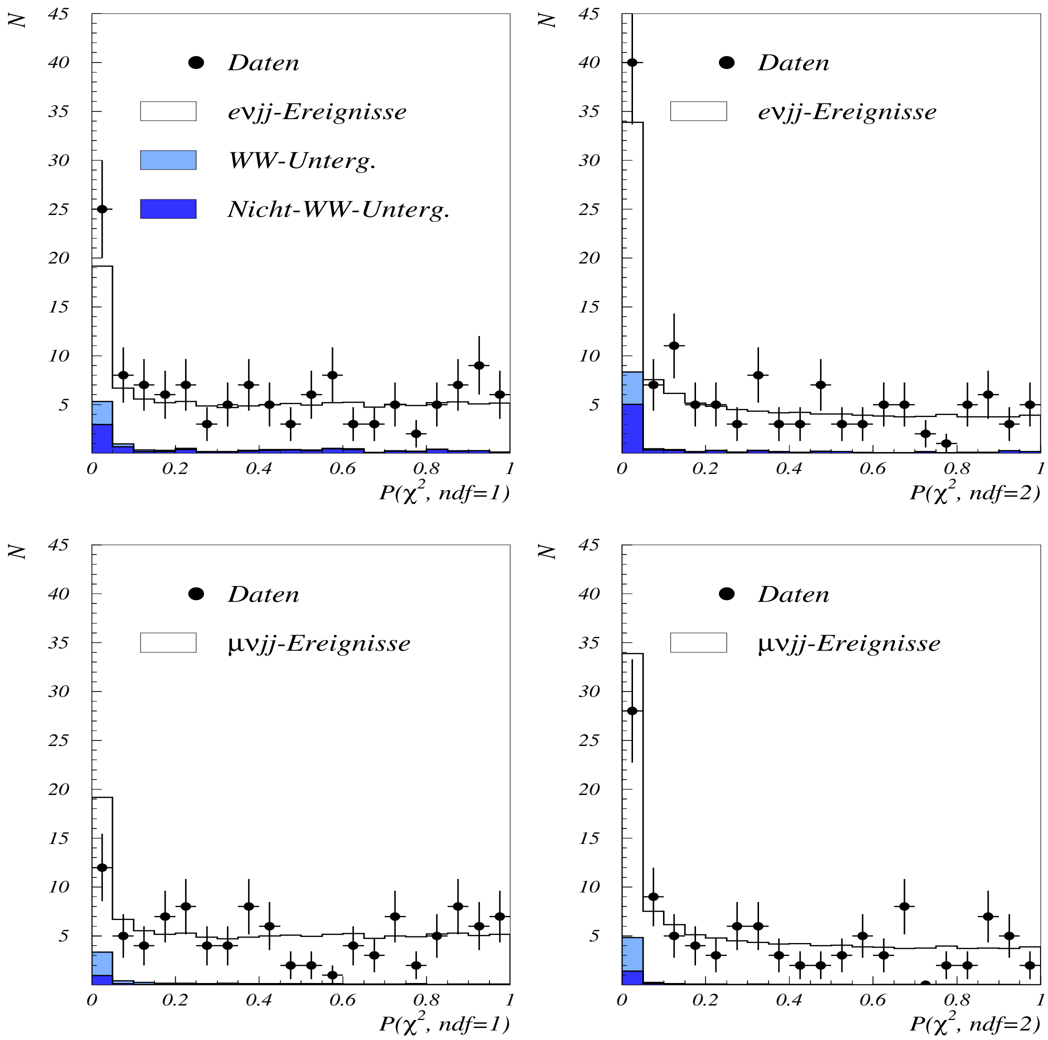


Abbildung 6.10: *Verteilung der χ^2-Wahrscheinlichkeit für den 1C-Fit und 2C-Fit. $\mu\nu jj$- und $e\nu jj$-Ereignisse sind getrennt dargestellt.*

Die Zusammenfassung der quantitativen Tests sind in den Tabellen 6.2 und 6.3 aufgelistet. Es zeigt sich, daß alle korrigierten Ergebnisse der BW-Methode M_{Fit}^{Korr} zu Pullverteilungen mit einem um null zentrierten Mittelwert ($Mean$) und einer mit eins verträglichen Breite ($Sigma$) führen. Somit entsprechen die Fehler aus den Likelihood-Anpassungen der BW-Funktion an die Massenverteilungen einem Vertrauensbereich von etwa 68%. Die erwarteten Fehler auf die Masse des W-Bosons für den Massenestiomator M_{2C} sind sowohl für $\mu\nu jj$- als auch für $e\nu jj$-Ereignisse kleiner als die für den Estimator M_{1C}.

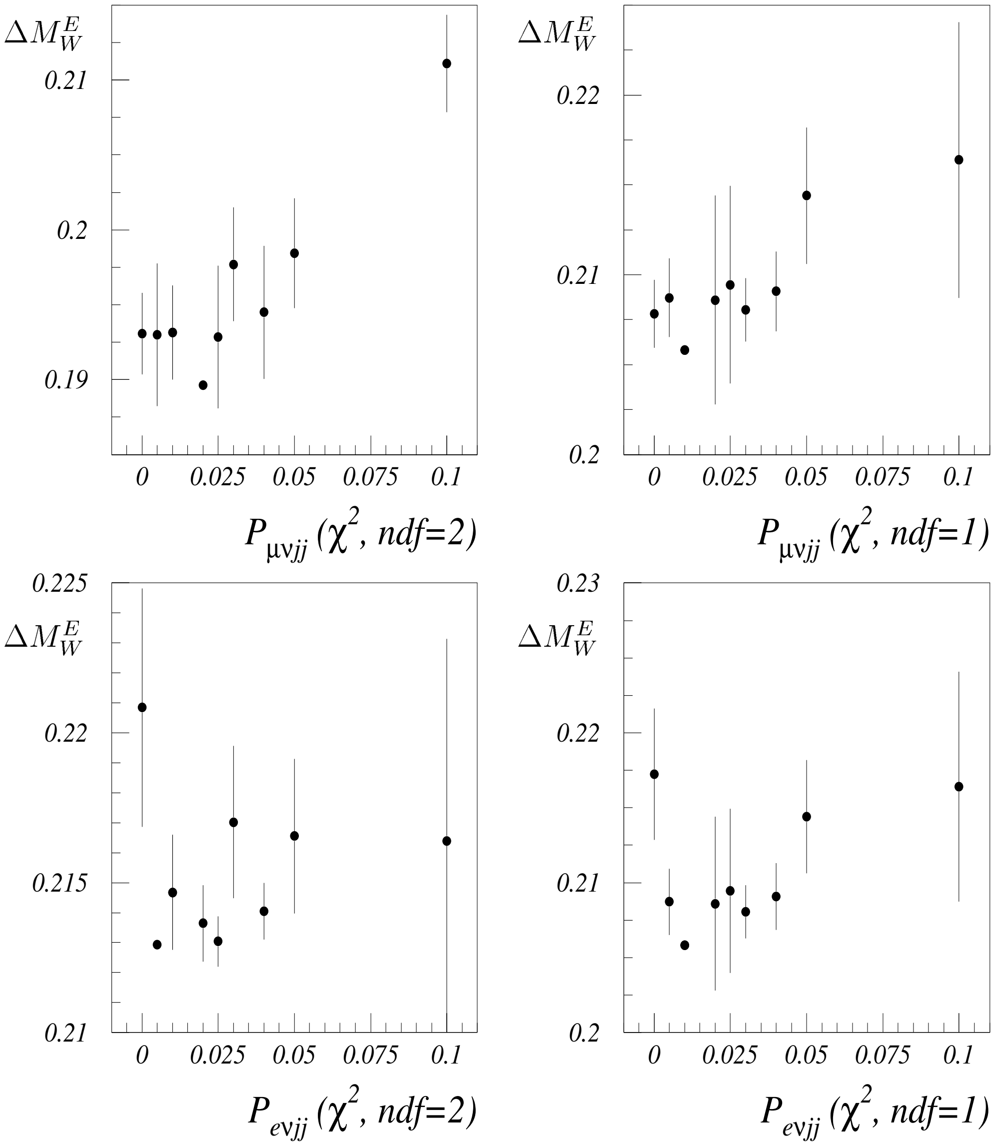


Abbildung 6.11: *Darstellung des erwarteten Fehlers ΔM_W^E als Funktion des Schnittes in der χ^2-Wahrscheinlichkeit. Auf der linken Seite sind, nach $\mu\nu jj$- und $e\nu jj$-Ereignissen getrennt, die erwarteten Fehler des Massenstimators M_{2C} aufgetragen. Analog dazu sind die Ergebnisse auf der rechten Seite dem Massenestimator M_{1C} zugeordnet. Alle Werte von ΔM_W^E sind in GeV/c^2 gegeben.*

Im Gegensatz zur BW-Methode sind Kalibrationskurven für die Umgewichtungs-Methode nur Konsistenztests und werden nicht zur Korrektur der angepaßten Masse M_{Fit} verwendet. Für $\mu\nu jj$-Ereignisse sind die Parameter m und b für beide Massenestimatoren innerhalb einer Standardabweichung mit ihren Erwartungswerten ($m = 1$, $b = 80.35\ GeV/c^2$) kompatibel.

Dies ist nicht der Fall für $e\nu jj$-Ereignisse, wo zwar m verträglich ist mit eins, aber b mit etwa 1.5 bis 2 Standardabweichungen von dem Erwartungswert abweicht. Da alle verfügbaren Simulationsereignisse zur Erstellung der Kalibrationskurve verwendet wurden, kann an dieser Stelle nicht geklärt werden, inwiefern diese Abweichung signifikant ist. Wie zu erwarten, pflanzt sich diese Abweichung auch auf den Mittelwert der Pullverteilungen fort. Allerdings sind alle Breiten mit eins verträglich und somit sind auch die Fehler auf M_W aus der Umgewichtungs-Methode verläßlich. Wie auch schon bei der BW-Methode, hat der Massenestimator M_{2C} auch hier die höchste Sensitivität auf M_W.

Estimator	Kalibrationskurve		$Pull(M_{Fit}^{Korr})$		$\Delta M_W^E \quad GeV/c^2$
$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	m	1.041 ± 0.050	$Mean$	0.013 ± 0.046	0.273
	b	80.37 ± 0.012	$Sigma$	1.040 ± 0.033	
$M_{2C}^{e\nu jj}$	m	0.945 ± 0.051	$Mean$	0.029 ± 0.051	0.280
	b	80.45 ± 0.014	$Sigma$	1.073 ± 0.037	
$M_{1C}^{\mu\nu jj}$	m	0.982 ± 0.054	$Mean$	0.015 ± 0.046	0.291
	b	80.37 ± 0.012	$Sigma$	1.049 ± 0.033	
$M_{1C}^{e\nu jj}$	m	0.964 ± 0.054	$Mean$	0.030 ± 0.049	0.291
	b	80.56 ± 0.014	$Sigma$	1.025 ± 0.035	

Tabelle 6.2: *Auflistung der quantitativen Tests für die BW-Methode. Für $\mu\nu jj$-Ereignisse wurden 525 und für $e\nu jj$-Ereignisse wurden 450 Pseudoexperimente zur Bestimmung der dargestellten Werte verwendet. Die Pullverteilungen und die erwarteten Fehler sind mit den korrigierten Werten M_{Fit}^{Korr} berechnet worden.*

Estimator	Kalibrationskurve		$Pull(M_{Fit})$		$\Delta M_W^E \quad GeV/c^2$
$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	m	1.023 ± 0.054	$Mean$	$-.014 \pm 0.042$	0.287
	b	80.36 ± 0.013	$Sigma$	0.955 ± 0.030	
$M_{2C}^{e\nu jj}$	m	0.971 ± 0.057	$Mean$	$-.061 \pm 0.047$	0.286
	b	80.37 ± 0.014	$Sigma$	0.998 ± 0.034	
$M_{1C}^{\mu\nu jj}$	m	0.984 ± 0.054	$Mean$	$-.026 \pm 0.044$	0.298
	b	80.36 ± 0.014	$Sigma$	1.013 ± 0.032	
$M_{1C}^{e\nu jj}$	m	0.983 ± 0.058	$Mean$	$-.066 \pm 0.047$	0.299
	b	80.38 ± 0.015	$Sigma$	0.986 ± 0.034	

Tabelle 6.3: *Auflistung der quantitativen Tests für die Umgewichtungs-Methode. Für $\mu\nu jj$-Ereignisse wurden 525 und für $e\nu jj$-Ereignisse wurden 450 Pseudoexperimente zur Bestimmung der dargestellten Werte verwendet.*

6.4.2 Durchführung der Messung

Nachdem nun alle relevanten Aspekte zur Bestimmung der Masse des W-Bosons diskutiert wurden, können die in den letzten Abschnitten vorgestellten Methoden auf die Daten bei $\sqrt{s} = 183\ GeV$ angewendet werden. Nach der Selektion stehen 105 $\mu\nu jj$- und 130 $e\nu jj$-Kandidaten (siehe Abschnitt 4.3) der Massenanalyse zur Verfügung. Der zusätzliche Schnitt in der χ^2-Wahrscheinlichkeit $P(\chi^2, ndf) > 0.02$ sowie die Bedingung, daß nur Ereignisse mit Massen im Bereich von $[74, 91.5]\ GeV/c^2$ betrachtet werden, haben zur Folge, daß sich die Zahl der Ereignisse reduziert.

In Tabelle 6.4 sind sowohl die Anzahl der verwendeten Ereignisse N_{Dat} als auch die Ergebnisse der Anpassungen an die Datenverteilungen aufgeführt. Eine Darstellung der Massenverteilungen für die Datenergebnisse findet sich in Abbildung 6.12. Wie auch schon die erwarteten Fehler aus den Tabellen 6.2 und 6.3 prognostizieren, ergibt sich der kleinste Fehler auf die Masse des W-Bosons für die Anpassung der BW-Funktion an die Massenverteilung des Estimators M_{2C}.

Die unterschiedliche Sensitivität von $e\nu jj$- und $\mu\nu jj$-Ereignissen auf M_W kann durch die statistische Fluktuation der Datenmenge erklärt werden. Nach der Selektion wird mit 122 $e\nu jj$- und 119 $\mu\nu jj$-Ereignissen gerechnet (siehe Tabelle 4.3). Somit werden mehr als $e\nu jj$-Ereignisse und weniger $\mu\nu jj$-Ereignissen als erwartet in den Daten beobachtet, was sich direkt auf den statistischen Fehler der Messung auswirkt.

Methode	Estimator	N_{Dat}	M_{Fit} GeV/c^2	M_{Fit}^{Korr} GeV/c^2
BW	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	79	80.023 ± 0.290	80.017 ± 0.291
Umgewichtung	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	79	80.027 ± 0.294	$----$
BW	$M_{2C}^{e\nu jj}$	91	80.454 ± 0.240	80.354 ± 0.254
Umgewichtung	$M_{2C}^{e\nu jj}$	91	80.406 ± 0.275	$----$
BW	$M_{1C}^{\mu\nu jj}$	91	80.232 ± 0.286	80.108 ± 0.291
Umgewichtung	$M_{1C}^{\mu\nu jj}$	91	80.201 ± 0.297	$----$
BW	$M_{1C}^{e\nu jj}$	107	80.621 ± 0.262	80.413 ± 0.271
Umgewichtung	$M_{1C}^{e\nu jj}$	107	80.418 ± 0.280	$----$

Tabelle 6.4: *Auflistung der acht Ergebnisse, die aus den Daten extrahiert wurden. Die Massenwerte M_{Fit} für die BW-Methode sind entsprechend der Kalibrationskurve korrigiert worden.*

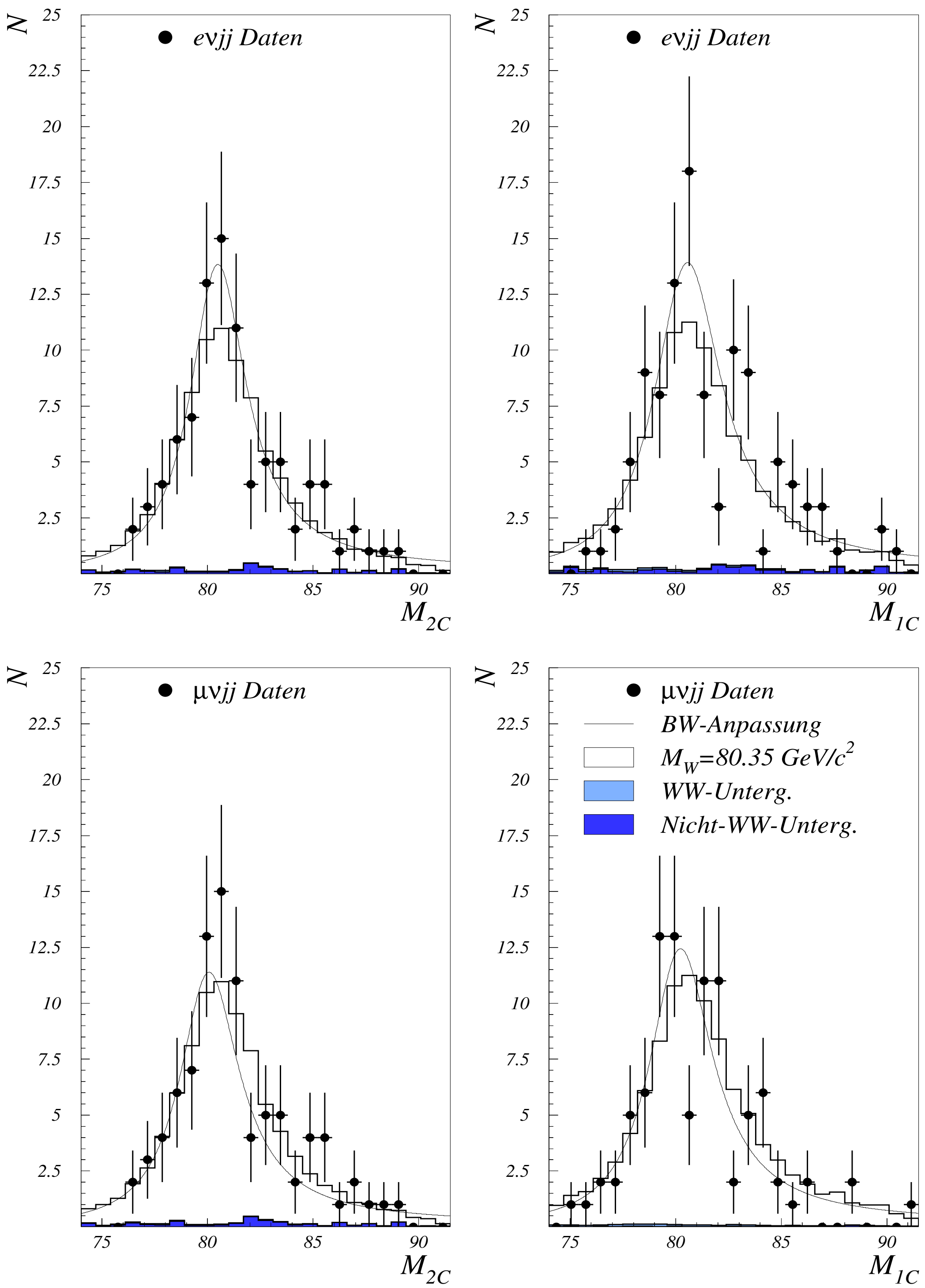


Abbildung 6.12: *Massenverteilung der Datenereignisse für die beiden Masssenestimatoren M_{1C} und M_{2C}. Als Referenz ist die Erwartung von Simulationsereignissen generiert bei M_{Ref} = 80.35 GeV/c^2 ebenfalls dargestellt. Die durchgezogene Kurve entspricht der besten Anpassung von BW-Funktionen an die Datenverteilungen. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

6.5 Vergleich der verschiedenen Messungen

Wie die erwarteten Fehler in den Tabellen 6.2 und 6.3 belegen, sind die Sensitivitäten der acht Messungen auf M_W annähernd gleich. Der Vergleich dieser Ergebnisse ist somit ein stringenter Test auf Konsistenz der Messungen. Prinzipiell können drei Kategorien von Konsistenzvergleichen definiert werden:

a) Vergleich von unkorrelierten Ereignismengen:

Unter diese Kategorie fallen alle Vergleiche von Messungen, die mit unkorrelierten Ereignismengen erstellt worden sind. Somit werden hier die Messungen basierend auf $\mu\nu jj$-Ereignissen mit den Ereignissen, die auf $e\nu jj$-Ereignissen zurückgehen, auf Kompatibilität untersucht. Für die beiden Anpassungsmethoden zweier unterschiedlicher Massenestimatoren ergeben sich die im folgenden aufgelisteten acht Vergleiche für diese Kategorie:

Vergleich: $M_{Fit}^{\mu\nu jj} - M_{Fit}^{e\nu jj}$	Δ_{Daten} GeV/c^2	$\Delta_{Erwartung}$ GeV/c^2
$M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}(UG,2C)$	-0.389	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}(UG,1C)$	-0.401	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}^{Korr}(BW,1C) - M_{Fit}(UG,1C)$	-0.310	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}^{Korr}(BW,1C) - M_{Fit}(UG,2C)$	0.205	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,2C)$	-0.327	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$	-0.386	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}(UG,1C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$	-0.212	$\approx \pm 0.4$
$M_{Fit}(UG,1C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,2C)$	-0.153	$\approx \pm 0.4$

,

wobei die Abkürzungen BW für BW-Methode und UG für Umgewichtungs-Methode stehen. Aufgrund der unkorrelierten Ereignismengen ergibt sich die Erwartung, für die in den Daten beobachtete Differenz der Massenwerte Δ_{Daten}, gerade aus den statistischen Fehlern der einzelnen Messungen:

$$\Delta_{Erwartung} = \sqrt{(\Delta M_{Fit}^{\mu\nu jj})^2 + (\Delta M_{Fit}^{e\nu jj})^2} \approx 0.4 \quad GeV/c^2 \quad .$$

Hierbei werden die Fehler auf die Einzelmessung mit etwa 0.280 GeV/c^2 approximiert. Alle acht Vergleiche zeigen, daß zumindest die Ergebnisse von unkorrelierten Ereignismengen miteinander kompatibel sind.

b) Vergleich von teilweise korrelierten Ereignismengen:

Aussagekräftiger als der in a) dargestellte Vergleich der unkorrelierten Ergebnisse, ist der Vergleich von teilweise korrelierten Ereignismengen. Die Ausgangsbasis für die acht Bestimmungen von M_W sind die selektierten 105 $\mu\nu jj$- bzw. die 130 $e\nu jj$-Ereignisse.

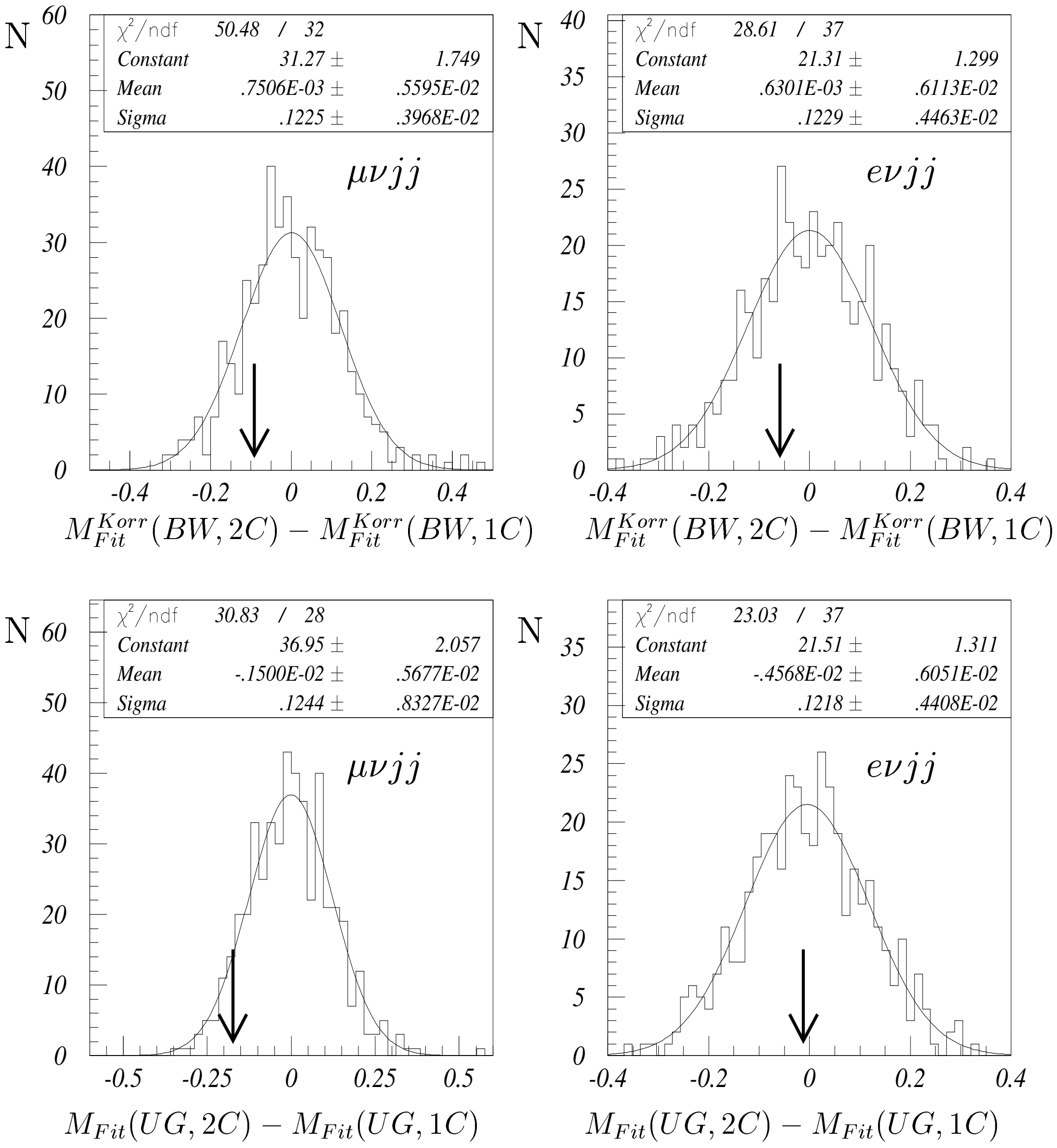


Abbildung 6.13: *Vergleich der auf teilweise korrelierten Ereignismengen beruhenden Ergebnisse. Der Pfeil stellt den jeweiligen Wert für die Differenz der Datenresultate dar. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

Die unterschiedlichen Massenestimatoren führen dazu, daß pro Kanal nicht die gleiche Anzahl von Ereignissen in das Massenfenster fallen und somit die Ereignismengen zur Messung von M_W für den *1C-Fit* und den *2C-Fit* nur teilweise korreliert sind. Bei einem Vergleich dieser Messungen muß die Korrelation der ermittelten Massenwerte berücksichtigt werden, welche prinzipiell aus den durchgeführten Pseudoexperimenten berechnet werden können. Aquivalent dazu ist aber auch ein direkter Vergleich von Δ_{Daten} mit der Vorhersage der Verteilung der Pseudoexperimente.

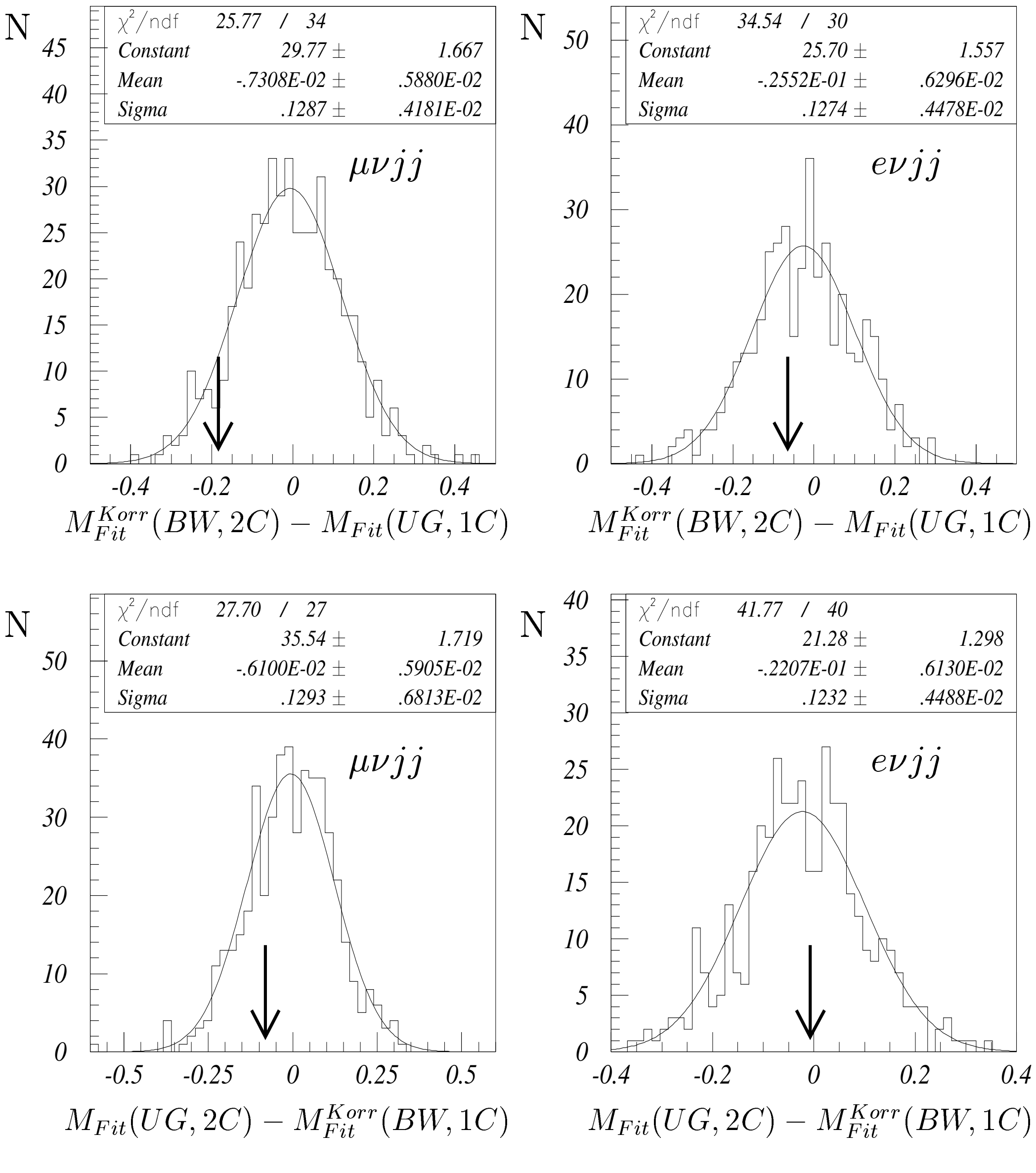


Abbildung 6.14: *Vergleich der auf teilweise korrelierten Ereignismengen beruhenden Ergebnisse. Der Pfeil stellt den jeweiligen Wert für die Differenz der Datenresultate dar. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

In den Abbildungen 6.13 und 6.14 sind die acht möglichen Konsistenztests für diese Kategorie dargestellt. Eine Zusammenfassung der quantitativen Resultate dieser Vergleiche findet sich in Tabelle 6.5. Im Vergleich zu den in a) durchgeführten Tests, fällt aufgrund der Korrelation der Methoden die erwartete Schwankungsbreite um 0.280 GeV/c^2 auf etwa 0.120 GeV/c^2. Trotz dieser höheren Sensitivität auf mögliche Inkonsistenzen, ist die Differenz der Datenergebnisse mit der Vorhersage der Pseudoexperimente vollständig kompatibel. Allerdings fällt auf, daß die Verteilungen der Differenzen $M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}(UG,1C)$ und $M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$ für $e\mu jj$-Ereignisse nicht um null zentriert sind (siehe Tabelle 6.5). Mit etwa drei Standardabweichungen ist diese Diskrepanz zwischen den Resultaten der Umgewichtungs-Methode und der BW-Methode im Monte Carlo noch nicht signifikant. Dennoch erscheint es ratsam mit einem noch stringenteren Test diesen Sachverhalt zu überprüfen.

Vergleich für $\mu\nu jj$-Ereignisse	Δ_{Daten}	$\Delta_{Erwartung}$		$Diff$
$M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$	-0.091	$Mean$	$-.0008 \pm 0.0056$	0.74
		$Sigma$	0.1225 ± 0.0040	
$M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}(UG,1C)$	-0.174	$Mean$	$-.0015 \pm 0.0057$	1.42
		$Sigma$	0.1244 ± 0.0083	
$M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}(UG,1C)$	-0.184	$Mean$	$-.0073 \pm 0.0059$	1.43
		$Sigma$	0.1287 ± 0.0042	
$M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$	-0.081	$Mean$	$-.0061 \pm 0.0059$	0.63
		$Sigma$	0.1293 ± 0.0068	
Vergleich für $e\nu jj$-Ereignisse	Δ_{Daten}	$\Delta_{Erwartung}$		$Diff$
$M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$	-0.059	$Mean$	$-.0006 \pm 0.0061$	0.48
		$Sigma$	0.1229 ± 0.0045	
$M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}(UG,1C)$	-0.012	$Mean$	$-.0046 \pm 0.0061$	0.10
		$Sigma$	0.1218 ± 0.0044	
$M_{Fit}^{Korr}(BW,2C) - M_{Fit}(UG,1C)$	-0.064	$Mean$	$-.0255 \pm 0.0063$	0.50
		$Sigma$	0.1274 ± 0.0045	
$M_{Fit}(UG,2C) - M_{Fit}^{Korr}(BW,1C)$	-0.007	$Mean$	$-.0221 \pm 0.0061$	0.05
		$Sigma$	0.1232 ± 0.0045	

Tabelle 6.5: *Auflistung der acht Vergleiche von teilweise korrelierten Methoden. Der Wert $Diff$ gibt an wieviele Standardabweichungen die Differenz der Datenergebnisse Δ_{Daten} von der Vorhersage der Pseudoexperimente entfernt ist. Die Breite und der Mittelwert der Verteilung von $\Delta_{Erwartung}$ wurden mit der Anpassung einer Gauß-Funktion ermittelt. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

c) <u>Vergleich vollständig korrelierter Ereignismengen:</u>

Der aussagekräftigste Konsistenztest der acht Messungen basiert auf dem Vergleich von vollständig korrelierten Ereignismengen. Aufgrund der unterschiedlichen Anpassungsmethoden (BW,UG) sind die extrahierten Massenwerte nicht vollständig korreliert. Ein Vergleich der erlaubten Schwankungsbreite zweier Messungen mit der Differenz der assoziierten Datenergebnisse ist in Abbildung 6.15 zu sehen.

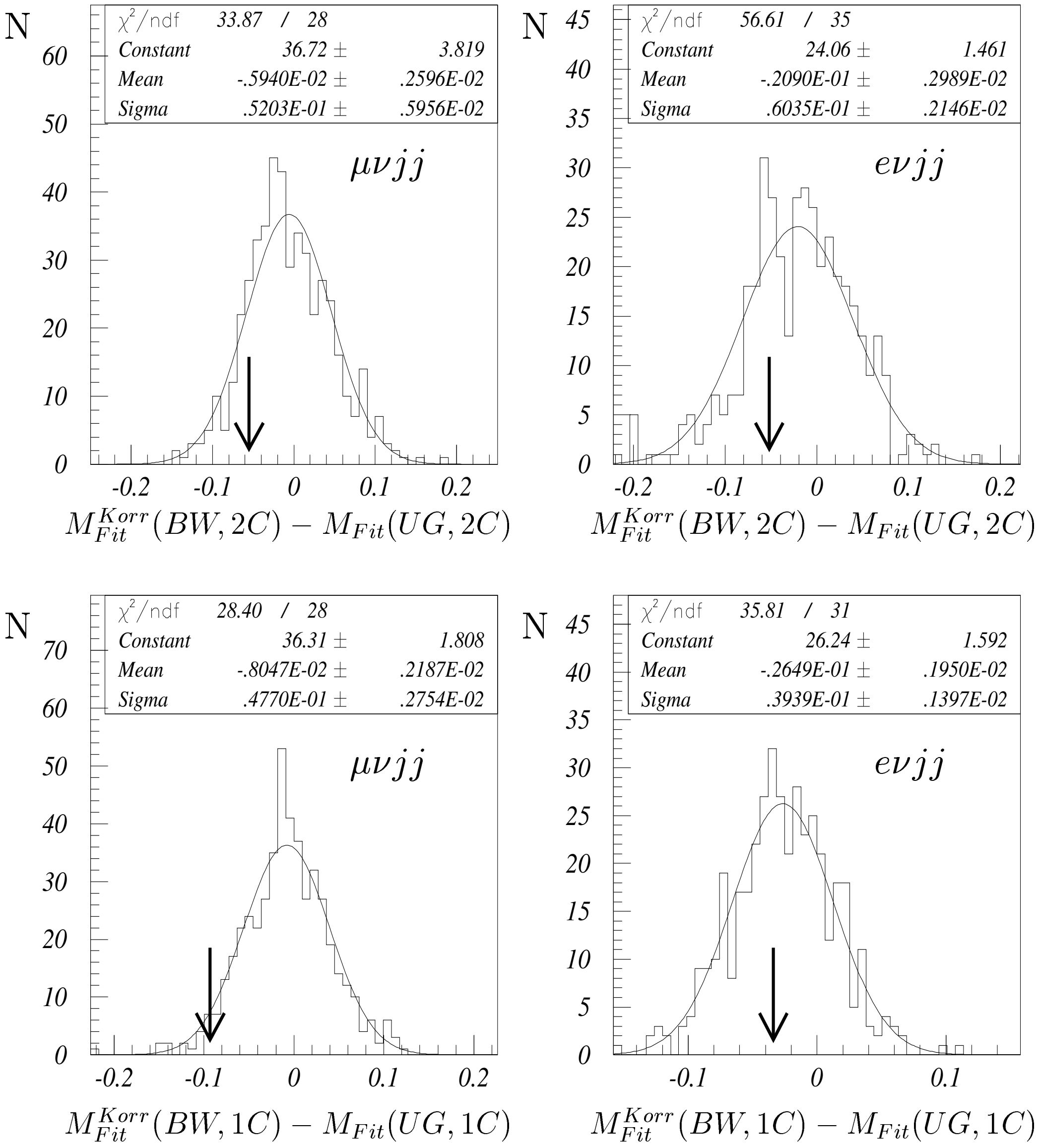


Abbildung 6.15: *Vergleich der auf vollständig korrelierten Ereignismengen beruhenden Ergebnisse. Der Pfeil stellt den jeweiligen Wert für die Differenz der Datenresultate dar. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

Die mit den Pseudoexperimenten ermittelte Schwankungsbreite bewegt sich in dem Bereich von 40 bis 60 MeV/c^2 und ist damit nur etwa halb so groß wie bei den in b) durchgeführten Tests. Eine quantitative Zusammenfassung der Testergebnisse ist in Tabelle 6.6 aufgeführt. Alle vier Meßwerte der Datenergebnisse sind innerhalb von weniger als zwei Standardabweichungen mit der Vorhersage der Pseudoexperimente

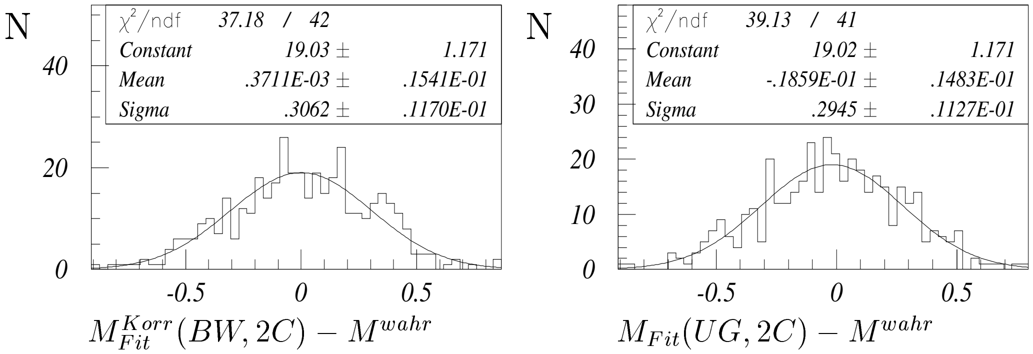


Abbildung 6.16: *Differenz von gemessener Masse und zugrundeliegender Masse des W-Bosons M^{wahr} für $e\nu jj$-Ereignisse. Rechts sind die Resultate der BW-Methode, links die der Umgewichtungs-Methode dargestellt. Zur Erstellung der Verteilung wurden 450 Pseudoexperimente verwendet. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

kompatibel. Allerdings bestätigt dieser stringente Test die in b) bereits beobachtete Evidenz, daß für $e\nu jj$-Ereignisse die Messungen der Umgewichtungs-Methode nicht mit denen der BW-Methode übereinstimmen. Mit etwa 10 Standardabweichungen ist die Differenz $\Delta_{Erwartung}$ in ihrem Mittelwert signifikant von null entfernt. Dies hat zur Folge, daß die Umgewichtungs-Methode und die BW-Methode selbst für Simulationsereignisse nicht die gleiche zugrundeliegende Masse messen.

Vergleich für $\mu\nu jj$-Ereignisse	Δ_{Daten}	$\Delta_{Erwartung}$		$Diff$
$M_{Fit}^{Korr}(BW, 2C) - M_{Fit}(UG, 2C)$	-0.055	$Mean$	$-.0059 \pm 0.0026$	1.06
		$Sigma$	0.052 ± 0.0059	
$M_{Fit}^{Korr}(BW, 1C) - M_{Fit}(UG, 1C)$	-0.093	$Mean$	$-.0080 \pm 0.0022$	1.93
		$Sigma$	0.048 ± 0.0026	
Vergleich für $e\nu jj$-Ereignisse	Δ_{Daten}	$\Delta_{Erwartung}$		$Diff$
$M_{Fit}^{Korr}(BW, 2C) - M_{Fit}(UG, 2C)$	-0.052	$Mean$	$-.0209 \pm 0.0030$	0.87
		$Sigma$	0.060 ± 0.0021	
$M_{Fit}^{Korr}(BW, 1C) - M_{Fit}(UG, 1C)$	-0.034	$Mean$	$-.0265 \pm 0.0020$	0.87
		$Sigma$	0.039 ± 0.0014	

Tabelle 6.6: *Auflistung der vier Vergleiche basierend auf vollständig korrelierten Ereignismengen. Der Wert $Diff$ gibt an, wieviele Standardabweichungen die Differenz der Datenergebnisse Δ_{Daten} von der Vorhersage der Pseudoexperimente entfernt ist. Die Breite und der Mittelwert der Verteilung von $\Delta_{Erwartung}$ wurde mit der Anpassung einer Gauß-Funktion ermittelt. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

Es bleibt nun zu klären, warum die Resultate für $e\nu jj$-Ereignisse der Umgewichtungs-Methode nicht mit denen der BW-Methode übereinstimmen. In Abbildung 6.16 ist die Differenz von gemessener Masse und zugrundeliegender Masse für die Pseudoexperimente dargestellt. Sowohl

Methode	Estimator	N_{Dat}	M_{Fit} GeV/c^2	M_{Fit}^{Korr} GeV/c^2
BW	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	79	80.023 ± 0.290	$\mathbf{80.017 \pm 0.291}$
Umgewichtung	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	79	$\mathbf{80.027 \pm 0.294}$	80.068 ± 0.295
BW	$M_{2C}^{e\nu jj}$	91	80.454 ± 0.240	$\mathbf{80.354 \pm 0.254}$
Umgewichtung	$M_{2C}^{e\nu jj}$	91	80.406 ± 0.275	$\mathbf{80.387 \pm 0.275}$
BW	$M_{1C}^{\mu\nu jj}$	91	80.232 ± 0.286	$\mathbf{80.108 \pm 0.291}$
Umgewichtung	$M_{1C}^{\mu\nu jj}$	91	$\mathbf{80.201 \pm 0.297}$	80.188 ± 302
BW	$M_{1C}^{e\nu jj}$	107	80.621 ± 0.262	$\mathbf{80.413 \pm 0.271}$
Umgewichtung	$M_{1C}^{e\nu jj}$	107	80.418 ± 0.280	$\mathbf{80.418 \pm 0.280}$

Tabelle 6.7: *Auflistung der Ergebnisse, die aus den Daten extrahiert wurden. Die hervorgehobenen Resultate stellen die Endergebnisse der acht Messungen dar.*

für die BW-Methode als auch für die Umgewichtungs-Methode sind diese Differenzen mit dem Mittelwert von null verträglich. Somit reicht die zur Verfügung stehende Anzahl von Simulationsereignissen nicht aus, um festzustellen, ob die Methoden miteinander kompatibel sind. Erst die Differenz der Verteilungen bringt also die Inkompatibilität der beiden Analysen ans Licht. Auf den ersten Blick mag es erstaunlich wirken, daß die Differenz der Verteilungen mehr Information enthält als dies für die einzelnen Verteilungen der Fall ist. Wird allerdings berücksichtigt, daß beide Verteilungen aufgrund der gleichen verwendeten Ereignismengen hochgradig miteinander korreliert sind, so ist die zusätzliche Information in der Differenz verständlich. Leider kann mit der Differenz alleine nicht festgestellt werden, welche der beiden Methoden nicht die zugrundeliegende Masse wiedergibt. Allerdings gibt sowohl die Abweichung der Kalibrationskurven der Umgewichtungs-Methode von ihren Idealwerten sowie die dazugehörigen, nicht ganz um null zentrierten Pullverteilungen (siehe Abbildungen 6.23 und 6.25), die Evidenz für ein Versagen der Umgewichtungs-Methode an. Für gewöhnlich sind Kalibrationskurven für die Umgewichtungs-Methode nur eine Konsistenzüberprüfung und werden nicht wie bei der BW-Methode zur Korrektur der gemessenen Resultate verwendet. Diese Vorgehensweise ist nur dann angebracht, wenn alle im Monte Carlo enthaltenen Effekte auch korrekt in die umgewichteten Spektren eingebracht worden sind. Da die in b) und c) durchgeführten Tests keine signifikanten Abweichungen der vier Messungen für $\mu\nu jj$-Ereignisse ergeben haben, muß somit nach Effekten gesucht werden, die spezifisch für $e\nu jj$-Ereignisse sind. Diese Einschränkung reduziert die möglichen Fehlerquellen auf die unterschiedliche Behandlung der wahren Vierervektoren in Gleichung 6.7 für die beiden

Kanäle. Aufgrund der geringen Masse des Elektrons kommt es viel häufiger zu Abstrahlung von Photonen im Endzustand (FSR) als dies für Myonen der Fall ist. Um den wahren Viererimpuls der Leptonen und damit die wahre leptonische Masse des Simulationsereignisses zu ermitteln, müssen die FSR-Photonen berücksichtigt werden. Die technische Erzeugung von FSR-Photonen im Monte Carlo führt zu einer kleinen Ambiguität, die prinzipiell verschiedene Additionsmethoden von FSR-Photonen zu den Viererimpulsen der Leptonen erlauben. Diese unterschiedlichen Methoden führen allerdings zu nur sehr kleinen Unterschieden für die wahren Viererimpulse, welche die beobachtete Abweichung der Kalibrationskurven für $e\nu jj$-Ereignisse nicht erklären können. Auch weitere Untersuchungen haben bis jetzt noch keine befriedigende Erklärung für diesen Sachverhalt geliefert. Da nicht abschließend geklärt werden konnte, was die Ursache für die signifikante Differenz zwischen den Resultaten der BW-Methode und der Umgewichtungs-Methode für $e\nu jj$-Ereignisse ist, erscheint es ratsam, auch die Ergebnisse der Umgewichtungs-Methode für diesen Kanal entsprechend der aufgenommenen Kalibrationskurve zu korrigieren. Wie in Abbildung 6.17 dargestellt, sind nach dieser Korrektur die Resultate der Pseudoexperimente für die BW-Methode mit denen der Umgewichtungs-Methode vollständig kompatibel.

In Tabelle 6.7 sind die Endresultate der acht Messungen aufgelistet. Es bleibt abschließend für dieses Kapitel noch festzustellen, daß nach der im $e\nu jj$-Kanal durchgeführten Korrektur der Resultate der Umgewichtungs-Methode nun alle acht Messsungen miteinander konsistent sind. Es kann davon ausgegangen werden, daß sie alle eine unverzerrte Messung der zugrundeliegenden Masse des W-Bosons darstellen.

Für die im nächsten Kapitel durchgeführte Ermittlung der systematischen Fehler werden aufgrund der höheren Sensitivität auf M_W nur die Messungen mit dem Massenestimator M_{2C} betrachtet.

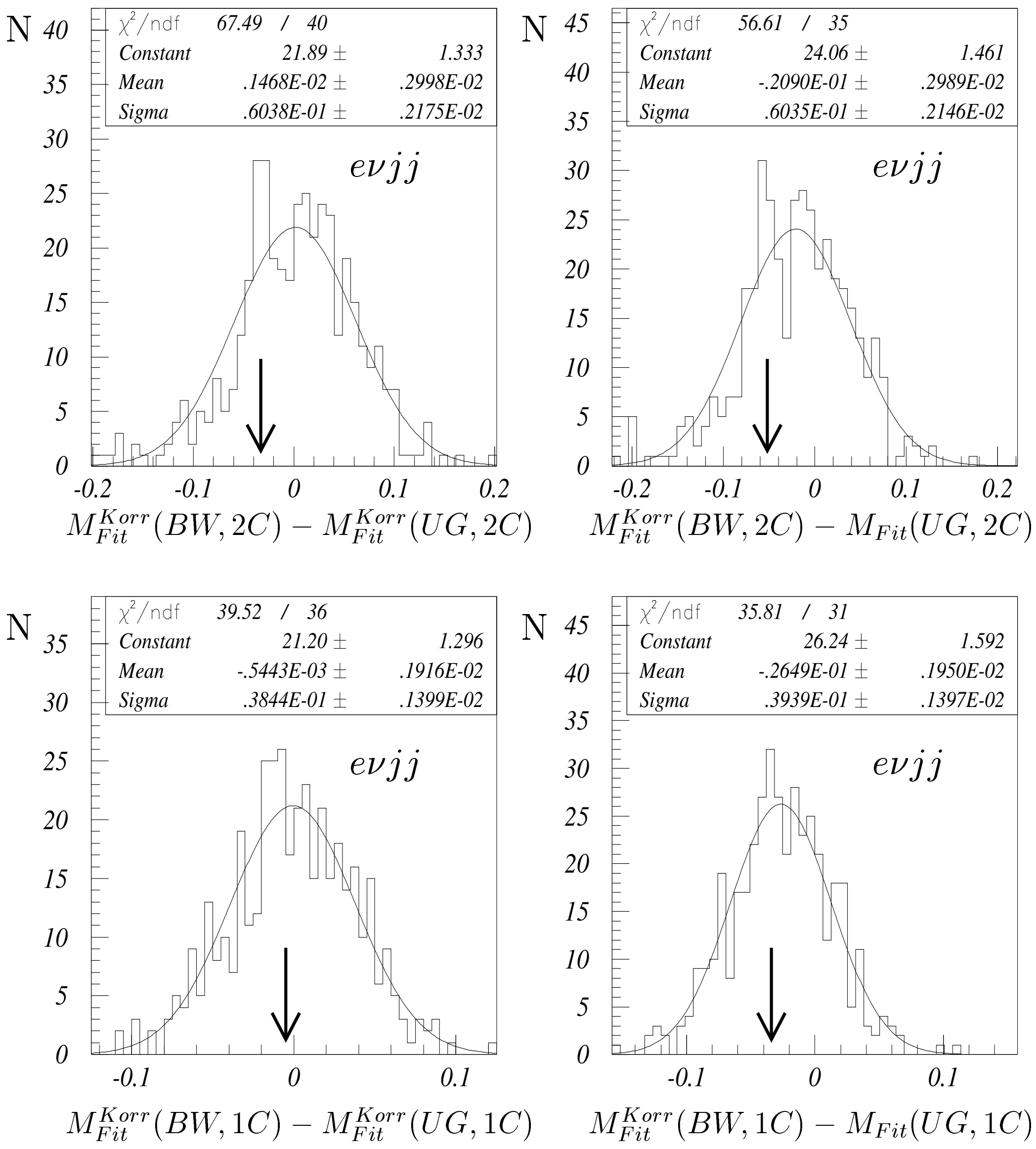
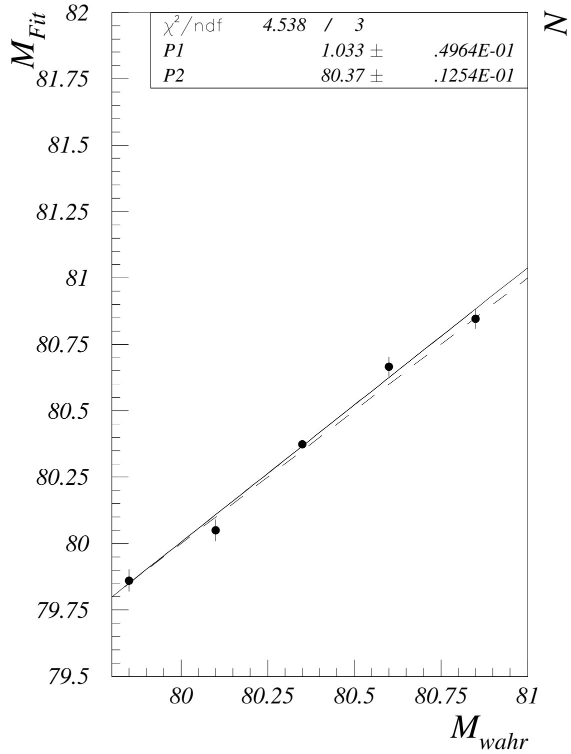
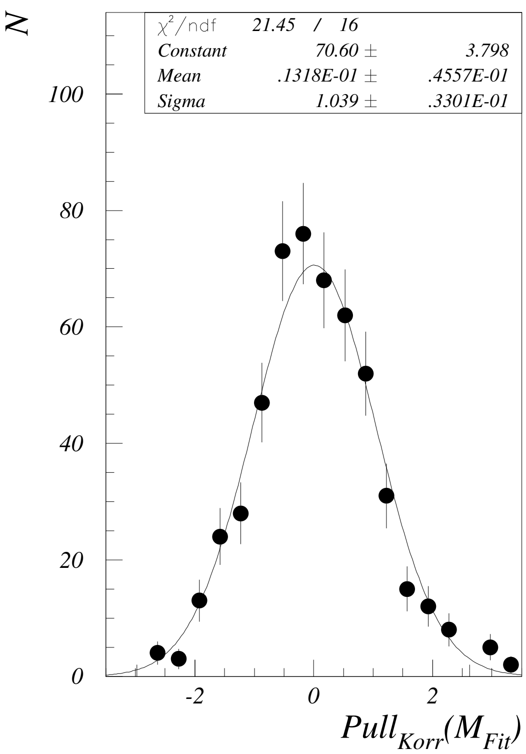
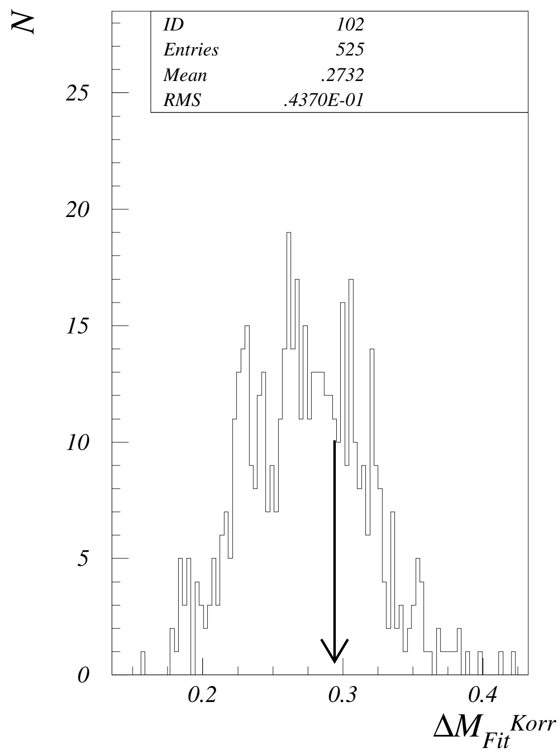


Abbildung 6.17: *Vergleich der auf vollständig korrelierten Ereignismengen beruhenden Ergebnisse für $e\nu jj$-Ereignisse. Die auf der linken Seite dargestellten Verteilungen sind mit den entsprechend der Kalibrationskurve korrigierten Ergebnissen der Umgewichtungs-Methode $M_{Fit}^{Korr}(UG,xC)$ erzeugt worden. Der Pfeil stellt den jeweiligen Wert für die Differenz der Datenresultate dar. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*







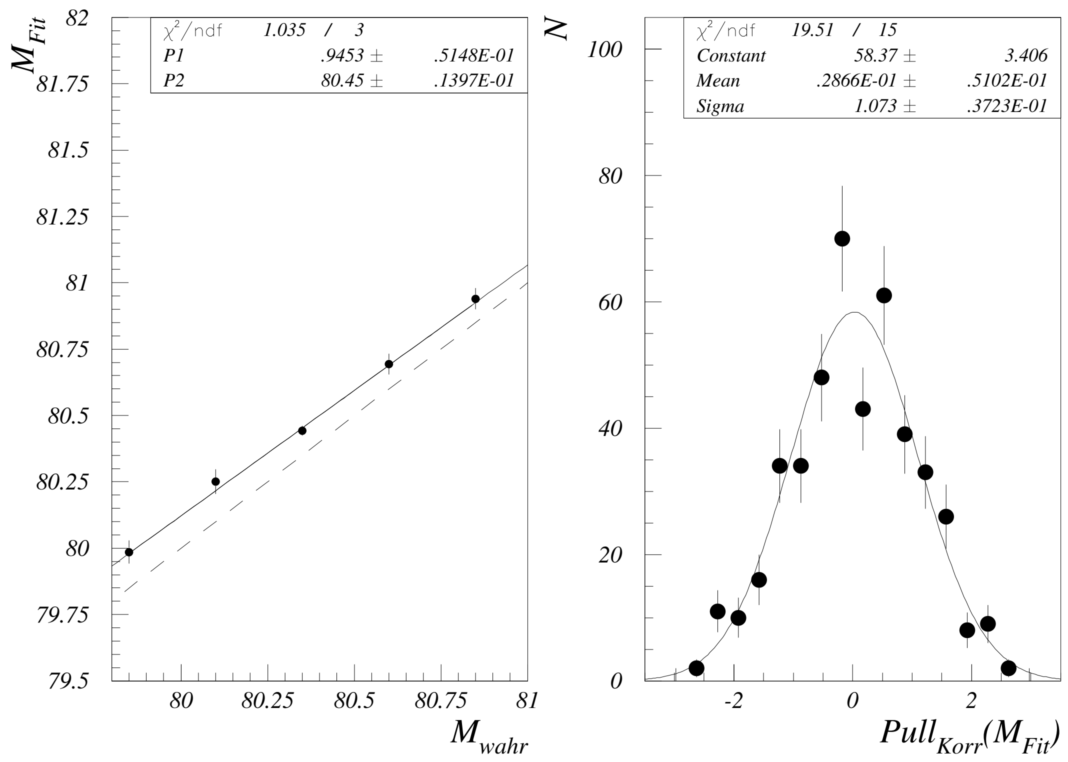
<u>M_{2C}-Resultat für $\mu\nu jj$-Ereignisse:</u>

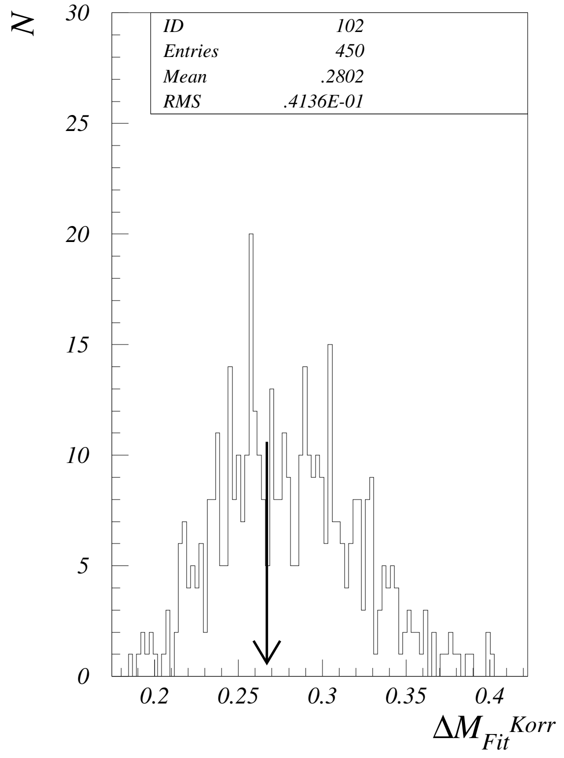
$N_{Dat} = 79$

$M_{Fit} = 80.023 \pm 0.290$

$M_{Fit}^{Korr} = 80.017 \pm 0.291$

Abbildung 6.18: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der BW-Methode und dem Massenestimator M_{2C} erzielten Ergebnisse von $\mu\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*





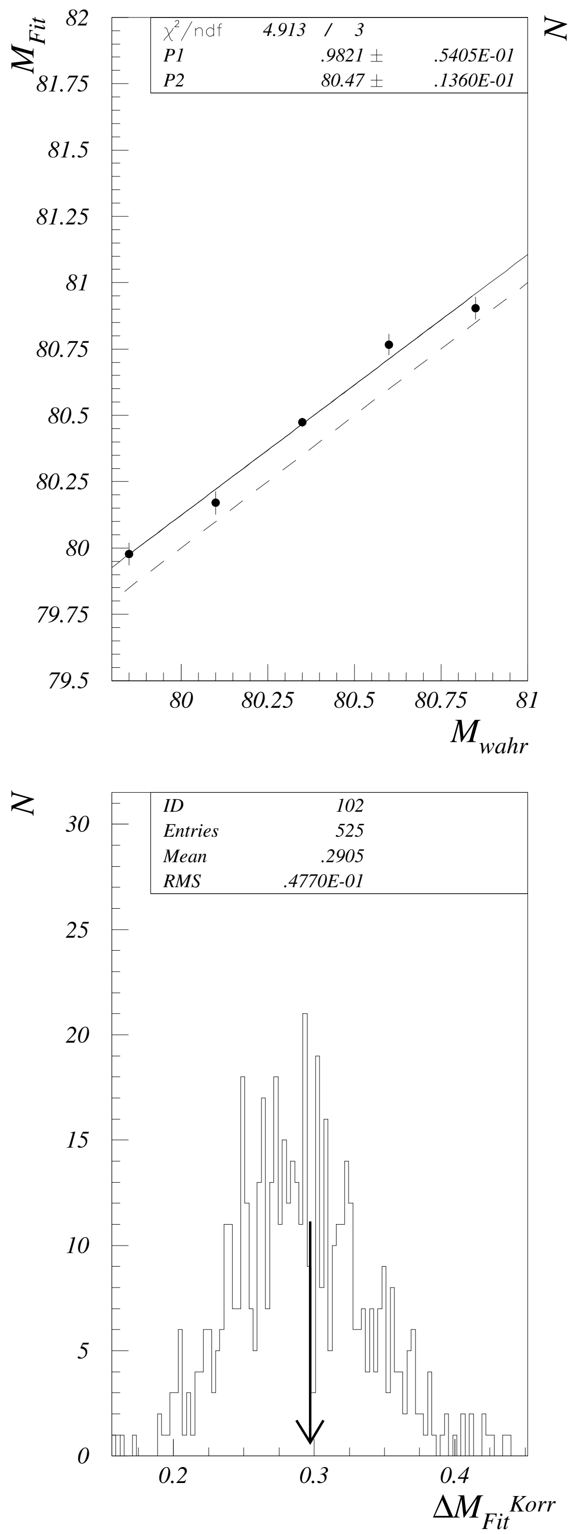
M_{2C}-Resultat für $e\nu jj$-Ereignisse:

$N_{Dat} = 91$

$M_{Fit} = 80.454 \pm 0.240$

$M_{Fit}^{Korr} = 80.354 \pm 0.254$

Abbildung 6.19: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der BW-Methode und dem Massenestimator M_{2C} erzielten Ergebnisse von $e\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*



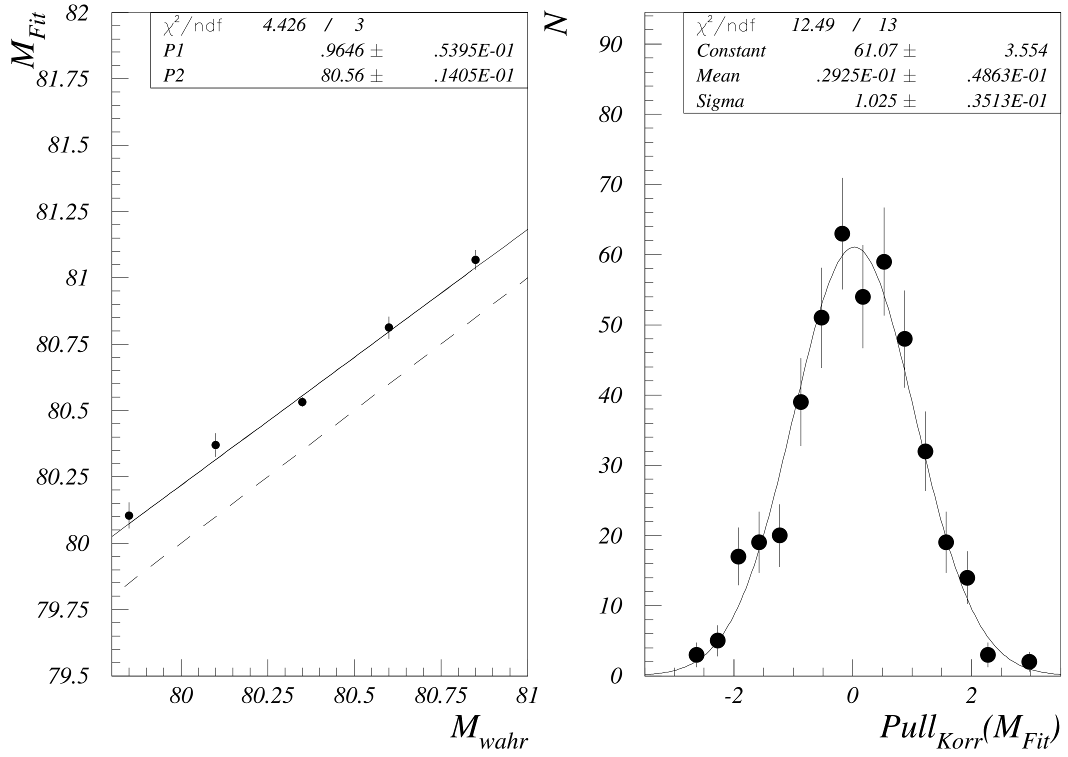
M_{1C}-Resultat für $\mu\nu jj$-Ereignisse:

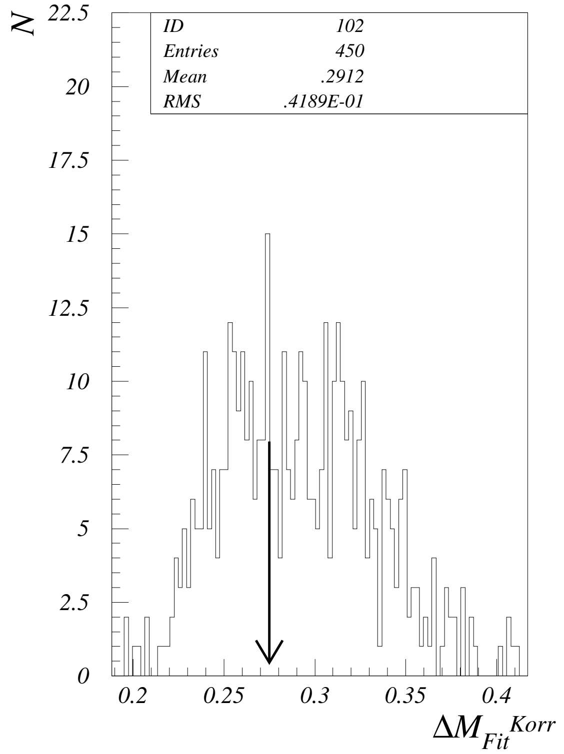
$N_{Dat} = 91$

$M_{Fit} = 80.232 \pm 0.286$

$M_{Fit}^{Korr} = 80.108 \pm 0.291$

Abbildung 6.20: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der BW-Methode und dem Massenestimator M_{1C} erzielten Ergebnisse von $\mu\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*





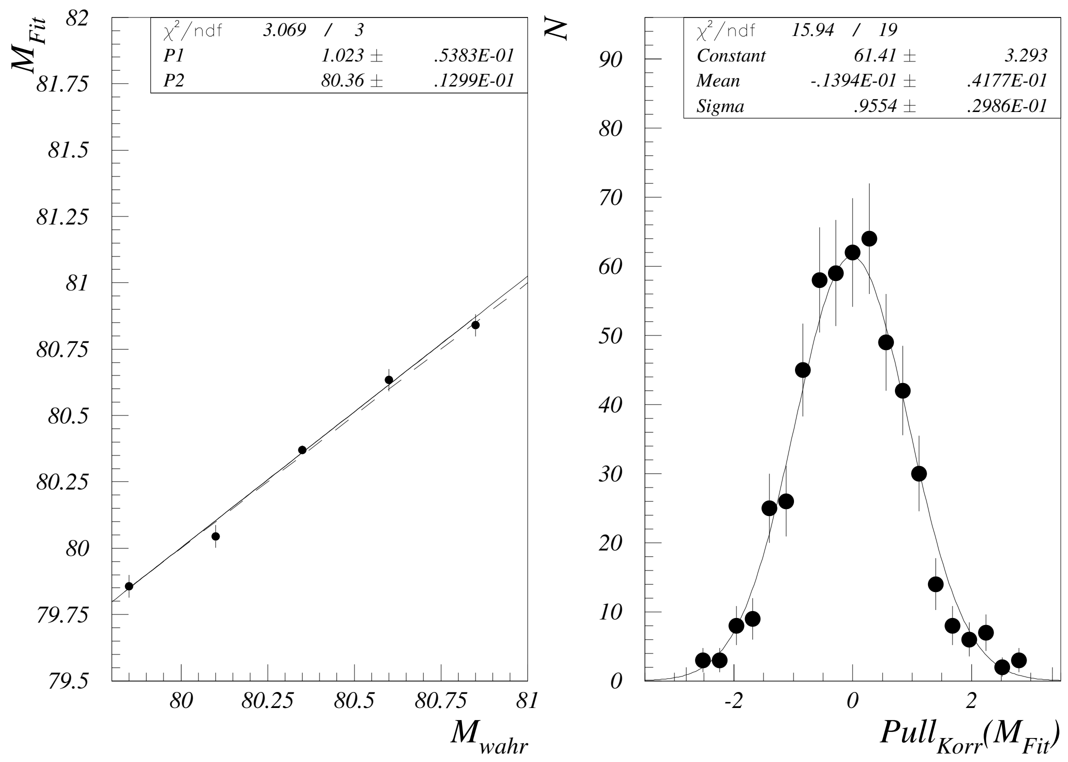
<u>M_{1C}-Resultat für $e\nu jj$-Ereignisse:</u>

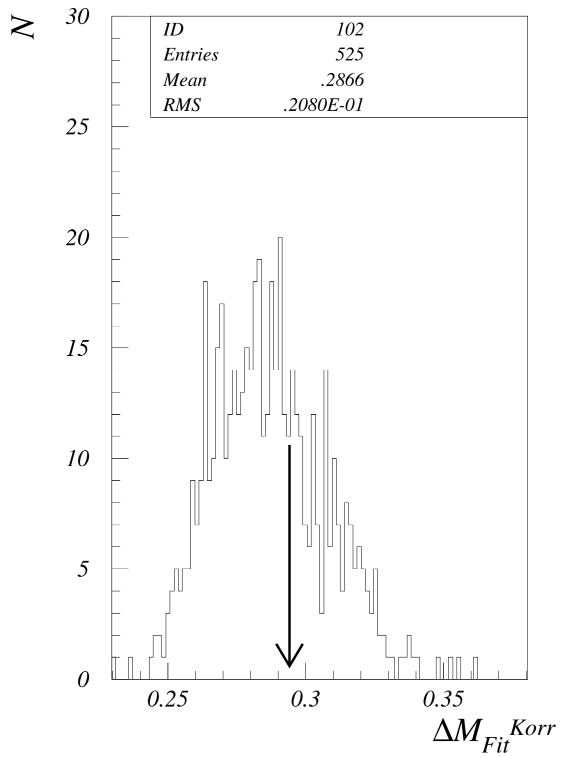
$N_{Dat} = 107$

$M_{Fit} = 80.621 \pm 0.262$

$M_{Fit}^{Korr} = 80.313 \pm 0.271$

Abbildung 6.21: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der BW-Methode und dem Massenestimator M_{1C} erzielten Ergebnisse von $e\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*



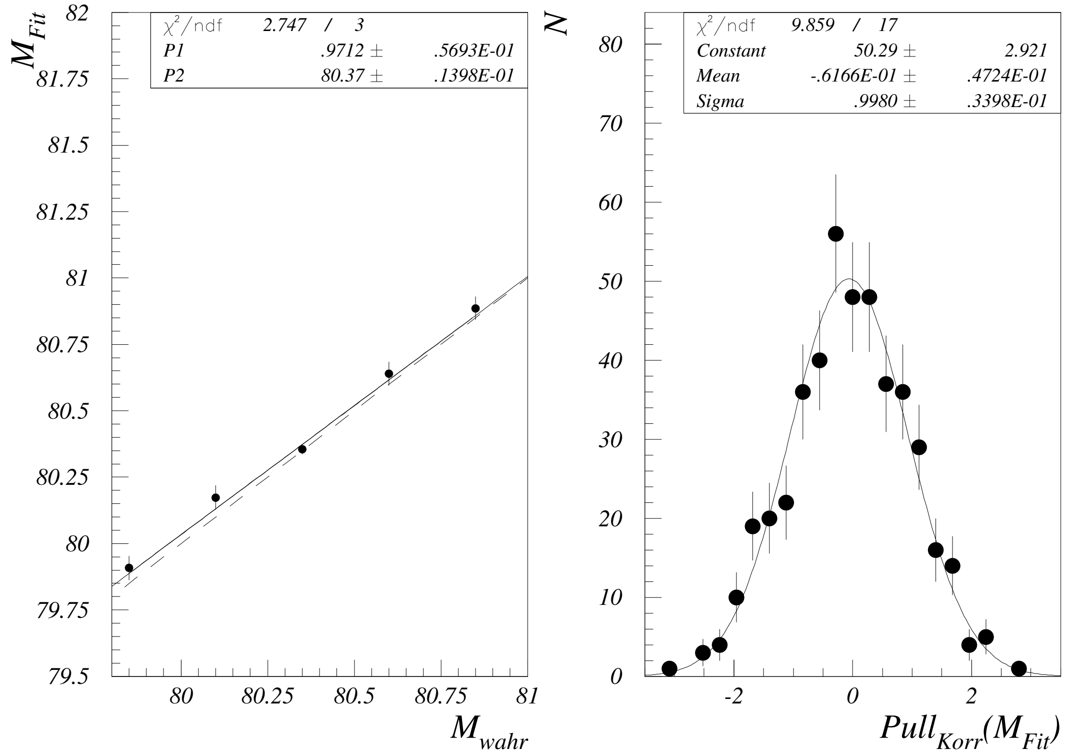


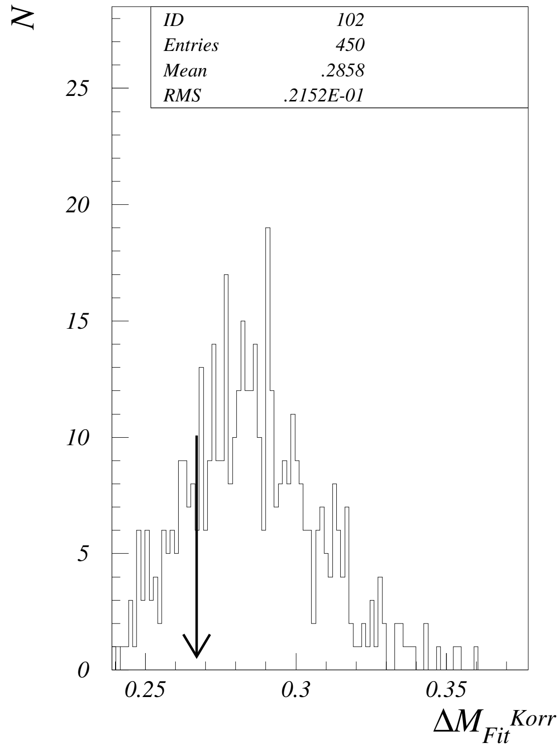
M_{2C}-Resultat für $\mu\nu jj$-Ereignisse:

$N_{Dat} = 79$

$M_{Fit} = 80.072 \pm 0.294$

Abbildung 6.22: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der UG-Methode und dem Massenestimator M_{2C} erzielten Ergebnisse von $\mu\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*





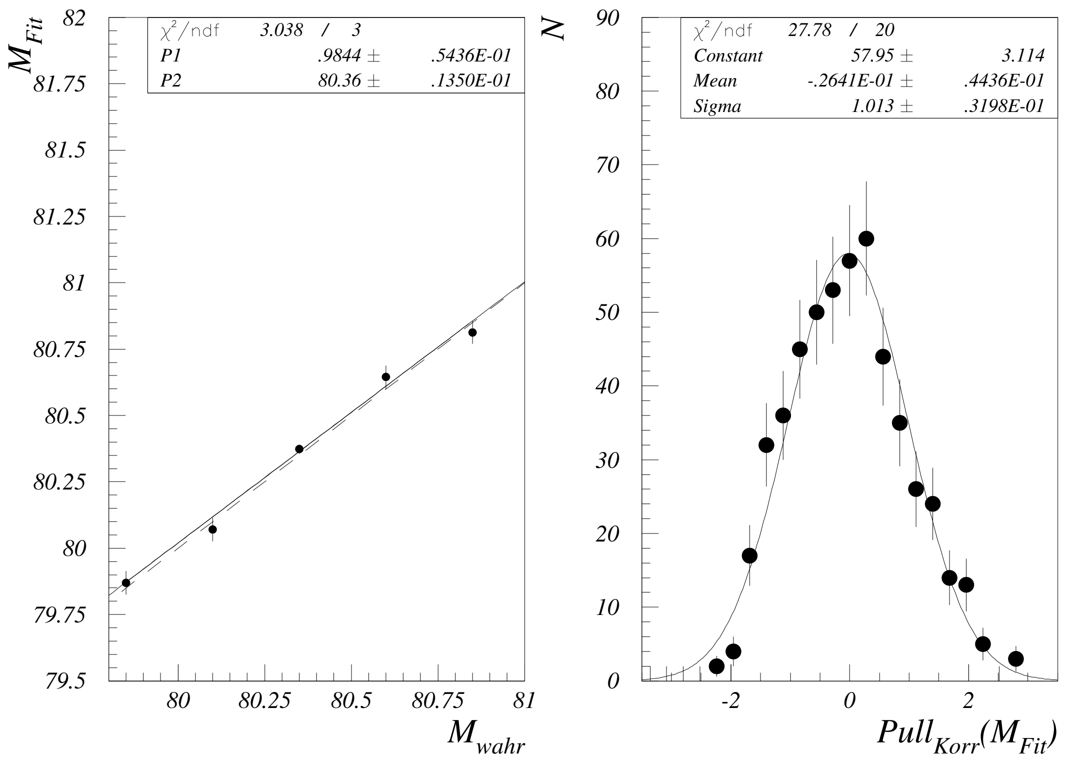
M_{2C}-Resultat für $e\nu jj$-Ereignisse:

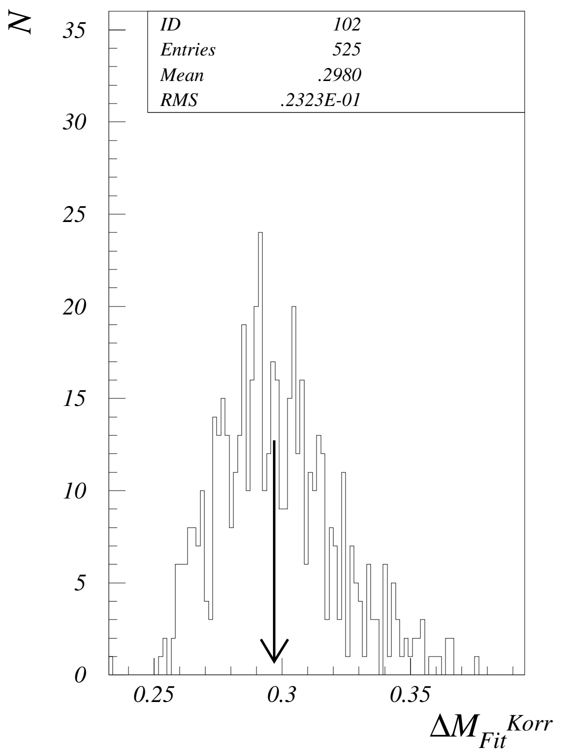
$N_{Dat} = 91$

$M_{Fit} = 80.406 \pm 0.267$

$(M_{Fit}^{Korr} = 80.387 \pm 0.275)$

Abbildung 6.23: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der UG-Methode und dem Massenestimator M_{2C} erzielten Ergebnisse von $e\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*



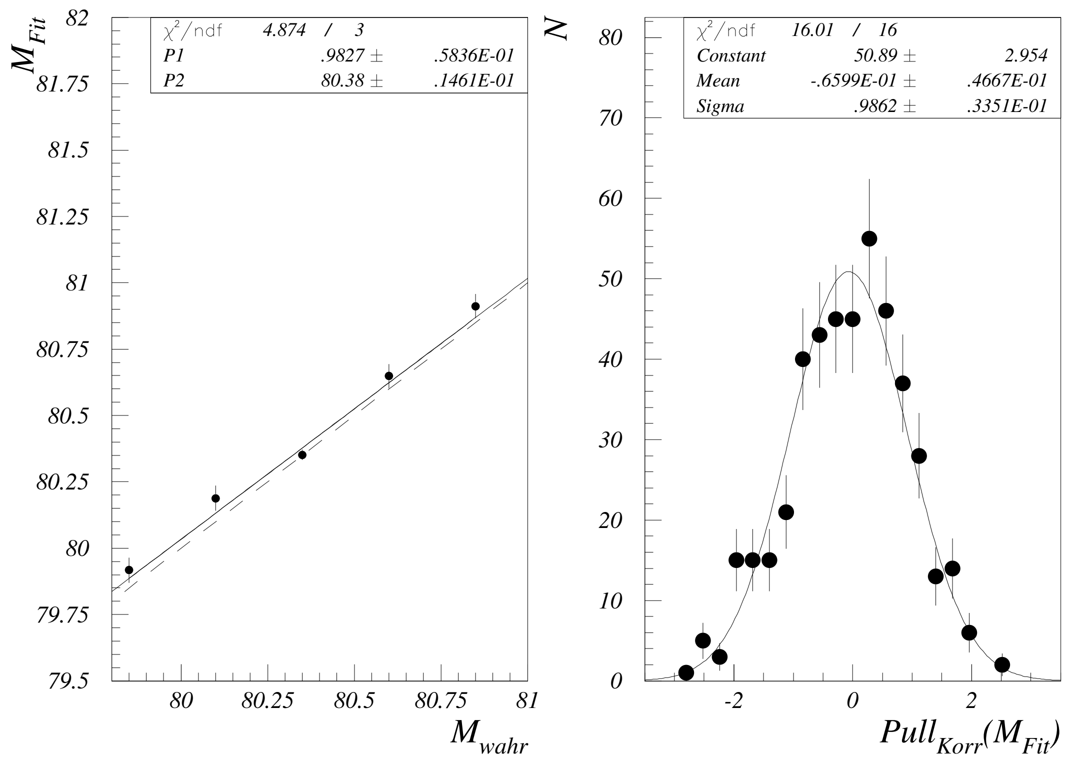


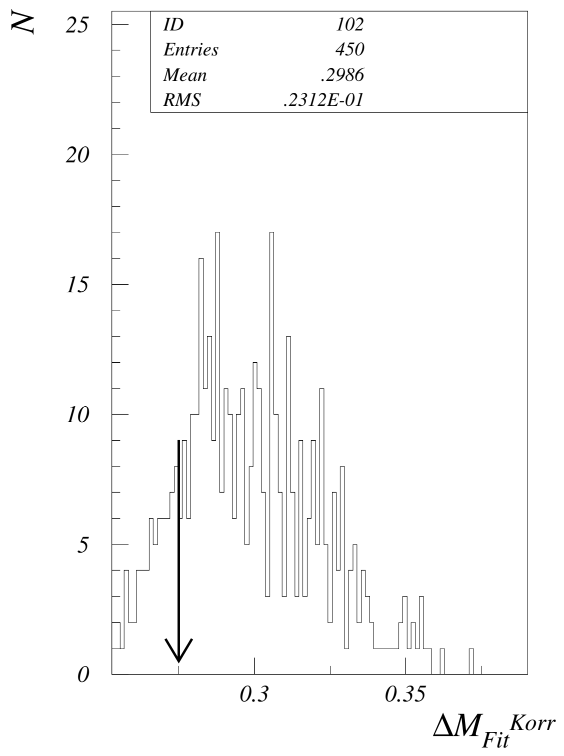
M_{1C}-Resultat für $\mu\nu jj$-Ereignisse:

$N_{Dat} = 91$

$M_{Fit} = 80.201 \pm 0.297$

Abbildung 6.24: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der BW-Methode und dem Massenestimator M_{1C} erzielten Ergebnisse von $\mu\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*





M_{1C}-Resultat für $e\nu jj$-Ereignisse:

$N_{Dat} = 107$

$M_{Fit} = 80.447 \pm 0.275$

$(M_{Fit}^{Korr} = 80.418 \pm 0.280)$

Abbildung 6.25: *Darstellung von Kalibrationskurve, Pull- und Fehlerverteilung für die mit der BW-Methode und dem Massenestimator M_{1C} erzielten Ergebnisse von $e\nu jj$-Ereignissen. Die aus den Daten extrahierten Resultate sind ebenfalls angegeben. Alle Massenwerte sind in GeV/c^2 gegeben.*

Kapitel 7

Systematische Effekte

Nachdem die Konsistenz der im vorangegangenen Kapitel beschriebenen acht Messungen von M_W gezeigt worden ist, befaßt sich dieses Kapitel nun mit der Untersuchung und Quantifizierung der systematischen Fehlerquellen auf die Massenmessungen. Mit dem Massenenstimator M_{2C}, den beiden Zerfallskanälen sowie zwei Anpassungsmethoden ergeben sich vier Messungen, die mit unterschiedlichen systematischen Fehlern behaftet sind.

7.1 Variation des Massenfensters

Sowohl für die BW-Methode als auch für die Umgewichtungs-Methode wurde zur Bestimmung von M_W ein Massenfenster von $[74, 91.5]$ GeV/c^2 verwendet. Damit die systematischen Effekte auf die Messungen durch diese Einschränkung des Massenbereiches evaluiert werden können, wird das Massenintervall variiert. Da das kinematische Limit des Massenestimators M_{2C} durch die halbe Schwerpunktenergie gegeben ist ($M_{2C}^{max} = 91.5$ GeV/c^2), wird nur die untere Grenze des Massenfensters verändert. Da die Extraktion von M_W für die BW-Methode und die Umgewichtungs-Methode unterschiedlich ist, muß für diese Untersuchung zwischen beiden Methoden unterschieden werden.

7.1.1 BW-Methode

Bei der Variation der unteren Grenze des Massenfensters muß bei der BW-Methode darauf geachtet werden, daß die Anpassung der BW-Funktion an die Massenverteilung eine akzeptable Beschreibung ermöglicht. Es zeigt sich, daß dies bis zu einer unteren Grenze von etwa 70 GeV/c^2 der Fall ist. In Abbildung 7.1 ist für die Massenfenster $[70, 91.5]$,$[71, 91.5]$,$[72, 91.5]$ und $[73, 91.5]$ GeV/c^2 ein Vergleich der in den Daten bestimmten Werten für M_W mit dem Standardwert dargestellt. Als Fehler für diese Differenzen wurden, analog zu den in Abschnitt 6.5 durchgeführten Konsistenztests, die mit Pseudoexperimenten ermittelten erwarteten Schwankungsbreiten verwendet. Für die im $\mu\nu jj$-Kanal angepaßten Massenwerte stimmt die Differenz zum Standardwert vollständig mit den Vorhersagen der Simulationsereignisse überein. Im Falle des $e\nu jj$-Kanal scheint es eine leichte Tendenz zu kleineren Werten von M_W für die betrachteten Massenfenster zu geben. Wird allerdings berücksichtigt, daß für die Bereiche $[70, 91.5]$,$[71, 91.5]$,$[72, 91.5]$ und $[73, 91.5]$ GeV/c^2 die Ereigniszahl konstant bei 93 liegt und sich erst für die Standardanalyse auf 91 reduziert, so kann dieser Trend als statistische Fluktuation angesehen werden.

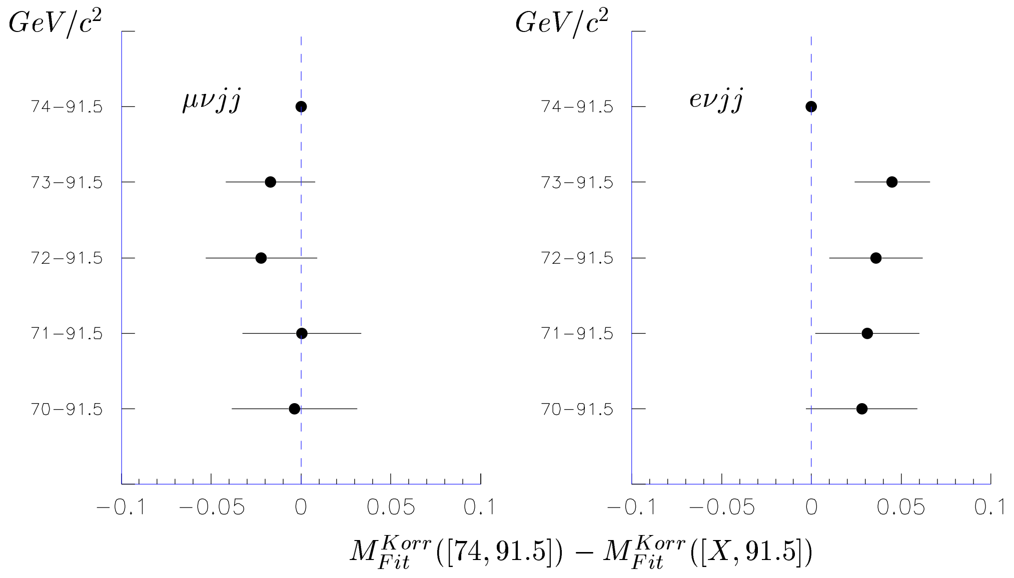


Abbildung 7.1: *Darstellung der mit der BW-Methode ermittelten Differenz* $M_{Fit}^{Korr}([74, 91.5]) - M_{Fit}^{Korr}([X, 91.5])$ *für die in den Daten selektierten* $\mu\nu jj$ *(rechts) und* $e\nu jj$*-Ereignisse (links), wobei* $X = 70, 71, 72$ *und* $X = 73$ GeV/c^2 *betrachtet wurden. Der Fehler auf die Differenz ist die erwartete Schwankungsbreite der Ergebnisse von Pseudoexperimenten.*

7.1.2 Umgewichtungs-Methode

Im Falle der Umgewichtungs-Methode muß ebenso wie bei der BW-Methode für alle Massenfenster die in Abschnitt 6.3 vorgestellte Analysekette vollständig durchgeführt werden. Es zeigt sich, daß die in den Bereichen $[70, 91.5]$,$[71, 91.5]$,$[72, 91.5]$ und $[73, 91.5]$ GeV/c^2 bestimmten Massenwerte mit dem Standardwert innerhalb der erlaubten Schwankungsbreite miteinander kompatibel sind. Somit sind alle durch die unterschiedlichen Massenfenster hervorgerufenen Differenzen zum Standardwert in den statistischen Fehlern der einzelnen Messungen enthalten. Wie bei der BW-Methode gibt es auch für die Umgewichtungs-Methode keinen Grund, einen systematischen Fehler aufgrund des Massenfensters auf M_W anzugeben.

7.2 Variation der Intervallbreite Δm_i

Ein weiterer wichtiger intrinsischer Parameter der beiden Methoden ist die Größe Δm_i mit der die Massenfenster äquidistant unterteilt werden. Für die Anpassung der analytischen BW-Funktion wurde Δm_i gerade so gewählt, daß eine Änderung dieser Größe von $\pm 10\%$ zu keiner Verschiebung des angepaßten Massenwertes führt. Somit ist Δm_i keine systematische Fehlerquelle für die BW-Methode.

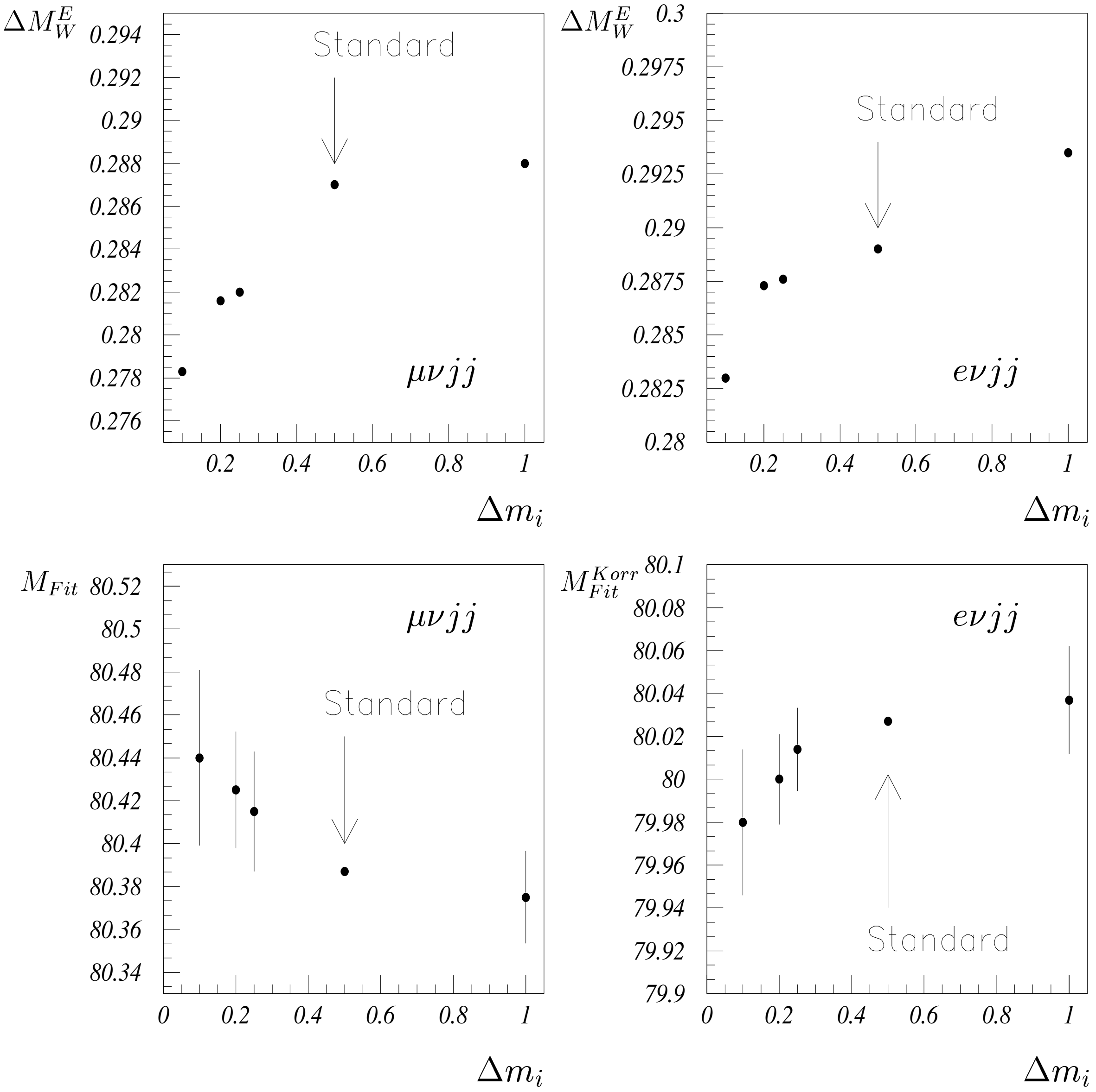


Abbildung 7.2: *Darstellung des erwarteten Fehlers M_W^E (oben) und der aus den Datenereignissen extrahierten Masse (unten) als Funktion von Δm_i. Der Pfeil bezeichnet die entsprechenden Werte für die Standardmessung.*

Aufgrund der begrenzten Anzahl von Simulationsereignissen muß für die Anpassung der Simulationsspektren an die Datenverteilungen Δm_i so gewählt werden, daß jedes einzelne Intervall der Referenzverteilung ausreichend mit Simulationsereignissen gefüllt ist. Aus diesem Grund wurde $\Delta m_i = 0.5\ GeV/c^2$ für die Umgewichtungs-Methode gewählt. Monte Carlo Studien belegen, daß unterhalb des Wertes $\Delta m_i = 0.1\ GeV/c^2$ die statistische Information pro

Intervall nicht mehr ausreicht, um die Umgewichtungs-Methode durchzuführen. Dieser Zusammenbruch der Methode manifestiert sich vor allem in einer Kalibrationskurve, die sowohl für $e\mu jj$- als auch $\mu\nu jj$-Ereignisse signifikant von ihren Idealwerten abweicht. In Abbildung 7.2 sind zum einen der erwartete Fehler ΔM_W^E und zum anderen die in den Daten gemessenen Massenwerte als Funktion von Δm_i aufgetragen. Wie zu erwarten, verringert sich für beide Kanäle der erwartete Fehler auf M_W. Allerdings gibt es für $\Delta m_i = 0.1\ GeV/c^2$ schon eine erste Evidenz, daß die Kalibrationskurve von ihren Idealwerten abweicht. Trotz des kleinen erwarteten Fehlers ist es somit sinnvoll, diesen Wert nicht als Standardwert zu verwenden. Die Streuung der bei verschiedenen Δm_i's bestimmten Datenwerte von M_W ist innerhalb des entkorrelierten Fehleranteils

$$\Delta(m_i - 0.5) = \sqrt{(\Delta M_{Fit})^2_{m_i} - (\Delta M_{Fit})^2_{0.5}} \quad ,$$

mit dem Standardwert verträglich. Die Variation der Meßwerte als Funktion von Δm_i kann daher auf die, im statistischen Fehler enthaltene, unterschiedliche Sensitivität auf M_W zurückgeführt werden. Eine Ableitung eines systematischen Fehlers für die Variation von Δm_i ist demzufolge nicht notwendig.

7.3 Fragmentation

Einer der wichtigsten Schritte in einer vollständigen Monte Carlo Simulation ist die Fragmentation der farbgeladenen Partonen zu farbneutralen Hadronen. Aufgrund der Aufteilung der Energie auf viele Hadronen, wird der Wert der starken Kopplungskonstanten α_s für diese Einzelprozesse so groß, daß keine sinnvolle Störungstheorie mehr durchgeführt werden kann. Die vorhandenen Hadronisierungsmodelle sind somit alle rein phänomenologischer Natur. Es hat sich bei LEP herausgestellt, daß vor allem zwei Modelle eine gute Beschreibung der Datenverteilungen erlauben. Eines davon ist das für diese Analyse standardmäßig verwendete LUND-Stringmodell, welches in JETSET seine technische Umsetzung findet. Das zweite Modell basiert auf einer sogenannten Clusterfragmentation und wird in dem Generator HERWIG [?] verwirklicht.

Zur Bestimmung des systematischen Fehlers aufgrund der unterschiedlichen Fragmentationsmodelle, wurden für beide Extraktionsmethoden eine Anpassung an die Massenverteilung von $50 \cdot 10^3$, eigens für diesen Zweck mit HERWIG generierten, WW-Ereignissen durchgeführt. Im Falle der BW-Methode wurden die in Tabelle 6.3 aufgelisteten Parameter der Kalibrationskurven zur Korrektur der angepaßten Massenwerte verwendet. Die der Umgewichtungs-Methode zugrundeliegende Referenzmenge von Simulationsereignissen wurde mit dem Generator KORALW, in dem die LUND-Stringfragmentation implementiert ist, erzeugt. Für beide Kanäle waren die so extrahierten Anpassungswerte innerhalb einer Standardabweichung mit der zugrundeliegenden Masse der mit HERWIG simulierten Ereignissen verträglich. Die statistische Aussagekraft der verfügbaren Simulationsereignisse reicht somit nicht aus, einen möglichen systematischen Unterschied der Fragmentationsmodelle zu manifestieren. Aus diesem Grund wird für alle vier Messungen der statistische Fehler der Anpassung von etwa $0.035\ GeV/c^2$ als systematischer Fehler auf die Ergebnisse angegeben. Hierbei handelt es sich um eine konservative Abschätzung, die mit einer größeren Anzahl von simulierten HERWIG-Ereignissen noch reduziert werden kann.

7.4 Kalibration der Kalorimeter

Die absolute Energiekalibration des elektromagnetischen und des hadronischen Kalorimeters ist bis auf eine relative Genaugigeit von 2% für HCAL und 0.9% für ECAL bekannt. Um zu bestimmen, inwieweit sich diese Unsicherheit auf die Massenmessung auswirkt, wurden für $50 \cdot 10^3$ Simulationsereignisse die Energiekalibrationen von ECAL und HCAL unabhängig voneinander um die entsprechenden Beträge nach oben und unten variiert. Nach der Anwendung der beiden Extraktionsmethoden auf die so modifizierten Monte Carlo Ereignissätze, wurde die Differenz der bestimmten Massenwerte als systematischer Fehler auf die Resultate angegeben, wobei die Beiträge der fehlerbehafteten ECAL- und HCAL-Kalibration unter Vernachläßigung ihrer Korrelation quadratisch addiert wurden. Für die einzelnen Methoden ergaben sich die in Tabelle 7.1 aufgeführten systematischen Unsicherheiten:

Methode	Estimator	ΔM_W^{sys} (GeV/c^2)
BW	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	± 0.015
BW	$M_{2C}^{e\nu jj}$	± 0.026
Umgewichtung	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	± 0.009
Umgewichtung	$M_{2C}^{e\nu jj}$	± 0.015

Tabelle 7.1: *Auflistung der systematischen Fehler aufgrund der Unsicherheiten in der ECAL- und HCAL-Kalibration.*

7.5 Ausrichtung des Detektors

Die relative Ausrichtung der Subdetektoren VDET, ITC und TPC hat einen entscheidenden Einfluß auf die Spurrekonstruktion. Aus diesem Grund wird nach jeder Datennahmeperiode mit Hilfe von $Z/\gamma \rightarrow \mu^+\mu^-$-Ereignissen die relative Ausrichtung der Subdetektoren untereinander gemessen und die sogenannten Sagitta-Korrekturen [**?**] berechnet. Um eine Abschätzung der durch diese Korrekturen hervorgerufenen systematischen Unsicherheiten auf M_W anzugeben, werden $50 \cdot 10^3$ Simulationsereignisse mit und ohne Sagitta-Korrekturen der vollen Analysekette unterworfen. Es zeigt sich, daß die Differenz der Anpassungswerte mit und ohne Korrekturen für alle Methoden zwischen 0.005-0.01 GeV/c^2 liegen.

7.6 Korrektur der Jetenergie

Die vor jeder Datennahmeperiode akkumulierte Statistik von e^+e^--Annihilationen wird nicht nur zur Bestimmung der Sagitta-Korrekturen verwendet. Die Reaktion $Z/\gamma \rightarrow q\bar{q}$ bietet die Möglichkeit, die im Monte Carlo implementierte Energieauflösung von Spuren und Energieflußobjekten direkt mit Datenereignissen zu vergleichen. Insbesondere ist dies für Jets von besonderer Bedeutung. In Abbildung 7.3 ist das Verhältnis der Jetenergie von Simulationsereignissen gegenüber der gemessenen Energie von Datenereignissen als Funktion des Winkels θ der Jets zur Strahlachse dargestellt. In der Vorwärtsregion des Detektors beträgt diese

Korrektur etwa 3% und fällt in der Zentralregion auf weniger als 1% ab. Die Variation dieser Korrekturen innerhalb ihrer statistischen Unsicherheit führt sowohl für die BW-Methode als auch für die Umgewichtungs-Methode zu einer maximalen systematischen Unsicherheit auf M_W von 0.01 GeV/c^2.

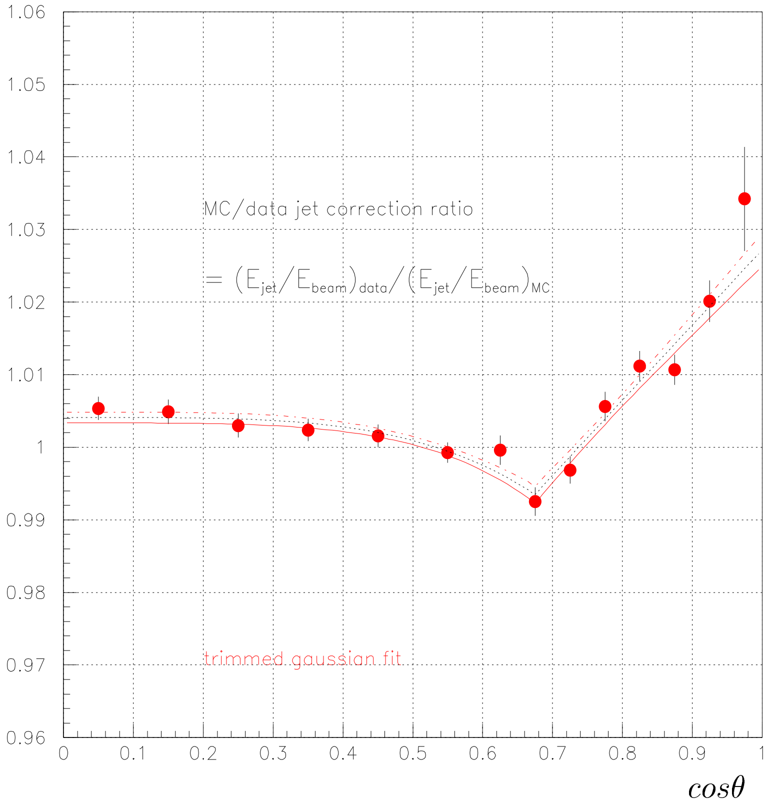


Abbildung 7.3: *Darstellung der Korrekturen der Jetenergie als Funktion von cosθ, wobei θ der Winkel des Jets zur Strahlachse ist. Bei cos$\theta \approx$0.7 befindet sich die Überlappregion des Zentral- und Vorwärtsbereichs. Diese Darstellung ist aus [?] entnommen.*

7.7 Untergrundanteil

Aufgrund der sehr hohen Reinheit beider Kanäle von über 95% wurde eine konservative Abschätzung für diesen systematischen Fehler gewählt. Die vollen Analyseketten beider Anpassungsmethoden wurden ohne Untergrundanteil in den Massenverteilungen durchgeführt. Die Differenz der so extrahierten Masse der Datenereignisse zu den Standardwerten wurde als systematische Unsicherheit angenommen. In Tabelle 7.2 ist eine Auflistung der Fehler dargestellt.

7.8 ISR

Die in KORALW implementierte Multi-Photonabstrahlung im Anfangszustand entspricht Rechnungen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Unter der Annahme, daß der Einfluß höherer Effekte kleiner ist als der der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ alleine, wird die systematische Unsicherheit aufgrund der Modellierung von ISR durch den Einfluß der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ auf die Ergebnisse abgeschätzt.

Methode	Estimator	ΔM_W^{sys} (GeV/c^2)
BW	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	$\pm > 0.005$
BW	$M_{2C}^{e\nu jj}$	± 0.010
Umgewichtung	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	$\pm > 0.005$
Umgewichtung	$M_{2C}^{e\nu jj}$	± 0.008

Tabelle 7.2: *Auflistung der systematischen Fehler aufgrund der Unsicherheiten des Untergrundanteils.*

Zu diesem Zweck, werden Simulationsereignisse mittels einer Umgewichtung auf die Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ bewußt verschlechtert. Die Differenz der mittels dieser Simulationsereignisse bestimmten Masse zu der, die aus den unveränderten Ereignissen ermittelt wird, ist eine konservative Abschätzung für Effekte höherer Ordnung. In Tabelle 7.3 ist eine Auflistung der Fehler dargestellt.

Methode	Estimator	ΔM_W^{sys} (GeV/c^2)
BW	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	± 0.010
BW	$M_{2C}^{e\nu jj}$	± 0.010
Umgewichtung	$M_{2C}^{\mu\nu jj}$	± 0.005
Umgewichtung	$M_{2C}^{e\nu jj}$	± 0.005

Tabelle 7.3: *Auflistung der systematischen Fehler aufgrund der im Monte Carlo nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ implementierten ISR-Modellierung.*

7.9 Matrixelement

Im Falle der Umgewichtungs-Methode wurden die Gewichte von Gleichung 6.7 mit einem CC03-Matrixelement berechnet. Der Effekt dieser Approximation wurde mit einem 4f-Matrixelement überprüft. Es zeigt sich, daß die umgewichteten Massenspektren sich für beide Matrixelemente mit weniger als 0.003 GeV/c^2 in M_W unterscheiden. Somit wird kein systematischer Fehler aufgrund des verwendeten Matrixelementes auf die Messungen angegeben.

7.10 Anzahl von Simulationsereignissen

Die einzige Information, die für die BW-Methode aus den Simulationsereignissen entnommen wird, sind die zur Korrektur verwendeten Parameter der Kalibrationskurve. Die statistischen

Fehler auf diese Parameter spiegeln die verwendete Anzahl von Simulationsereignissen wieder und sind mittels Fehlerfortpflanzung in den korrigierten Werten der BW-Methode bereits enthalten.

Für die Umgewichtungs-Methode wurde das in [?] beschriebene Abschätzungsverfahren für die systematische Unsicherheit aufgrund der begrenzten Anzahl von Simulationsereignissen verwendet. Der Fehler auf M_W für $e\nu jj$-Ereignisse beträgt 0.015 und der für $\mu\nu jj$-Ereignisse 0.013 GeV/c^2. Der Unterschied dieser Fehler spiegelt gerade die unterschiedliche Sensitivität der beide Kanäle auf M_W wieder.

7.11 Strahlenergie von LEP

Die kinematische Anpassung zwingt die Ereignisse Energie- und Impulserhaltung zu erfüllen. Der Fehler auf die Strahlenergie E_B von $\sigma_{E_b} = \pm\ 0.025\ GeV/c^2$ pflanzt sich somit entsprechend der Gleichung:

$$\sigma_{M_W} = \frac{M_W}{E_B} \approx 0.022 \quad GeV/c^2 \quad ,$$

direkt auf die Masse fort.

7.12 Zusammenfassung der systematischen Fehler

In Tabellen 7.4 und 7.5 findet sich eine Zusammenfassung aller systematischen Fehler für beide Anpassungsmethoden. Trotz der disjunkten Ereignismengen sind viele der systematischen Unsicherheiten des $e\nu jj$-Kanals mit denen des $\mu\nu jj$-Kanals korreliert.

Quelle	$\Delta M_W^{sys}(e\nu jj) \quad (GeV/c^2)$	$\Delta M_W^{sys}(\mu\nu jj) \quad (GeV/c^2)$
Fragmentation*	0.035	0.035
Kalibration der Kalorimeter*	0.026	0.015
Ausrichtung des Detektors*	0.010	0.010
Korrekturen der Jetenergie*	0.010	0.010
Untergrundanteil	0.010	$---$
ISR*	0.010	0.010
Strahlenergie von LEP*	0.022	0.022
$\sum$	0.053	0.047

Tabelle 7.4: *Auflistung aller systematischen Fehler auf M_W für die BW-Methode. * Bezeichnet die Effekte, bei denen die systematischen Fehler beider Kanäle korreliert sind.*

Quelle	$\Delta M_W^{sys}(e\nu jj) \quad (GeV/c^2)$	$\Delta M_W^{sys}(\mu\nu jj) \quad (GeV/c^2)$
Fragmentation*	0.035	0.035
Kalibration der Kalorimeter*	0.015	0.009
Ausrichtung des Detektors*	0.010	0.010
Korrekturen der Jetenergie*	0.010	0.010
Untergrundanteil	0.008	− − −
ISR*	0.005	0.005
N Simulationsereignisse	0.015	0.013
Strahlenergie von LEP*	0.022	0.022
$\sum$	0.049	0.047

Tabelle 7.5: *Auflistung aller systematischen Fehler auf M_W für die Umgewichtungs-Methode. * Bezeichnet die Effekte, bei denen die systematischen Fehler beider Kanäle korreliert sind.*

Kapitel 8

Ergebnisse und Vergleich mit anderen Messungen

In diesem Kapitel werden im ersten Abschnitt die endgültigen Meßergebnisse von M_W sowie deren Kombinationen für die beiden Zerfallskanäle vorgestellt. Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit dem Vergleich dieser Messungen mit denen von anderen Experimenten.

8.1 Ergebnisse

Für die bei einer Schwerpunktenergie von $\sqrt{s} = 183\ GeV$ mit dem Detektor ALEPH aufgezeichneten Daten der Reaktion $e^+e^- \to W^+W^- \to l\nu jj$ ergeben sich folgende Endresultate:

$$\begin{array}{lllll} M_W^{\mu\nu jj}(BW) & = 80.017 & \pm 0.291(stat.) & \pm 0.047(syst.) & GeV/c^2 \\ M_W^{e\nu jj}(BW) & = 80.354 & \pm 0.254(stat.) & \pm 0.053(syst.) & GeV/c^2 \\ & & & & \\ M_W^{\mu\nu jj}(UG) & = 80.027 & \pm 0.294(stat.) & \pm 0.047(syst.) & GeV/c^2 \\ M_W^{e\nu jj}(UG) & = 80.387 & \pm 0.275(stat.) & \pm 0.049(syst.) & GeV/c^2 \end{array} \quad , \tag{8.1}$$

wobei BW die BW-Methode und UG die Umgewichtungs-Methode (siehe Abschnitt 6.2) bezeichnet. Zur Erstellung der eindimensionalen Massenverteilung wurde der in Abschnitt 6.1 definierte Massenestimator M_{2C} verwendet. Aufgrund der korrelierten systematischen Fehler wird die Kombination der beiden Zerfallskanäle mittels einer χ^2-Anpassung durchgeführt, wobei diese Korrelation zu 100% angenommen wurde. Es ergeben sich folgende Werte für die Kombination:

$$\begin{array}{llllll} M_W^{l\nu jj}(BW) & = 80.207 & \pm 0.191(stat.) & \pm 0.040(syst.) & GeV/c^2 & : \chi^2 = 0.74 \\ M_W^{l\nu jj}(UG) & = 80.218 & \pm 0.201(stat.) & \pm 0.038(syst.) & GeV/c^2 & : \chi^2 = 0.78 \end{array} \quad . \tag{8.2}$$

Wie in Abschnitt 6.5 dargestellt, sind beide Ergebnisse auch unter Berücksichtigung ihrer starken Korrelation vollständig miteinander kompatibel. Für die folgenden Vergleiche mit anderen Messungen wird aufgrund ihres etwas kleineren Fehlers das Resultat der BW-Methode verwendet.

8.2 Vergleich mit anderen Messungen

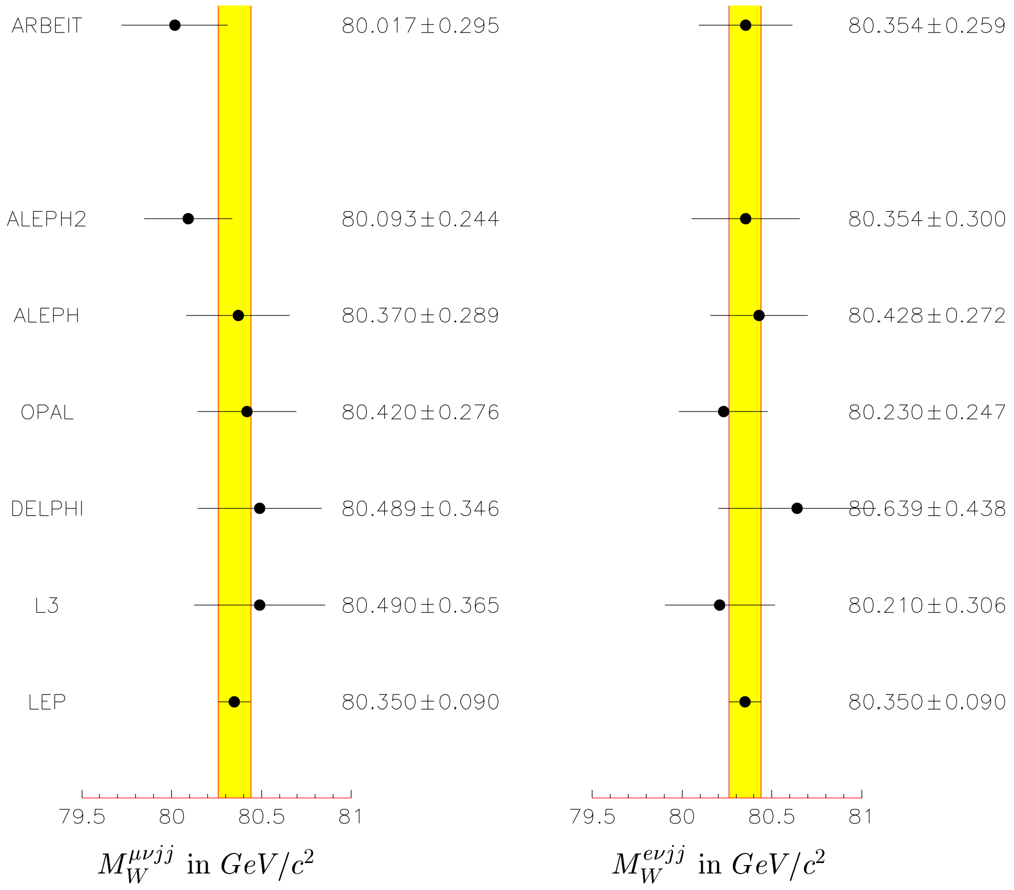


Abbildung 8.1: *Vergleich der mit $e\nu jj$- (links) und $\mu\nu jj$-Ereignissen (rechts) bestimmten Massen des W-Bosons für verschiedene Messungen. Die Werte sind aus [?] (ALEPH) [?] (OPAL),[?] (DELPHI), [?] (L3), [?] (LEP) und [?] (ALEPH2) entnommen. Die mit ARBEIT bezeichneten Werten sind die Ergebnisse dieser Dissertation. Für die OPAL-Messung wurde der systematische Fehler der semileptonischen Kombination von 0.058 GeV/c^2 auch für die individuellen Kanäle verwendet. In dem L3-Massenwert sind die Ergebnisse der bei $\sqrt{s} = 183$ und $\sqrt{s} = 172$ GeV aufgezeichneten Datenmengen bereits kombiniert.*

In Abbildung 8.1 werden die in dieser Arbeit vorgestellten Messungen mit den Resultaten der vier LEP Kollaborationen für $\sqrt{s} = 183$ GeV ([?] [?],[?] [?]) sowie dem endgültigen Resultat, basierend auf der Kombination aller Zerfallskanäle und aller LEP Kollaborationen [?], verglichen. Aufgrund des gleichen Datensatzes sind die Ergebnisse der offiziellen ALEPH-Messung mit denen dieser Arbeit korreliert. Die in [?] ausführlich beschriebene ALEPH-Messung basiert auf der bereits beschriebenen Umgewichtungs-Methode. Da auch die Selektion der semileptonischen Ereignisse mit der in dieser Arbeit vorgestellten Selektion identisch ist, beschränkt sich der Unterschied der beiden Messungen auf die verwendete Anpassungsmethode und auf die kinematische Rekonstruktion[1]. Als Abschätzung der erwarteten Schwankungsbreite der beiden Messungen

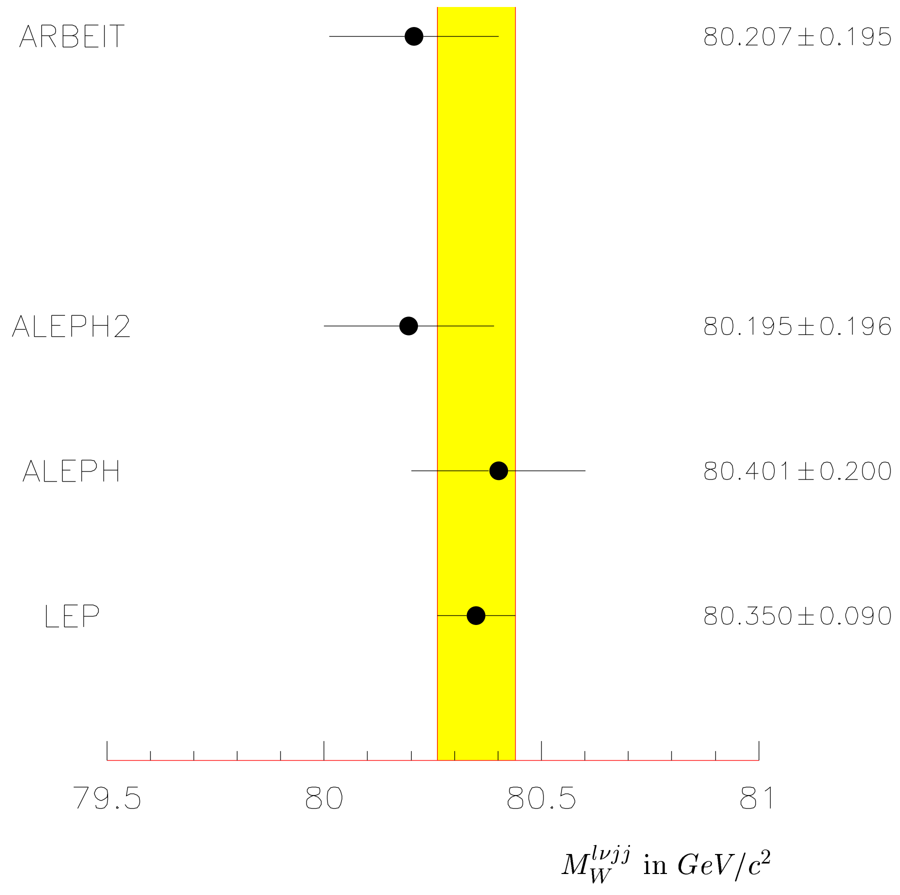


Abbildung 8.2: *Vergleich der auf dem ALEPH Datensatz beruhenden Bestimmungen von M_W.*

kann der in Abschnitt 6.5 durchgeführte Vergleich von BW-Methode und Umgewichtungs-Methode dienen. Entsprechend Tabelle 6.5 ist die erwartete Schwankungsbreite von teilweise korrelierten Methoden etwa 0.130 GeV/c^2. Somit sind die Ergebnisse für den $e\nu jj$-Kanal innerhalb von einer und die des $\mu\nu jj$-Kanals innerhalb von drei Standardabweichungen miteinander verträglich. Eine weitere, auf den bei $\sqrt{s} = 183\ GeV$ mit dem Detektor ALEPH aufgezeichneten Datensatz beruhende, Messung von M_W ist in [?] beschrieben (im folgenden mit ALEPH2 bezeichnet). Auch sie wendet die in Kapitel 4 beschriebene Selektion von $l\mu jj$-Ereignisse an. Allerdings wird die Extraktion der Masse nicht mit der BW- bzw.

[1] Die kinematische Rekonstruktion der offiziellen ALEPH-Messung basiert nicht auf der Methode von Lagrangeschen Multiplikatoren. Zur Auferlegung der Zwangsbedingungen wird eine Überführung der Viererimpulse in einen neuen Parametersatz, der automatisch die Zwangsbedingungen erfüllt, durchgeführt. Eine genaue Beschreibung dieser kinematischen Anpassung findet sich in [?].

Umgewichtungs-Methode durchgeführt. Die Anpassung an die zweidimensionale Massenverteilung, die sich nach einem *1C-Fit* ergibt, erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die mittels einer Faltungs-Methode erstellt wurde. In Abbildung 8.2 ist ein Vergleich der drei, auf ALEPH-Daten basierenden, Messungen von M_W im semileptonischen Kanal dargestellt.

Die in dieser Arbeit vorgestellte direkte Messung von M_W ordnet sich mit vergleichbarer Genauigkeit und ohne signifikante Abweichungen in die ebenfalls bei LEP durchgeführten anderen Bestimmungen ein. Insbesondere ist sie vollständig mit der aus [?] entnommenen Kombination der Massenwerte der vier LEP-Experimente bei $\sqrt{s} = 183\ GeV$ von $M_W^{direkt} = 80.35 \pm 0.09\ GeV/c^2$ kompatibel.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Seit 1996 hat LEP2 die zur Erzeugung von W-Paaren notwendige Schwerpunktenergie von $\sqrt{s} \approx 160\ GeV$ überschritten. Zum ersten Mal bietet sich somit an einem e^+e^--Speicherring die Möglichkeit, die Masse dieser Vektorbosonen zu bestimmen. Die direkte Messung von M_W stellt einen fundamentalen Test des Standardmodells dar und ermöglicht darüberhinaus noch Schranken auf die Masse des bis dato noch nicht experimentell nachgewiesenen Higgs-Bosons zu setzen.

In dieser Arbeit wurde eine Messung der Masse des W-Bosons aus seinen Zerfallsprodukten, die ihren Ursprung in dem semileptonischen WW-Zerfall haben, vorgestellt. Der hierfür verwendete Datensatz entspricht einer integrierten Luminosität von $56.84\ pb^{-1}$ und ist 1997 mit dem Detektor ALEPH bei einer Schwerpunktenergie von $\sqrt{s} = 183\ GeV$ am Speicherring LEP aufgezeichnet worden. Zur Aufbereitung der Daten wurden Selektions- und Rekonstruktionsalgorithmen für semileptonische Ereignisse entwickelt und die daraus resultierende Massenauflösung konnte durch Anwendung eines eigens dafür erstellten kinematischen Anpassungskonzeptes entscheidend verbessert werden.

Die Extraktion der Masse aus der invarianten Massenverteilung erweist sich aufgrund von Akzeptanzverlusten, Auflösungs-, Fragmentationseffekten sowie Abstrahlung von Photonen im Anfangs- und Endzustand als besonders komplex. Zur Korrektur dieser Effekte müssen simulierte Signal- und Untergrundereignisse herangezogen werden, bei deren Erzeugung die Gültigkeit des Standardmodells vorausgesetzt wurde. Dies führt zwangsläufig zu einer stark modellabhängigen Bestimmung von M_W. Um die Glaubwürdigkeit der Messung zu gewährleisten ist es zwingend notwendig, verschiedene Extraktionsmethoden mit unterschiedlicher Abhängigkeit von der Simulation zu vergleichen. Aus diesem Grund wurden eigens für diese Arbeit acht verschiedene Methoden, die annähernd gleiche Sensitivität auf M_W besitzen, entwickelt. Der Unterschied der einzelnen Methoden manifestiert sich zum einem in den auf verschiedenen kinematischen Anpassungen beruhenden Massenestimatoren und zum anderen in zwei unterschiedlichen Massenextraktionskonzepten. Ein ausführlicher Vergleich der korrelierten Messungen zeigt, daß alle Methoden miteinander konsistent sind und somit die gleiche zugrundeliegenden Masse des W-Bosons messen.

Als Endergebnis wurde die Messung mit dem kleinsten Fehler auf M_W gewählt, wobei hier die Anpassung einer BW-Funktion an die mit einem *2C-Fit* erstellte eindimensionale Massenverteilung durchgeführt worden ist. Das Ergebnis

$$M_W = 80.21 \pm 0.19(stat.) \pm 0.04(syst.) \quad GeV/c^2 \quad ,$$

steht in guter Übereinstimmung mit anderen direkten und indirekten Messungen und ist daher eine weitere Bestätigung des Standardmodells.

9.2 Ausblick

Das Ziel dieser Dissertation war es, einen Einstieg in die Massenmessung des W-Bosons bei LEP2 zu finden. Die damit verbundene Entwicklung von Selektion, Rekonstruktion und kinematischer Anpassung sowie die erste Extraktion von M_W stellten dabei die Schwerpunkte der Arbeit dar. Nachdem nun ein Großteil der Analysekette etabliert ist, kann eine weitere Optimierung der Methoden vorgenommen werden.

Mit Ende des Jahres 1998 ist eine weitere Periode der Datennahme von LEP2 abgeschlossen worden. Wie die vorläufigen Analysen der akkumulierten integrierten Luminosität von etwa 180 pb^{-1} pro Experiment zeigen, wird der erwartete Fehler auf M_W eines einzelnen Experimentes bei ungefähr 80-90 MeV/c^2 liegen. Damit wird eine Präzision erreicht, bei der sich der statistische und systematische Fehler etwa die Waage halten. Um die angestrebte Genauigkeit von 30-40 MeV/c^2 nach LEP2 zu erreichen, muß die bereits angesprochene Optimierung der Messung im Hinblick auf eine Reduktion des systematischen Fehlers durchgeführt werden.

Im Falle des semileptonischen Kanals ist neben der Unsicherheit auf die Strahlenergie der systematische Fehler aufgrund der unterschiedlichen Fragmentationsmodelle dominant. Ein vielversprechender Ansatz zur Reduktion dieses Fehlers besteht in der Veränderung der kinematischen Anpassungsphilospohie. Bislang bestand die Rekonstruktionshypothese dieses Zerfallskanals aus zwei Jets, Lepton und fehlendem Impuls. Die Zuordnung der Teilchen zu den Jets hängt aber sehr stark von den verwendeten Jet-Cluster-Algorithmen ab. Diese wiederum reagieren per Konstruktion außerordentlich sensitiv auf Eigenschaften der Fragmentation. Eine weniger stark fragmentationsmodellabhängige Rekonstruktionshypothese ist durch das vollständige hadronischen System, Lepton und fehlendem Impuls gegeben, wobei der Vierervektor des hadronischen Systems durch die Summe aller aus dem hadronischen W-Zerfall stammenden Teilchen gegeben ist. Vorläufige Studien belegen, daß mit dieser Rekonstruktionshypothese für die kinematische Anpassung nicht nur die Unsicherheiten aufgrund der Fragmentation sondern auch die Massenauflösung verbessert werden können.

Eine weitere bislang nur unzureichend angewendete Eigenschaft der kinematischen Anpassung sind die sogenannten *event by event errors*. Sie bieten die Möglichkeit für jedes einzelne Ereignis ein Qualitätskriterium auf die, der kinematischen Anpassung entnommenen, Massen anzugeben, was zu einer höheren Sensitivität auf M_W führen wird.

Dies sind nur zwei Beispiele, die aufzeigen sollen, daß die Extraktion der Masse des W-Bosons bei LEP2 noch keineswegs ihr Optimum erreicht hat. Es bedarf noch einiger Anstrengungen damit das angestrebte Ziel einer Präzisionsmessung von M_W, und dem damit verbundenen fundamentalen Konsistenztest des Standardmodells, am Ende von LEP2 erreicht wird.

Literaturverzeichnis

[1] S. Myers et al., Contemp. Phys. 31, (1990) 387.
Large Electron-Positron Storage Ring, Technical Notebook, CERN Publication, (1988).

[2] **ALEPH** Collaboration, D. Decamp et al., Nucl. Inst. Meth. A294 (1990) 121.

[3] **OPAL** Collaboration, K. Ahmet et al., Nucl. Inst. Meth. A305 (1991) 275.

[4] **DELPHI** Collaboration, P. Aarnio et al., Nucl. Inst. Meth. A303 (1991) 233.

[5] **L3** Collaboration, B. Adeva et al., Nucl. Inst. Meth. A289 (1990) 35.

[6] Theoretical Physics and Particle Physics Experiments Divisions,
'PHYSIK AT LEP2 Vol. 1', CERN 96–01.

[7] O. Nachtmann, 'Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte', Vieweg 1986

[8] D. H. Perkins, 'Hochenergiephysik', Addision-Wesley 1990

[9] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264 (1967) ;
A. Salam, Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm 367 (Almquist and Wiksells, Stockholm, 1969) ;
S.L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, Phys. Rev. D2 1285 (1970).

[10] **UA1** Collaboration, G. Arnison et al., Phys. Lett. B122 (1983) 103 ;
Phys. Lett. B126 (1983) 398 ; Phys. Lett. B166 (1986) 484.

[11] **UA2** Collaboration, M. Banner et al., Phys. Lett. B122 (1983) 476.

[12] **D0** Collaboration, B. Abbott et al., Phys. Rev. D58 (1998); R. Madaras, 'W boson physic at the Fermilab Tevatron collider', In Proceedings of the XVIII International Conference on Physik in Collision, June 1998, Frascati, Italy hep-ex/9808021.

[13] A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model, LEPEWWG/98-01 and ALEPH 98-037

[14] **D0** Collaboration, S. Abachi et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2632 ;
CDF Collaboration, F. Abe et al., Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 2626 R.M. Barnett et al., Physical Rev. D54 (1996) 1, and 1997 off-year update for the 1998 edition available on the PDG WWW pages (URL: http: pdg/lbl.gov/).

[15] T. Muta, R. Najima and S. Wakaizumi, Mod. Phys. Lett. A1 (1986) 203.

[16] Z. Kunszt and W.J. Stirling, LEP Working group, 'Determination of the mass of the W Boson', hep-ph-9602352 (1996).

[17] S. Dittmaier, 'Theoretical aspects of W-pair produnction in e^+e^- collisions', hep-ph-9610529 (1996)

[18] G. Schmidt, Diplomarbeit 'Messung der W-Masse aus dem Energiespektrum der Leptonen mit dem Detektor ALEPH, HD-IHEP-98-08.

[19] **ALEPH** Collaboration, 'Measurement of the W Mass by Direct Reconstruction in e^+e^- collisions at 172 GeV', Phys. Lett. B422 (1998) 284.

[20] **ALEPH** Collaboration, 'Measurement of the W mass in e^+e^- collisions at 183 GeV', CERN-EP/99-027 (1999)
Zur Veröffentlichung eingereicht in Phys. Lett. B.

[21] S. Catani, Y. L. Dokshitzer, M. Olsson, G. Turnock and B. R. Webber Phys. Lett. B269 (1991) 32.

[22] W. J. Stirling, J. Phys. G. 17 (1991) 1537.

[23] Evelyn Jean Thomson, PhD Thesis 'Measurement of the W Boson mass from $e^+e^- \to W^+W^- \to l\nu q\bar{q}$ events with the ALEPH Detector', University of Glasgow 1998.

[24] **ALEPH** Collaboration, D. Buskulic et al., 'Performances of the ALEPH detector at LEP', Nucl. Inst. and Meth. A346 (1994) 461.

[25] M. Skrzypek, S. Jadach, W. Placzek and Z. Was 'Monte Carlo program KORALW 1.02 for W pair production at LEP2/NLC energies', Comp. Phys. Comm. 94 (1996) 216.

[26] **Minami-Tateya** Collaboration, GRACE manual 1.0, KEK 92-19, 1993.
Minami-Tateya Collaboration, Manual of GRACE system ver 2.0/β, 1995.

[27] T. Sjöstrand, 'High-Energy Physics event generation with PYTHIA 5.7 and JETSET 7.4', Comp. Phys. Comm. 82 (1994) 74.

[28] S. Jadach, B.F.L. Ward and Z. Was., 'The Monte Carlo Program KORALZ, version 4.0, for the lepton or quark pair production at LEP/SLC energies', Comp. Phys. Comm. 79 (1994) 466.

[29] V. Blobel und E. Lohrmann, 'Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse', Teubner 1998.

[30] Bronstein und Semendjajew, 'Taschenbuch der Mathematik', Harri Deutsch 1987.

[31] ALEPH Note 97-068, 'W mass measurement in the four jet channel using a MC reweighting technique', Interne ALEPH-Veröffentlichung 1997.

[32] G. Marchesini et al., Nucl. Phys. B310, (1988) 571.

[33] I. Tomalin, http://afal44.cern.ch/LEP2ANALYSIS/TRACKING/

[34] F. Ligabue, http://alephwww.cern.ch/~ligabue/syst/syst.htm

[35] **OPAL** Collaboration, 'Measurement of the W mass and Width in e^+e^- collisions at 183 GeV', CERN-EP/98-197 (1998)
Zur Veröffentlichung eingereicht in Phys. Lett. B.

[36] **DELPHI** Collaboration, 'Measurement of the mass of the W boson using direct reconstruction', DELPHI 99-41 CONF 240 (1999)
Zur Veröffentlichung eingereicht in Phys. Lett. B.

[37] **L3** Collaboration, 'Measurement Mass and Width of W Boson at LEP', CERN-EP/99-017 (1999)
Zur Veröffentlichung eingereicht in Phys. Lett. B.

[38] Richard John Cavanaugh, PhD Thesis 'A Measurement of the W Boson Mass', Florida State University 1999.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Durchführung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. A. Putzer, für die sehr angenehme Betreuung und umfangreiche Unterstützung bei meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr. A. Tittel danke ich für die Möglichkeit, der Durchführung dieser Arbeit in seiner Arbeitsgruppe am Institut für Hochenergiephysik.

Herrn Prof. Dr. H. G. Dosch danke ich dafür, daß er ohne weiteres bereit war die leidvolle Rolle des Zweitgutachers zu übernehmen.

Bedanken möchte ich mich außerdem noch bei:

- Dr. Ursula Becker für Diskussionen über Physik und weibliche Moralvorstellungen.
  ...... *wieso, Männer rasieren sich doch auch nicht die Beine!* ......
- Dr. Stefan Werner für seine ausführliche Einführung in die Kunst des 'Fittens' und des 'Triggerns'.
  ...... *ich habe Dir doch gesagt du sollst daran nicht wackeln!* ......
- Dr. Jachim Sommer für viel guten Wein und natürlich auch für die Lektion in Sachen 'Schweigen'.
  ...... *Du weißt ganz genau, daß Du darauf keine Antwort bekommst!* ......
- Dr. Gerret Hansper für .... (such Dir was passendes DU GURKE!)
  ...... *'Du hast einen Bug in deinem Programm.', 'Nie!', 'Doch!!', 'Nein!!!', 'Depp', 'Gurke',* '**selber GURKE!**' ......
- Dr. Jorgen Beck Hansen für das ABC der kinematischen Anpassung.
  ...... *Yes, Yes, I told you, we make A Better Cfit*.......
- Dr. Richard John Cavanaugh für die vielen fachlichen Hilfestellungen und fruchtbaren Diskussionen.
  ...... *Ah, I got you* ...... (leider nur fast Rick!).

Ein besonderer Dank geht natürlich an *den Inder*, mit dem ich mehr als vier Jahre das Zimmer teilen mußte und der auch sonst alles andere als nett zu mir war. (Na ja Selle, Du weißt wie ich das meine....... .)

Allen hier nicht namentlich erwähnten Kollegen sowie allen Mitarbeitern des Instituts danke ich für die angenehme Atmospähre und Zusammenarbeit während meines mehr als vier jährigen Aufenthaltes am IHEP.

Ein herzlicher Dank gebührt Dr. Andrea Schmidt für die sorgfältige Korrektur der Arbeit.

Ein spezieller Dank geht an meine Freundin Simone, für die mit großer Geduld ertragenen Stimmungsschwankungen meinerseits.....insbesondere als es dem (langersehnten) Ende zuging.

Diese Arbeit wurde mit Mitteln des BMBF gefördert.